Доклады Национальной академии наук Беларуси

1999 ноябрь—декабрь Том 43 № 6

УДК 519.68/519.1+519.6/

А. А. ЧЕРНЯК

СИНТЕЗ СВЯЗНЫХ ГИПЕРГРАФОВ С ПРЕДПИСАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

1. Введение. Цель данной работы — выявить единую комбинаторную основу алгоритмов синтеза и теорем существования связных гиперграфов с предписанными значениями произвольной переключательно совершенной характеристики. Структурный параметр x, переключательно совершенный в некотором множестве $\mathfrak{M}$ r-гиперграфов, характеризуется существованием фактормножества $\mathfrak{M}/\overset{x}{\sim}$ по отношению эквивалентности $\overset{x}{\sim}$, заданном операцией блочного переключения, в котором классы эквивалентности биективно соответствуют графовым значениям параметра x.

Эффективность подхода демонстрируется на общем решении трех открытых задач синтеза связных гиперграфов с предписанными степенными последовательностями, ранее решенных в частных случаях [1—6]. Так, в качестве прямых следствий получены конструктивные доказательства полиномиальной разрешимости задач существования связного r-гиперграфа с заданной реберной степенной последовательностью и связного r-графа с заданной окружной степенной последовательностью, а также линейно проверяемые критерии существования связного дифферентного r-графа с заданной частотной степенной последовательностью и связного гиперграфа с заданной вершинной степенной последовательностью.

2. Аппарат. $\mathfrak{L}_r(k)$ — множество гиперграфов, в которых каждое ребро имеет мощность k и кратность, не превосходящую r; N — множество натуральных чисел, $k \in N$, $r \in N \cup \{\infty\}$, $\mathfrak{L}_r = \bigcup\limits_{k=2}^{\infty} \mathfrak{L}_r(k)$. В традиционной терминологии $\mathfrak{L}_r$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_\infty(k)$, $\mathfrak{L}_r(2)$ являются соответственно r-гиперграфами, простыми гиперграфами, k-униформными гиперграфами, r-графами. Для $G \in \mathfrak{L}_r$ VG и EG обозначают его вершинное и реберное множества.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}_r$, $G \in \mathfrak{M}$. Свяжем с G вершинное и реберное разбиения

$$VG = V_1 \cup \ldots \cup V_m,\ EG = E_1 \cup \ldots \cup E_n \tag{1}$$

множеств VG и EG. Оба разбиения в (1) обозначим $\Omega(G)$ и будем в дальнейшем называть блочным разбиением на вершинные V_i и реберные E_j блоки. Положим $(\mathfrak{M}, \Omega(\mathfrak{M})) = \{(G, \Omega(G)) : G \in \mathfrak{M}\}$, $\Omega(\mathfrak{M}) = \{\Omega(G) : G \in \mathfrak{M}\}$.

Пусть $\{V_{i1}, \ldots, V_{im}\}$, $\{E_{i1}, \ldots, E_{in}\}$ — множества вершинных и реберных блоков в $\Omega(G_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $(G_1, \Omega(G_1))$ и $(G_2, \Omega(G_2))$ назовем блочно изоморфными, если существует изоморфизм φ гиперграфов G_1 и G_2 такой, что $\varphi(V_{1i}) = V_{2i}$, $\varphi(E_{1j}) = E_{2j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. $(G, \Omega(G))$ назовем связным элементом множества $(\mathfrak{M}, \Omega(\mathfrak{M}))$, если гиперграф G связный.

