have considered the situation where the order of g is not devided by p). Let $\deg(g)$ be the degree of the minimal polynomial of g. Element g with $g^p=1$ and $\deg(g)<p$ are completely described. In particular, $\deg(g)<p$ implies $\deg(g)=(p+1)/2$.

Литература

1. Супруненко Д. А.—Ученые записки Белорус. ун-та, 1951, т. 12, с. 74—112.
2. Супруненко Д. А. Разрешимые и нильпотентные линейные группы.—Мн.: Изд-во Белорус. ун-та, 1958.—94 с.
3. Hall P., Higman G.— Proc. London Math. Soc., 1956, vol. 7, p. 1—42 (русск. пер.: сб. «Математика», 1969, т. 13, № 2, с. 64—104).
4. Berger T. R.— Proc. Amer. Math. Soc., 1973, vol. 37, N 2, p. 317—325.
5. Ward H. W.— J. Algebra, 1972, vol. 20, N 1, p. 182—195.
6. Isaaks I. M.— Amer. J. Math., 1973, vol. 95, N 3, p. 594—635.
7. Супруненко Д. А. —Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, т. 148, с. 225—232.
8. Платонов В. П. — Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1975, № 5, с. 96—97.
9. Супруненко Д. А. Группы матриц.— М.: Наука, 1972.—351 с.
10. Залесский А. Е., Конюх В. С. — Матем. сб., 1976, т. 101 (143), № 2 (10), с. 231—251.
11. Спрингер Т. А.— В кн.: Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973, с. 118—161.
12. Ленг С. Алгебра.— М.: Мир, 1968.— 564 с.
13. Артин Э. Геометрическая алгебра.— М.: Наука, 1969.—283 с.

Институт математики
АН БССР

Поступила в редакцию
26.04.85

УДК 519.1

Р. И. ТЫШКЕВИЧ, А. А. ЧЕРНЯК

АЛГОРИТМЫ КАНОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАФА И РАСПОЗНАВАНИЯ ПОЛЯРНОСТИ

§ 1. Введение. Все рассматриваемые здесь графы конечные, неориентированные, без петель и кратных ребер.

В [6] введено понятие «полярный граф». Если для множества VG вершин графа G существует такое разбиение $VG=A\cup B$, что все связные компоненты индуцированного графа $G(B)$ и дополнительного $\overline{G(A)}$ являются полными графами, то G называется полярным графом, а указанное разбиение — полярным разбиением. A называется верхней долей графа G, B — его нижней долей; одна из них может быть пустой.

Все графы, порядки которых меньше семи, полярны; на рис. 1 изображен минимальный неполярный граф.

Полярное разбиение не определяется графом однозначно и полярные графы естественно рассматривать вместе с фиксированными верхней и нижней долями. Триада (G, A, B), где G, A, B — такие, как выше, также называется полярным графом.

Пусть α и β — целые положительные числа. Скажем, что $(G, A, B)\in(\alpha, \beta)$, если порядки связных компонентов графов $\overline{G(A)}$ и $G(B)$ не превышают α и β соответственно. Будем говорить также, что $G\in(\alpha, \beta)$, если существует такое полярное разбиение $VG=A\cup B$, что $(G, A, B)\in(\alpha, \beta)$ [6].

Класс (1,1) под другим названием введен ранее в [9] (расщепляемые графы) и независимо в [5] (полярные графы).

Пусть (G, A, B) и (H, C, D) — полярные графы, $f: G\to H$ — изоморфизм графов; f называется полярным изоморфизмом, если $f(A)=C$. Ниже полярные графы с фиксированными полярными разбиениями различаются до полярного изоморфизма, обыкновенные графы — до изоморфизма графов.

В [6] определена композиция $\circ$. Обозначив **P** и **Q** множества полярных (триад) и обыкновенных графов соответственно, определим композицию $\circ$: $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ следующим условием: если $(G, A, B)\in\mathbf{P}$, $H\in\mathbf{Q}$ и $VG\cap VH=\varnothing$, то

$$(G,\ A,\ B)\circ H = G\cup H\cup K_{A,VH}.$$

Здесь $\cup$ — знак объединения графов, $K_{A,VH}$ — полный двудольный граф с долями A и VH. Если при этом H полярный и $(H, C, D)\in\mathbf{P}$, то $(G, A, B)\circ H$ также оказывается полярным с верхней долей $A\cup C$, нижней $B\cup D$. В этой ситуации положим

$$(G,\ A,\ B)\mathring{\circ}(H,\ C,\ D) = ((G,\ A,\ B)\circ H,\quad A\cup C,\ B\cup D).$$

Композиция $\circ$ ассоциативна.

