Доклады Академии наук БССР

1981 Том XXV № 7

УДК 519.1

Ж. А. ЧЕРНЯК, А. А. ЧЕРНЯК

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СТЕПЕНЕЙ РЕБЕР И ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

(Представлено академиком АН БССР Д. А. Супруненко)

В этой статье рассматриваются обыкновенные графы, мультиграфы и псевдографы без изолированных вершин. Все неопределяемые здесь понятия можно найти в [7].

Степень ребра — это неупорядоченная пара натуральных чисел, являющихся степенями концевых вершин этого ребра. Последовательность степеней ребер графа есть список степеней всех его ребер. (Последовательности, различающиеся лишь порядком членов, мы считаем равными.)

Последовательность неупорядоченных пар натуральных чисел

$$(\alpha_1,\ \beta_1),\ \ldots,\ (\alpha_q,\ \beta_q) \tag{1}$$

называется графической (мультиграфической, псевдографической), если она является последовательностью степеней ребер некоторого обыкновенного графа (мультиграфа, псевдографа), называемого графической (мультиграфической, псевдографической) реализацией этой последовательности.

Вопрос о соотношении структуры графа и его последовательностей имеет несколько аспектов в зависимости от того, какая последовательность графа положена в основу изучения. Подобный вопрос достаточно глубоко изучен для последовательностей неотрицательных целых чисел, реализуемых степенями вершин некоторого графа [2, 3]. Новый аспект этой проблемы предлагается в работах [1, 2] в связи с последовательностями пар натуральных чисел, реализуемых в качестве последовательностей степеней ребер. В [1] получены необходимые и достаточные условия, при которых последовательность пар натуральных чисел имеет псевдографическую, мультиграфическую или графическую реализацию. Там же предлагается несколько основных направлений для дальнейшего исследования, в число которых входит характеризация последовательностей пар, имеющих единственную реализацию.

В настоящей работе полностью охарактеризованы графические (мультиграфические, псевдографические) последовательности пар натуральных чисел, имеющие единственную графическую (мультиграфическую, псевдографическую) реализацию. Получены необходимые и достаточные условия, при которых данная последовательность пар имеет графическую реализацию, содержащую k-фактор. Приведена теорема, показывающая, что любая графическая (мультиграфическая, псевдографическая) реализация последовательности пар получается из любой известной графической (мультиграфической, псевдографической) реализации посредством применения δ-замен (m-замен, p-замен). (Аналогичные результаты о способе получения всех реализаций степенной последовательности приведены в ([4–6]).)

Отметим, что графическая последовательность пар натуральных чисел несет больше информации о структуре графа, нежели степенная последовательность, так как по первой из упомянутых последовательностей вторая всегда определяется однозначно, но не наоборот.

Пусть V — множество вершин графа G, $|V|=p$. Для $a, b \in V$ будем писать $a \sim b$, если a и b смежны, $a \nsim b$ — в противном случае, $\deg a$ — степень вершины a.

Если G — обыкновенный граф, a, b, c, d — различные вершины из V, $\deg a = \deg b$, $a \sim c$, $b \sim d$, $a \nsim d$, $b \nsim c$, то будем говорить, что G допускает δ-замену $t=(abcd)$. Если G — мультиграф, a, b, c, d — различные вершины, $\deg a = \deg b$, $a \sim c$, $b \sim d$, то скажем, что G допускает m-замену $t=(abcd)$. Если G — псевдограф, a, b, c, d — вершины G (не обязательно различные), $\deg a = \deg b$, $a \neq b$, $c \neq d$, $a \sim c$, $b \sim d$, то будем говорить, что G допускает p-замену $t=(abcd)$. В любом из этих случаев граф $t*G$ имеет то же множество вершин V и получается из G в результате замены пары ребер ac, bd парой ad, bc.

Теорема 1. *Два обыкновенных графа (мультиграфа, псевдографа) G_1, G_2 имеют одинаковые последовательности степеней ребер, если и только если существует множество δ-замен (m-замен, p-замен) $t_1, \ldots, t_n$ таких, что G_1 изоморфен $t_1 * \ldots * t_n * G_2$.*

Пусть $D=\{d_1, \ldots, d_n\}$ — множество различных членов последовательности $R_1 = \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_q, \beta_q$, $n(s)$ — количество появлений числа s в R_1; $k(r, s)$ — количество появлений неупорядоченной пары (r, s) в (1); $l_i = n(d_i)/d_i$. Если (1) — графическая (мультиграфическая, псевдографическая), то она однозначно определяет степенное множество D, степенную S и частотную F последовательности своей реализации G:

$$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}, \tag{2}$$

$$S = d_1^{l_1}, d_2^{l_2}, \ldots, d_n^{l_n}, \tag{3}$$

$$F = l_1, l_2, \ldots, l_n, \tag{4}$$

где l_i — число вершин степени d_i графа G.