Для $(G, \Omega(G))$ запрещенная конфигурация определяется как пара ребер U_1, U_2, обладающих следующими свойствами: U_1, U_2 принадлежат одному реберному блоку и существуют вершины u_1, u_2 из одного вершинного блока такие, что $u_i \in U_i$, $u_i \notin U_{i+1}$, и кратность множества $W_i = (U_i \setminus \{u_i\}) \cup \{u_{i+1}\}$, если оно является ребром, не равна r, $i = 1, 2$ (индексы приводятся по модулю 2). В этом случае скажем, что $(G, \Omega(G))$ допускает блочное переключение $t = \mathrm{int}[u_1, U_1 \setminus \{u_1\}, u_2, U_2 \setminus \{u_2\}]$, а через $(tG, \Omega(tG))$ обозначим результат переключения t, получаемый заменой в соответствующем реберном блоке ребер U_1, U_2 ребрами W_1, W_2 без изменения всех остальных реберных и вершинных блоков.

Если для любого $(G, \Omega(G)) \in (\mathfrak{M}, \Omega(\mathfrak{M}))$ и любого допускаемого им переключения t, элемент $(tG, \Omega(tG))$ блочно изоморфен некоторому элементу из $(\mathfrak{M}, \Omega(\mathfrak{M}))$, то множество $(\mathfrak{M}, \Omega(\mathfrak{M}))$ назовем замкнутым.

На замкнутом множестве $(\mathfrak{M}, \Omega(\mathfrak{M}))$ определим отношение эквивалентоности $\overset{\mathfrak{L}}{\sim}$: $(G, \Omega(G)) \overset{\mathfrak{L}}{\sim} (H, \Omega(H))$, если и только если существует последовательность блочных переключений, преобразующая $(G, \Omega(G))$ в элемент блочно изоморфный $(H, \Omega(H))$. Фактормножество по отношению $\overset{\mathfrak{L}}{\sim}$ обозначим $\mathfrak{M} / \overset{\mathfrak{L}}{\sim}$ и считаем его определенным только для замкнутых множеств $(\mathfrak{M}, \Omega(\mathfrak{M}))$.

Параметр x назовем переключательно совершенным в $\mathfrak{M}$, если существует множество блочных разбиений $\Omega(\mathfrak{M})$ гиперграфов из $\mathfrak{M}$, при котором верно следующее: G и H имеют равные значения параметра x, если и только если элементы $(G, \Omega(G))$ и $(H, \Omega(H))$ принадлежат одному классу эквивалентности в $\mathfrak{M} / \overset{\mathfrak{L}}{\sim}$. В этом случае $\Omega(\mathfrak{M})$ назовем множеством блочных разбиений, согласующимся с параметром x.

Обозначения: $K[G]$ — кёнигово представление гиперграфа G, где $VK[G] = VG \cup EG$, $EH = \{(u, U) : (u, U) \in VG \times EG, u \in U\}$; $\mathrm{com}(G)$ — число компонент связности в G (или в $(G, \Omega(G))$); (e_1, e_2)-цепь в r-графе F — это простая цепь, концевыми элементами которой являются ребра e_1 и e_2; $F(U)$ — подграф, индуцированный множеством $U \subseteq VF$; для $E' \subseteq EF$ $F \setminus E'$ — r-граф, полученный из F удалением ребер E' и всех вершин, инцидентных только ребрам из E'; $M = \{1, ..., m\}$, $L = \{1, ..., n\}$.

Пусть $R \subseteq T \times T$ — симметричное бинарное отношение, заданное на множестве T. Тогда проекция $\mathrm{proj}(R)$ определяется так: $a \in \mathrm{proj}(R)$, если и только если существует $b \in T$ такое, что $(a, b) \in R$.