Граф G называется разложимым (неразложимым) на уровне (α, β), если его можно (нельзя) представить в виде композиции $G=(H, A, B)\circ$

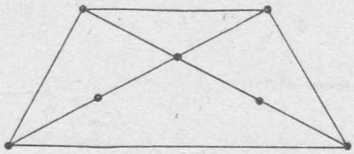


Рис. 1

$\circ F$, где $(H, A, B)\in(\alpha, \beta)$. Если к тому же G полярный, $(G, C, D)\in(\alpha, \beta)$ и $F\in(\alpha, \beta)$, то (G, A, B) разложим (неразложим) в классе (α, β).

Граф, неразложимый на уровне (α, β), может оказаться разложимым на более высоком уровне (γ, δ) $(\alpha\leqslant\gamma, \beta\leqslant\delta$ и какое-либо из этих неравенств строгое), но если (G, A, B) неразложим в классе (α, β), то он неразложим и в любом более высоком классе.

В [6] на множестве $\mathbf{P}$ определено отношение эквивалентности и доказана следующая

Теорема декомпозиции. *Любой граф (G, A, B) из класса (α, β) представляется в виде композиции*

$$(G,\ A,\ B) = (X_1,\ A_1,\ B_1)\circ\cdots\circ(X_m,\ A_m,\ B_m) \tag{1}$$

неразложимых в этом классе компонент. Любой граф G, не принадлежащий классу (α, β) и разложимый на уровне (α, β), представляется в виде композиции

$$G = (X_1,\ A_1,\ B_1)\circ\cdots\circ(X_m,\ A_m,\ B_m)\circ H, \tag{2}$$

где (X_i, A_i, B_i) неразложимы в классе (α, β), H неразложим на уровне (α, β). Эти представления единственны с точностью до перестановок стоящих рядом эквивалентных компонент (X_i, A_i, B_i).

Представления (1) и (2) называются каноническими разложениями.

Для уровня (1,1) эта теорема получена ранее в [3].

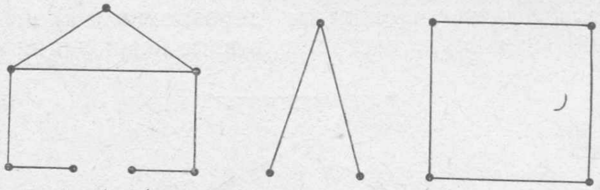
Теорема декомпозиции позволяет сводить решение многих важных задач на графах к неразложимому случаю. Для этого нужно только, чтобы рассматриваемые свойства графов были наследственны относительно композиции $\circ$ или подвергались легко обозримым изменениям. С ее помощью можно, в частности, решать классификационные задачи. Например, на основе декомпозиции на уровне (1,1) получены полное описание и перечисление униграфов [5], каталог планарных униграфов [7], характеризация гамильтоновых униграфов [8], классификация матроидальных и матрогенных графов [11]. С помощью декомпозиции на уровне (2,1) получена классификация доминантно-пороговых графов [6].

Класс полярных графов достаточно широк и содержит некоторые важные известные классы графов (расщепляемые, двудольные, пороговые).

Условия принадлежности графа классу (1,1) формулируются в минах степеней его вершин и проверяются за линейное относительно рядка графа время; за это же время строятся полярное разбиени каноническое разложение на уровне (1,1) [4, 10]. Для более выс уровней (α, β) эти задачи сложнее. В частности, здесь недостат списков степеней вершин. Например, два графа G и H, изображен на рис. 2, имеют один и тот же список степеней вершин (3, 3, 2, 2, 2, 1 $G \in (1, 2)$, $H \notin (1, 2)$.

В алгоритмическом плане из сказанного выше вытекают следую две задачи.

1. Построение канонического разложения графа.



