Доклады Национальной академии наук Беларуси

1999 **март—апрель** **Том 43 № 2**

УДК 519.68[519.1+519.6]

А. А. ЧЕРНЯК

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ НАДЕЖНОСТИ k-УНИФОРМНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

1. Введение. Пусть $G = (T, P)$ — гиперграф с множеством вершин T и множеством ребер P, ни одно из которых не является подмножеством другого. Предположим, что каждая вершина из T независимо от других с вероятностью $1\text{-}p$ может исключаться (отказывать) из G. Обозначим через h_R (G, p) вероятность события, заключающегося в том, что множество неисключенных вершин в G содержит хотя бы одно ребро из P. Задача вычисления h_R (G, p) называется REL-проблемой.

Предположим теперь, что гиперграф G не содержит изолированных вершин, а каждое ребро из P независимо от других ребер с вероятностью $1\text{-}p$ может исключаться (отказывать) из G. Каждой вершине $s \in T$ гиперграфа G сопоставим множество $P(s)$ всех инцидентных ей ребер. Величина $|P(s)|$ называется степенью вершины s. Пусть $G^* = (T^*, P^*)$ — гиперграф, в котором $T^* = P$, а P^* состоит из всех минимальных (по включению) множеств $P(s)$, $s \in T$. Обозначим через h_C (G, p) вероятность события, заключающегося в том, что множество неисключенных вершин гиперграфа G^* является его трансверсальным множеством (т.е. имеет непустое пересечение с каждым ребром из P^*). Задача вычисления h_C (G, p) называется COVER-проблемой. Если же предполагается, что гиперграф G допускает кратные ребра, то в тех же определениях задача вычисления h_C (G, p) называется COVDUP-проблемой.

Отметим, что в математической теории надежности REL-проблема известна как классическая задача надежности бинарных систем, а COVER-проблема (COVDUP-проблема) — как надежностная задача покрытия (задача покрытия с резервированием).

Класс k-униформных гиперграфов, степени вершин которых не превосходят l, обозначим через (k, l). Если в таких гиперграфах допускаются кратные ребра, то соответствующий класс обозначается через $[k, l]$. Весь класс k-униформных гиперграфов обозначается через (k, ∞).

В [1—3] было доказано, что REL-проблема является #P-полной в классе (k, ∞) для любого фиксированного целого $k \geq 2$. В [4] доказана #P-полнота COVDUP-проблемы в классе $[2, \infty]$. Определение алгоритмической сложности REL-проблемы, COVER-проблемы (COVDUP-проблемы) в классах (k, l) ($[k, l]$) для малых значений l оставалось открытой задачей.

В данной работе получена следующая полная иерархия алгоритмической сложности перечисленных выше проблем: для любых фиксированных целых $k \geq 2$, $r \geq 3$ REL-проблема является #P-полной в классах гиперграфов $(k, 4)$ и $(r, 3)$, в которых вероятности отказов всех вершин одинаковы и равны 1/2; для любых фиксированных целых $k \geq 4$, $r \geq 3$ COVER-проблема является #P-полной в классах гиперграфов $(k, 2)$ и $(r, 3)$, в которых вероятности отказов всех ребер одинаковы и равны 1/2; для любых фиксированных целых $k \geq 2$, $r \geq 3$ REL-проблема (COVER-проблема) является #P-трудной в классах гиперграфов $(k, 3)$ и $(r, 2)$, в которых вероятности отказов всех вершин (ребер) одинаковы; для любого фиксированного целого $k \geq 2$ COVDUP-проблема является #P-полной в классе гиперграфов $[k, 3]$, в которых вероятности отказов всех ребер одинаковы и равны 1/2; REL-проблема и COVER-проблема полиномиально разрешимы в классах гиперграфов $(2, 2)$, $(1, \infty)$, $(\infty, 1)$ с произвольными вероятностями отказов своих вершин и ребер соответственно.

2. Основные результаты.

Л е м м а 1. *Задача определения числа совершенных паросочетаний в классе графов без кратных ребер, в которых степени вершин не превосходят 3 и никакие две вершины степени 3 не смежны между собой, является #P-полной.*

(Здесь и в дальнейшем используются понятия #P-полноты и #P-трудности, применяемые к перечислительным задачам; детали можно найти в [5—7]).

Выполняющим набором для функции F, существенно зависящей от переменных $x_1, ..., x_k$, назовем (0,1) k-вектор $z = (z_1, ..., z_k)$ такой, что $F(z) = 1$. Ленточной конъюнкцией длины r и степени s с корневой переменной $x_{r+1,0}$ назовем конъюнкцию вида

$$L_{rs} = \bigwedge_{i=1}^{r}(x_{i0} \vee x_{i1} \vee \ldots \vee x_{is} \vee x_{i+1,0}).$$

Обозначим через a_r и b_r число выполняющих наборов $z = (z_{10}, z_{11},..., z_{rs}, z_{r+1,0})$ для L_{rs}, у которых последние координаты $z_{r+1,0}$ равны 1 и 0 соответственно. Очевидно, $a_1 = 2^{s+1}$, $b_1 = 2^{s+1}-1$.