Определим теперь величину $wd(G)$, называемую глубиной сплетения элемента $(G, \Omega(G))$. Если G — связный, то полагаем $wd(G)=0$. Иначе индуктивно построим последовательность симметричных, антирефлексивных бинарных отношений $R_i \subseteq EH \times EH$, где $H = K[G]$. Пусть $f, g \in EH$, $g = (v, V)$, $f = (u, U)$. Тогда $(f, g) \in R_1$, если и только если f и g принадлежат разным компонентам связности в H, v и u из одного вершинного, а V и U из одного реберного блоков в $\Omega(G)$. Предположим, что уже определено отношение R_i. Если $R_i = \varnothing$, то полагаем $wd(G) = \infty$, а последовательность $R_1, ..., R_{i-1}$ объявляем сплетением отношений в H (если $i = 1$, то сплетение считается пустым). Пусть $R_i = \varnothing$. Если в $\mathrm{proj}(R_i)$ есть ребро, принадлежащее циклу графа H, то полагаем $wd(G) = i$, а сплетением объявляем последовательность отношений $R_1, ..., R_i$; в противном случае строим отношение R_{i+1} : $(f, g) \in R_{i+1}$, если и только если $f, g \notin \bigcup_{j=1}^{i} \mathrm{proj}(R_j)$, u и v из одного вершинного блока, U и V из одного реберного блока, и любая (f, g)-цепь в графе H содержит элемент из $\mathrm{proj}(R_i)$.

Если в $\Omega(G)$ имеется только один вершинный (реберный) блок, то $\Omega(G)$ назовем вершинно (реберно) тривиальным. $\Omega(\mathfrak{M})$ назовем вершинно (реберно) тривиальным, если для каждого $G \in \mathfrak{M}$ $\Omega(G)$ вершинно (реберно) тривиально.

Т е о р е м а. *В фактормножестве $\mathfrak{M} / \overset{\mathfrak{L}}{\sim}$ произвольный класс эквивалентности содержит связный элемент, если и только если все элементы из этого класса имеют конечную глубину сплетения.*

С л е д с т в и е 1. *Задача построения связного элемента из класса Δ в $\mathfrak{M} / \overset{\mathfrak{L}}{\sim}$ полиномиально сводима к задаче построения некоторого элемента из Δ.*

Теперь дадим несколько определений. Пусть $\Delta \in \mathfrak{M} / \overset{\mathfrak{L}}{\sim}$, $(G, \Omega(G)) \in \Delta$, (1) — разбиения на блоки в $\Omega(G)$, $H = K[G]$, $t_{ij} = |EH(V_i \cup E_j)|$ (очевидно, числа t_{ij} инвариантны относительно переключений и потому не зависят от выбора G в $\mathfrak{M}$). Определим двудольный граф $P[\Delta]$ с долями VG и EG, в котором вершины $u \in V_i$ и $U \in E_j$ смежны, если и только если степени вершин u и U в графе $H(V_i \cup E_j)$ отличны от нуля (с точностью до изоморфизма задание графа $P[\Delta]$ не зависит от выбора $(G, \Omega(G))$ в Δ). Зададим отображение $c_\Delta : EP[\Delta] \to M \times L$: $c_\Delta(u, U) = (i, j)$, где $u \in V_i$, $U \in E_j$. Для $S \subseteq M \times L$ положим: $p(S)$ — число вершин в $P[\Delta]$, инцидентных ребрам из $c_\Delta^{-1}(S)$; $i(S)$ — число вершин в $P[\Delta]$, инцидентных ребрам из $c_\Delta^{-1}(S)$; $e(S) = \sum_{(i,\, j)\in S} t_{ij}$.

С л е д с т в и е 2. *Класс эквивалентности Δ фактормножества $\mathfrak{M} / \overset{\varepsilon}{\sim}$ содержит связный элемент, если и только если для каждого подмножества S, где $\varnothing \subseteq S \subseteq c_\Delta(EP[\Delta])$, верно:*

$$\operatorname{com}(P[\Delta] \setminus c_\Delta^{-1}(S)) \le e(S) - i(S) + 1. \tag{2}$$

С л е д с т в и е 3. *Пусть x — параметр, переключательно совершенный в $\mathfrak{M}$, α — некоторое его значение, $\Omega(\mathfrak{M})$ — множество блочных разбиений, согласующееся с x. Тогда в $\mathfrak{M}$ существует связный гиперграф со значением α параметра x, если и только если для каждого $G \in \mathfrak{M}$ с тем же значением параметра x, элемент $(G, \Omega(G))$ имеет конечную глубину сплетения.*