Перепишем последовательность (1) в виде

$$R = \{(d_i, d_j)^{k(d_i, d_j)}\}_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}. \tag{5}$$

Пусть G — обыкновенный граф. Обозначим: $\bar{G}$ — граф, дополнительный к G, $\bar{R}$ — последовательность степеней ребер графа $\bar{G}$, $\bar{S}$ — степенная последовательность $\bar{G}$. $\bar{R}$ состоит из элементов вида

$$((p-1-d_i), (p-1-d_j))^{l_i l_j - k(d_i, d_j)}, \text{ если } i \neq j,$$

или

$$((p-1-d_i), (p-1-d_i))^{l_i(l_i-1)/2 - k(d_i, d_i)}, \text{ если } i = j.$$

Пусть k_{ij} равно либо $k(d_i, d_j)$, либо $k(p-1-d_i, p-1-d_j)$ в зависимости от того, о какой из последовательностей R или $\bar{R}$ идет речь в теореме 2. Число k_{ij} назовем полным, если $k_{ij} = l_i l_j$ или 0. Число k_{ii} назовем полным, если $k_{ii} = \dfrac{l_i\,(l_i-1)}{2}$ или 0.

$$\sum_{j \in J} k_{tj} = l_t, \tag{6}$$

где J — множество всех индексов, для которых k_{tj} неполные, причем если $t \in J$, то t входит в J два раза.

Теорема 2. *Графическая последовательность (5) имеет единственную графическую реализацию, если и только если для каждого фиксиро-*

ванного $r \in \{1, \ldots, n\}$, для которого $l_r \geqslant 2$, хотя бы одна из последовательностей R, $\bar{R}$ удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий (r, s, t — различные):

1) k_{rj} — полные при всех $j \neq r$, $l_r = 2k_{rr}$;
2) k_{rj} — полные при всех $j \neq r$, $l_r = k_{rr} = 5$;
3) k_{rj} — полные при всех $j \neq r, t$, $l_r = 2k_{rr} - 1$, $l_r \geqslant 5$, $k_{rt} = l_r \cdot l_t - 1$;
4) k_{rj} — полные при всех $j \neq t, s$, k_{tj} — полные при всех $j \neq r$, $k_{rt} = l_r + 1$, $l_t \geqslant 3$, $l_t < k_{rt}$, $k_{rs} = l_r \cdot l_s - 1$;
5) k_{rj} — полные при всех $j \neq s, t$, верно (6) и выполняется хотя бы одно из следующих условий: $k_{rs} \leqslant 1$, $k_{rs} \geqslant l_r \cdot l_s - 1$, $l_s = 1$;
6) k_{rj} — полные при всех $j \neq t$, k_{tj} — полные при всех $j \neq r, s$, $k_{rt} = l_t + 1$, $3 \leqslant l_r < k_{rt}$, $k_{ts} = l_t \cdot l_s - 1$;
7) k_{rj} — полные при всех $j \neq s, t$, $k_{rt} = 1$, $k_{rs} = l_r \cdot l_s - 1$;
8) k_{rj} — полные при всех $j \neq r, t$, $l_r = 4$, $k_{rr} = 3$, $l_t = 1$;
9) k_{rj} — полные при всех $j \neq r, t$, верно (6), k_{rr} равно $l_r(l_r - 1)/2 - 1$ или равно 1, $k_{rt} > l_r \geqslant 3$;
10) k_{rj} — полные при всех j;
11) k_{rj} — полные при всех $j \neq t, r, s$, $k_{rr} = \dfrac{l_r(l_r - 1)}{2}$, $l_r \geqslant 3$ и либо $k_{rt} + k_{rs} = 2$, либо $k_{rs} = l_s \cdot l_r$, $k_{rt} = 2$;
12) $\sum\limits_{j \in J} k_{rj} = lrj$, где J — множество всех индексов, для которых k_{rj} неполные, причем если $r \in J$, то r входит в J два раза.

Теорема 3. *Пусть R_i, $i = 1, 2$, — графические последовательности пар со степенными множествами $D_i = \{d_1^i, \ldots, d_n^i\}$ и равными частотными последовательностями. Тогда существует графическая реализация последовательности R_1, содержащая в качестве подграфа некоторую графическую реализацию последовательности R_2, если и только если элементы множеств D_i, $i = 1, 2$, можно перенумеровать так, чтобы*

$$\frac{n(d_j^1)}{d_j^1} = \frac{n(d_j^2)}{d_j^2} \text{ и } k(d_i^1, d_j^1) \geqslant k(d_i^2, d_j^2),\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.$$

Пусть F — граф с множеством вершин $v_1, \ldots, v_n$ и множеством ребер $v_i v_j$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Теорема 4. *Пусть (5) — графическая последовательность пар со степенным множеством (2) и частотной последовательностью (4). Тогда существует графическая реализация последовательности (5), содержащая k-фактор ($k \leqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$), если и только если система уравнений*