$G \in (1,2)$ $H \notin (1,2)$

Рис. 2

2. Распознавание полярности и построение соответствующего п ного разбиения.

Естественно формулируются следующие варианты первой задач

1.1. Каноническое разложение на фиксированном уровне (α, β).

1.2. Каноническое разложение на уровне (α, ∞) $((\infty, \beta))$. З α (β) фиксируется, а от компонент разложения требуется неразл мость на каждом уровне (α, β), $\beta = 1, 2, \ldots$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$.

1.3. Каноническое разложение на уровне (∞, ∞), где требу чтобы компоненты были абсолютно неразложимы, т. е. неразложим любом уровне.

Вторая задача имеет те же варианты.

Заметим, что

$$(\beta, \alpha) = \overline{(\alpha, \beta)} = \{(\overline{G}, B, A) : (G, A, B) \in (\alpha, \beta)\},$$

В § 2 этой статьи все три варианта задачи 1 решаются с време сложностью $O(n^4)$, где n — порядок графа. В § 3 решается задача 2 класса $(1, \beta)$, $1 \leqslant \beta \leqslant \infty$ (и, следовательно, $(\beta, 1)$), время тестирова $O(n^3)$. В § 4 доказано, что задача распознавания класса (∞, β) (и, довательно, (β, ∞)), где β фиксировано, $\beta > 1$, является NP-полной. путно получается следующее утверждение. Скажем, что граф G при лежит классу C, если существует такое разбиение $VG = A \cup B$, $G(A)$ — пустой граф, $G(B)$ — паросочетание (возможны изолиров ные вершины). Проблема распознавания $G \in C$ является NP-полной. Л бопытно сопоставить это утверждение с тем фактом, что двудольнос графа распознается эффективно.

Для фиксированного уровня (α, β) задача 2 решается в [2] за пол номиальное время $O(n^{2(\alpha+\beta)+3})$.

Обозначения, терминалогия. VG — множество вершин графа G. $N_H(v)$- окружение вершины v в подграфе H,

$$|N_H(v)| = \deg_H v, \quad N_H[v] = N_H(v) \cup \{v\}.$$

Для $U \subseteq VG$ $G(U)$ — индуцированный подграф, $G - U = G(VG \setminus U)$. Дл $v \in VG$ $\mathrm{com}_G(v)$ — число связных компонент графа $G - N_G[v]$.

Для $u, v \in VG$ $u \sim v$ $(u \nsim v)$ означает, что вершины u и v смежны (не смежны); $v \sim U$ ($v \nsim U$) означает, что v смежна (несмежна) с каждой вершиной из множества U.

Порядок графа — число его вершин. $K(A)$ — полный граф с множеством вершин A, K_n — полный граф порядка n, $\mathbf{K}_\beta$ — класс графов, все связные компоненты которых суть K_n с $n \leqslant \beta$. Вершина v называется β-вершиной, если

$$G - N_G[v] \in \mathbf{K}_\beta,$$

$\overline{G}$ — дополнительный граф. $G(X, Y)$ — двудольный граф G с фиксированным разбиением $VG = X \cup Y$ на доли (независимые множества вершин).

§ 2. Каноническое разложение графа на уровне (α, β), $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \infty$.

1. Отщепление неразложимой компоненты.

Здесь приведен алгоритм, который либо доказывает неразложимость графа G на уровне (α, β), либо представляет G в виде композиции

$$G = (F, A, B) \circ H, \tag{3}$$

где $(F, A, B) \in (\alpha, \beta)$, H неразложим на уровне (α, β), $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \infty$. Точнее, алгоритм строит компоненту H разложения (3), после чего A и B определяются просто.

Здесь и всюду ниже графы задаются своими структурами смежностей.

Вначале пусть G имеет вид (3), H неразложим на уровне (α, β) и $|VH| > 1$.

Если $v \in B$ и $v \sim A$, то $G - N_G[v] \cong H$ и H есть объединение всех связных компонент графа $G - N_G[v]$, не входящих в $\mathbf{K}_\beta$.

Аналогично если $v \in A$ и $v \nsim B$, то $\overline{H}$ есть объединение всех связных компонент графа $\overline{G} - N_{\overline{G}}[v]$, не входящих в $\mathbf{K}_\alpha$.