3. Специальные случаи. Пусть $G \in \mathfrak{L}_r$. Степенью вершины v в G называется число ребер, содержащих v. Степенное множество G — это множество $\{d_1, \ldots, d_m\}$, $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$, степеней вершин в G. Степень ребра e в G есть вектор $(a_1, \ldots, a_m)$, в котором a_i равно числу вершин степени d_i, содержащихся в ребре e, $i = 1, \ldots, m$. Вектор $(l_1, \ldots, l_m)$, где l_i равно числу вершин степени d_i в G, $i = 1, \ldots, m$, называется частотной степенной последовательностью G и обозначается $f\deg(G)$.

Пусть $G \in \mathfrak{L}_r(2)$. Окружной степенью вершины v в G называется последовательность $b_1, \ldots, b_r$, в которой r равно степени вершины v, а b_i равно степени i-й вершины из окружения вершины v в G. Если $|EG| = q$ и для каждого ребра $e = uv$ из EG модуль разности степеней вершин u и v равен μ, то r-граф G называется (μ, q)-дифферентным.

Списки степеней вершин $v\deg(G)$, степеней ребер $e\deg(G)$, окружных степеней вершин $n\deg(G)$ в G называются соответственно вершинной, реберной, окружной степенными последовательностями. Степенные последовательности, а также окружные степени вершин различаются с точностью до перестановок своих членов.

Степенной орбитой называется множество вершин (или ребер) одинаковой степени. Блочное разбиение назовем вершинно (реберно) степенным, если в нем разбиение на вершинные (реберные) блоки совпадает с соответствующим разбиением на степенные орбиты. $\Omega(\mathfrak{M})$ назовем степенным, если для каждого $G \in \mathfrak{M}$ блочное разбиение $\Omega(G)$ является степенным.

Л е м м а 1 [7]. *Реберная степенная последовательность является переключательно совершенной в $\mathfrak{L}_r$. При этом согласующееся множество блочных разбиений $\Omega(\mathfrak{L}_r)$ является вершинно степенным и реберно тривиальным.*

Л е м м а 2 [7]. *Окружная степенная последовательность является переключательно совершенной в $\mathfrak{L}_r(2)$. При этом согласующееся множество блочных разбиений $\Omega(\mathfrak{L}_r(2))$ является вершинно и реберно степенным.*

Л е м м а 3 [7]. *Вершинная степенная последовательность является переключательно совершенной в $\mathfrak{L}_r(k)$, если и только если $r = \infty$ или $k = 2$. При этом согласующееся множество блочных разбиений (в случаях $\mathfrak{L}_\infty(k)$ и $\mathfrak{L}_r(2)$) является вершинно и реберно тривиальным.*

Л е м м а 4 [7]. *Частотная степенная последовательность является переключательно совершенной в классе (μ, q)-дифферентных r-графов. При этом согласующееся множество блочных разбиений является вершинно степенным и реберно тривиальным.*

Обозначения: $\mathfrak{N}$ — множество всех r-гиперграфов, имеющих заданную реберную степенную последовательность $e\deg(G)$ (для произвольного $G \in \mathfrak{L}_r$); $\Omega(\mathfrak{N})$ — вершинно степенное и реберно тривиальное множество блочных разбиений; $\mathfrak{B}$ — множество всех r-графов, имеющих заданную окружную степенную последовательность $n\deg(G)$ (для произвольного $G \in \mathfrak{L}_r(2)$); $\Omega(\mathfrak{B})$ — вершинно и реберно степенное множество блочных разбиений; $\mathfrak{R}$ (или $\mathfrak{T}$) — множество всех k-униформных гиперграфов (или r-графов), имеющих заданную вершинную степенную последовательность $v\deg(G) = d_1^{l_1}, \ldots, d_m^{l_m}$ (для произвольного $G \in \mathfrak{L}_\infty(k)$ или $G \in \mathfrak{L}_r(k)$ при $k = 2$), $\Omega(\mathfrak{R})$ (или $\Omega(\mathfrak{T})$) — вершинно и реберно тривиальное множество блочных разбиений; $\mathfrak{U}$ — множество всех (μ, q)-дифферентных r-графов, имеющих заданную частотную степенную последовательность $f\deg(G) = l_1, \ldots, l_m$ (G — произвольный (μ, q)-дифферентный r-граф); $\Omega(\mathfrak{U})$ — вершинно степенное и реберно тривиальное множество блочных разбиений.