Л е м м а 2. *Для $r \geq 2$ выполняются следующие рекуррентные соотношения: $a_r = 2^s(a_{r-1} + b_{r-1})$, $b_r = 2^s(a_{r-1} + b_{r-1}) - b_{r-1}$, причем $a_i/b_i \neq a_j/b_j$ для любых $i \neq j$.*

Пусть $X = \{x_1, ..., x_n\}$ — множество булевых переменных, $F = c_1 \wedge c_2 \wedge ... c_m$, где c_i — дизъюнкция переменных из X, называемая компонентой функции F. Если каждая переменная x_j из X встречается не более, чем в l компонентах, то F называется (M, l)-формой, где $M = \{|c_1|, \ldots, |c_m|\}$.

Л е м м а 3. *Пусть a, b, p_1, p_2 — фиксированные целые числа, $b \geq 2$, $a \geq p_2 \geq p_1$. Тогда задача определения числа выполняющих наборов с наименьшим числом единичных координат для $(\{p_1, p_2\},b)$-форм полиномиально сводима по Тьюрингу к задаче определения числа всех выполняющих наборов для $(a, b+1)$-форм.*

REL-проблему в классе (k, l) обозначим через REL$(k; l; p)$.

Л е м м а 4. *Задача определения числа выполняющих наборов для (k, l)-форм полиномиально сводима по Тьюрингу к* REL$(k; l; 1/2)$.

Л е м м а 5. *Задача определения числа выполняющих наборов с наименьшим числом единичных координат для (k, l)-форм полиномиально сводима по Тьюрингу к* REL$(k; l; p)$.

Л е м м а 6. *Задача определения числа выполняющих наборов с наименьшим числом единичных координат для $(\{k, k+1\}, l)$-форм полиномиально сводима по Тьюрингу к* REL$(k; l; p)$.

COVER-проблему в классе (k, l) обозначим через COVER$(k; l; p)$.

Л е м м а 7. *Задача определения числа выполняющих наборов для (k, l)-форм полиномиально сводима по Тьюрингу к задаче* COVER$(l; k; 1/2)$.

Т е о р е м а 1. REL$(k; l; 1/2)$ *является #P-полной задачей для любых фиксированных целых $k \geq 2$, $l \geq 3$, $k + l \geq 6$.* REL$(k; l; p)$ *является #P-трудной задачей для любых фиксированных $k \geq 2$, $2 \leq l \leq 3$, $k + l \geq 5$.*

Т е о р е м а 2. COVER$(k, l, 1/2)$ *является #P-полной задачей для любых фиксированных целых $k \geq 3$, $l \geq 2$, $k + l \geq 6$.* COVER$(k; l; p)$ *является #P-трудной задачей для любых фиксированных $k \geq 2$, $2 \leq l \leq 3$, $k + l \geq 5$.*

COVDUP-проблему в классе $[k, l]$ обозначим через COVDUP$(k; l; p)$.

Т е о р е м а 3. COVDUP$(k;3;1/2)$ *является #P-полной задачей для любого фиксированного целого $k \geq 2$.*

З а м е ч а н и е. Пусть 1-p_i — вероятность отказа i-й вершины (i-го ребра) гиперграфа $G = (T, P)$, $k = |T|$ $(k = |P|)$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_k)$. Так как классы (2, 2), $(\infty, 1)$, $(1, \infty)$ состоят из так называемых последовательно-параллельных гиперграфов [8], то задачи определения величин $h_R(G, p)$, $h_C(G, p)$ полиномиально разрешимы в этих классах.

Summary

The complete hierarchy of algorithmic complexity of the dual fundamental reliability problems concerning k-uniform hypergraphs with bounded vertex degrees is given.

Литература

1. B a l l M. O., P r o v a n J. S. // Oper. Res. 1988. Vol. 36. P. 703—715.
2. C h e r n y a k A. A., C h e r n y a k Z h. A. // Discrete Appl. Math. 1997. Vol. 73. P. 289—295.
3. J a e g e r F., V e r t i g a n D. L., W e l s h D. J. A. // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1990. Vol. 108. P. 35—53.
4. B a l l M. O., P r o v a n J. S., S h i e r D. R. // Networks. 1991. Vol. 21. P. 345—357.
5. Г э р и М., Д ж о н с о н Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
6. P r o v a n J. S., B a l l M. O. // SIAM J. Comput. 1983. Vol. 12. P.777—788.
7. V a l i a n t L. G. // SIAM J. Comput. 1979. Vol. 8. P. 410—421.
8. B a r l o w R. E., I y e r S. // Prob. Eng. Inf. Sci. 1988. Vol. 2. P. 461—469.

Белорусский государственный университет

Поступило 29.05.98