Пусть теперь нет таких $a \in A$, $b \in B$, что $a \nsim B$, $b \sim A$. Обозначим r и k число связных компонент графов $\overline{G(A)}$ и $G(B)$ соответственно. Если $v \in VH$, то $G - N_G[v] \supset G(B)$—строгое включение, поэтому $\mathrm{com}_G(v) > k$. Аналогично $\mathrm{com}_{\overline{G}}(v) > r$.

Если же $v \in B$, то $A \setminus N_A(v) \neq \varnothing$, $(A \setminus N_A(v)) \sim VH$, $G(VH \cup (A \setminus N_A(v)))$ связен, $\mathrm{com}_G(v) \leqslant k$.

Аналогично при $v \in A$ $\mathrm{com}_{\overline{G}}(v) \leqslant r$.

Из предыдущего вытекает корректность следующего

Алгоритма.

Шаг 1. Для каждой вершины v графа G проверить условия $\overline{G}(N_G(v)) \in \mathbf{K}_\alpha$, $G(N_{\overline{G}}(v)) \in \mathbf{K}_\beta$. Если для какой-либо v оба эти условия выполняются, то STOP: $H = G(v)$. Иначе перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить $i = 0$, $VG = \{v_1, \ldots, v_{|VG|}\}$. Перейти к шагу 3.

Шаг 3. Положить $i = i + 1$. Если $i \leqslant |VG|$, то перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 8.

Шаг 4. Найти подграф H графа G—объединение связных компонент графа $G - N_G[v_i]$, не входящих в $\mathbf{K}_\beta$; для некоторой вершины $w \in VH$ найти $Z = N_G(w) \setminus VH$. Перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить условия

$$\overline{G}(Z) \in \mathbf{K}_\alpha, \; G(VG \setminus (Z \cup VH)) \in \mathbf{K}_\beta.$$

Если оба они выполняются, то положить $G = H$ и перейти к шагу 2. Иначе перейти к шагу 6.

Шаг 6. Найти подграф H графа $\overline{G}$ — объединение связных компонент графа $\overline{G} - N_{\overline{G}}[v_i]$, не входящих в $\mathbf{K}_\alpha$; для некоторой вершины $w \in VH$ найти $Z = N_{\overline{G}}(w) \setminus VH$. Перейти к шагу 7.

Шаг 7. Проверить условия

$$G(Z) \in \mathbf{K}_{\beta}, \ \overline{G}(VG \setminus (Z \cup VH)) \in \mathbf{K}_{\alpha}.$$

Если оба они выполняются, то положить $G = \overline{H}$ и перейти к шагу
Иначе перейти к шагу 3.

Шаг 8. Определить

$$\mathrm{com}_G(v_i), \ \mathrm{com}_{\overline{G}}(v_i), \ i = \overline{1, |VG|}.$$

Положить $j = |VG|$, Перейти к шагу 9.

Шаг 9. Положить $j = j - 1$. Если $j = 0$, то STOP : G неразложи
Иначе перейти к шагу 10.

Шаг 10. Положить $i = |VG|$. Перейти к шагу 11.

Шаг 11. Положить $i = i - 1$. Если $i = 0$, то перейти к шагу 9. Ина
перейти к шагу 12.

Шаг 12. Определить множество W всех таких вершин $v \in VG$, что

$$\mathrm{com}_G(v) \geqslant i, \quad \mathrm{com}_{\overline{G}}(v) \geqslant j.$$

Если $W = \varnothing$, перейти к шагу 11. Иначе для некоторой вершины $w \in$
определить множества

$$C = N_G(w) \setminus W, \ \ D = VG \setminus (C \cup W).$$

Перейти к шагу 13.

Шаг 13. Проверить условия

$$\overline{G}(C) \in \mathbf{K}_{\alpha}, \ G(D) \in \mathbf{K}_{\beta}.$$

Если оба они выполняются, то STOP: $H = G(W)$. Иначе перейти к шагу 1

Временная сложность алгоритма $O(|VG|^4)$.