С л е д с т в и е 4. *Задача существования и построения связного гиперграфа в любом из множеств* $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$ *полиномиально разрешима.*

С л е д с т в и е 5. *Пусть* $\Sigma \in \{ \mathfrak{N}, \mathfrak{B}, \mathfrak{R}, \mathfrak{T}, \mathfrak{U} \}$. *Тогда в* Σ *существует связный гиперграф, если и только если каждый элемент из* $(\Sigma, \Omega(\Sigma))$ *имеет конечную глубину сплетения.*

Отметим, что параметры t_{ij} (см. следствие 2) однозначно определяются последовательностями $e\mathrm{deg}(G)$ и $n\mathrm{deg}(G)$ [8]. Поэтому корректно следующее

С л е д с т в и е 6. *Пусть* $\Sigma \in \{\mathfrak{N}, \mathfrak{B}\}$. *Тогда в* Σ *существует связный гиперграф, если и только если для каждого подмножества* S, *где* $\varnothing \subseteq S \subseteq c_\Delta(EP[\Delta])$, $\Delta = (\Sigma, \Omega(\Sigma))$, *верно* (2).

С л е д с т в и е 7. *Пусть* $\Sigma \in \{\mathfrak{R}, \mathfrak{T}\}$. *Тогда в* Σ *существует связный гиперграф, если и только если* $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, *и* $(k-1)\sum_{i=1}^{m} l_i d_i - k\sum_{i=1}^{m} l_i + k \geq 0$.

С л е д с т в и е 8. *Пусть* $a_i = l_i d_i - a_{i-1}$, $i = 2, \ldots, m-1$, $a_m = 0$, $a_1 = l_1 d_1$, $m \geq 2$. *Тогда* $\mathfrak{U}$ *содержит связный* (μ, q)*-дифферентный* r*-граф, если и только если* $a_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, m-1$, *и выполняются следующие неравенства:* $\sum_{i=1}^{n} (a_i - l_i) \geq \mathrm{sign}(m-n) - 1$, $n = 1, 2, \ldots, m$.

Summary

The common combinatorial nature of existence theorems and constructive techniques concerning hypergraphs with prescribed parameters is disclosed. This approach is applied to unified solution of three open problems of constructing connected hypergraphs with given degree sequences.

Литература

1. A c h u z a n N. // Lect. Notes Math. 1981. Vol. 885. P. 153—164.
2. A c h a r y a B., V a r t a k M. // Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilm. 1977. Vol. 23, N 6. P. 33—60.
3. Ч е р н я к Ж. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1982. № 3. С. 43—47.
4. C h e r n y a k A. A., C h e r n y a k Z. A. // Proc. 33 Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau «Graphen und Netwerke». 1988. P. 171—174.
5. M a j c h e r Z. Graphic matrices. Bratislava, 1986. (Preprint/Bratisl. Univ.: 1886).
6. B o o n y a s o m b a t V. // Lect. Notes Math. 1984. Vol. 1073. P. 236—247.
7. C h e r n y a k A. A. // Europ. J. Combin. 1999. Vol. 19. P. 1—11.
8. C h e r n y a k A. A., C h e r n y a k Z. A. // Discrete Math. 1997. Vol. 170. P. 237—240.

Белорусский государственный университет

Поступило 21.12.98