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ E & E \end{bmatrix} \cdot x = c$$

имеет решение в неотрицательных целых числах, где $k_{ij} = k(d_i, d_j)$,

$$c^T = ((d_1 - k)\, l_1, \ \ldots, \ (d_n - k)\, l_n, \ k_{11}, \ k_{12}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ k_{1n}, \ k_{22}, \ \ldots, \ k_{2n}, \ \ldots, \ k_{n-1,n}, \ k_{nn}),$$

E — тождественная матрица порядка $n(n+1)/2$, B — матрица инциденций графа F, ребра $v_i v_j$ которого упорядочены в соответствии с порядком элементов k_{ij} в векторе c (петле $v_i v_i$ в матрице B соответствует столбец из нулей и двойки в i-й позиции).

Положим $k_{ij} = k(d_i, d_j)$.

Теорема 5. *Псевдографическая последовательность (5) имеет единственную псевдографическую реализацию, если и только если для каждого фиксированного $r \in \{1, \ldots, n\}$, для которого $l_r \geqslant 2$, она удовлетворяет хотя бы одному из условий 1)—4) (r, t, s — различные):*

1) $d_r = 1$;
2) $k_{rj} = 0$ для всех $j \neq t, s$, $l_t = 1$, $k_{rs} = 1$, $k_{rt} \geqslant 3$;

3) $k_{rj}=0$ *для всех* $j\neq t,\ s,\ k_{rt}\leqslant 1,\ d_s=1,\ k_{rs}\neq 0$;

4) $k_{rj}=0$ *для всех* $j\neq t,\ l_t=1,\ k_{rt}\neq 0$.

Теорема 6. *Мультиграфическая последовательность (5) имеет единственную мультиграфическую реализацию, если и только если для каждого фиксированного* $r\in\{1, \ldots, n\}$, *для которого* $l_r\geqslant 2$, *она удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий (r, s, t — различные):*

1) $d_r=1$;

2) $k_{rj}=0$ *для всех* $j\neq r,\ s,\ t$, *причем если* $l_r\geqslant 2$, *то также* $k_{rr}=0$; $l_t=1,\ k_{rs}=1,\ k_{rt}\geqslant 3$;

3) $k_{rj}=0$ *для всех* $j\neq r,\ s,\ l_r>2,\ k_{rr}=1,\ k_{rs}>l_r,\ d_s=1$;

4) $k_{rj}=0$ *для всех* $j\neq r,\ t,\ s$, *причем если* $l_r>2$, *то также* $k_{rr}=0$; $d_s=1,\ k_{rt}\leqslant 1,\ k_{rs}>l_r$;

5) $l_r=2,\ \sum_{j\neq r} k_{rj}\leqslant 2$;

6) $k_{rj}=0$ *для всех* $j\neq r,\ s,\ l_s=1$, *причем если* $l_r>2$, *то также* $k_{rr}\leqslant 1$;

7) $k_{rj}=0$ *для всех* $j\neq r,\ s,\ l_r=3,\ k_{rs}\leqslant 1,\ k_{rr}\geqslant 2$.

Замечание. Если рассматривать графы с изолированными вершинами, то последовательность степеней ребер неоднозначно определяет степенную последовательность своей реализации (так как число изолированных вершин остается неопределенным). Однако теоремы 1—6 сохраняют свою силу и в этом случае, если наряду с последовательностью степеней ребер задавать количество изолированных вершин.

Summary

The whole characterization of graphic (multigraphic, pseudographic) integer-pair sequences, having a unique graphic (multigraphic, pseudographic) realization, is given.

The theorem, showing that any graphic (multigraphic, pseudographic) realization of a given integer-pair sequence may be obtained from any known graphic (multigraphic, pseudographic) realization of this integer-pair sequence by means of δ-interchanges (*m*-interchanges, *p*-interchanges) is presented.

The sufficient and necessary conditions, under which a given graphic integer-pair sequence has a realization, containing a *k*-factor, are obtained.

Литература

[1] Patrinos A. N., Hakimi S. L. Discrete Math., 1976, vol. 15, p. 347—358. [2] Hakimi S. L., Schmeichel E. F. Lecture Notes in Math., 1978, vol. 642, p. 225—235. [3] Тышкевич Р. И. ДАН БССР, 1980, т. 24, № 8, с. 677—679. [4] Fulkerson D. R., Hoffman A. J., McAndrew M. H. Canad. J. Math., 1965, vol. 17, p. 166—177. [5] Hakimi S. L. J. Soc. Ind. Appl. Math., 1963, vol. 11(1), p. 135—147. [6] Eggleton R. B., Holton D. A. Lecture Notes in Math., 1979, vol. 748, p. 1—10. [7] Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с.

Белорусский государственный институт народного хозяйства им. В. В. Куйбышева,
Институт проблем надежности и долговечности машин АН БССР

Поступило 07.01.81