2. Построение канонического разложения полярного графа с фикс
рованным полярным разбиением. Пусть $(G, A, B) \in (\alpha, \beta)$. Удалив из
все ребра, оба конца которых принадлежат B, и присоединив все недо
стающие ребра полного графа $K(A)$, получим $(H, A, B) \in (1, 1)$. В клас
се $(1, 1)$ каноническое разложение строится за линейное относительн
порядка графа время [4]. Пусть

$$(H, A, B) = (X_1, A_1, B_1) \circ \ldots \circ (X_k, A_k, B_k)$$

— каноническое разложение. На множестве индексов $I = \{1, \ldots, k\}$ опре
делим бинарное отношение R, положив iRj, если и только если выполня
ется какое-либо из следующих двух условий:

1) существует пара вершин $u \in A_i$, $v \in A_j$, которые не смежны в G;
2) существует пара вершин $u \in B_i$, $v \in B_j$, которые смежны в G.

Пусть S — эквивалентное замыкание отношения R. Объединив
один класс все A_i (B_i), индексы которых сравнимы по модулю S, полу
чим новые разбиения

$$A = C_1 \cup \ldots \cup C_l, \quad B = D_1 \cup \ldots \cup D_l.$$

Если $Y_i = G(C_i \cup D_i)$, то, очевидно,

$$(G, A, B) = (Y_1, C_1, D_1) \circ \ldots \circ (Y_l, C_l, D_l)$$

—каноническое разложение.

Для графов без изолированных вершин описанный алгоритм требует
$O(m)$ операций, где m — число ребер.

**§ 3. Распознавание класса $(1, \beta)$, $1 \leqslant \beta \leqslant \infty$, и построение соответст-
вующего полярного разбиения.**
Пусть $(G, A, B) \in (1, \beta)$, причем $|A|$ максимальна среди возможных, $B =$
$= \bigcup_{i=1}^{h} B_i$—разбиение на множества вершин связных компонент графа $G(B)$.
Любая вершина из A является β-вершиной.

Пусть далее β-вершины есть и в B и пусть среди них v—вершина максимальной степени, $v \in B_k$, $Z = N_G[v]$, $H = G - Z = U_{i=1}^{r} K_{C_i}$—разбиение на связные компоненты. $D = VH \cap A \neq \varnothing$, причем клики C_i можно так занумеровать, что либо

$$r = k,\ C_k = D,\ C_i = B_i,\quad i = \overline{1, k-1},$$

либо

$$r = k-1,\ C_{k-1} = B_{k-1} \cup D,\ C_i = B_i,\quad i = \overline{1, k-2}.$$

Обозначим $W_1 = Z \cap A$, $W_2 = (Z \cap B) \setminus \{v\}$. Очевидно, $\bar{G}(Z)$—двудольный граф. Пусть F—одна из его связных компонент и пусть вначале $VF = \{w\}$. При $w \in W_1$ имеем $\deg_H w > 0$, при $w \in W_2$ $\deg_H w \leqslant \deg_H v = 0$.

Пусть теперь $|VF| > 1$. Тогда однозначно определено разбиение $VF = X \cup Y$ на доли. Если $X \subseteq W_1$, $Y \subseteq W_2$, то для $x \in X$, $y \in Y$ $\deg_H x \geqslant \deg_H y$, причем в случае равенства $N_H(x) = N_H(y) = D$.

Положим

$$W_3 = \cap_{w \in W_1} N_H(w).$$

Тогда $D \subseteq W_3$, $W_3 = \cup_{i=1}^{r} D_i$ — разбиение на множества вершин связных компонент графа $H(W_3)$. Все D_i—клики, $D_i \subseteq C_i$, $i = \overline{1, r}$ (возможно, $D_i = \varnothing$), $D \subseteq D_r \neq \varnothing$. Если для некоторой вершины $w \in W_2$ $\deg_H w \neq 0$, то

$$\varnothing \neq N_H(w) \subseteq D_r,\quad N_H(w) \cap D_i = \varnothing,\quad i = \overline{1, r-1}.$$

Пусть для всех вершин w из W_2 $\deg_H w = 0$. Очевидно,

$$(G,\ W_1 \cup D_r,\ VG \setminus (W_1 \cup D_r)) \in (1, \beta).$$

Если $|C_{k-1}| \leqslant \beta$, то

$$(G,\ W_1 \cup D_i,\ VG \setminus (W_1 \cup D_i)) \in (1, \beta),\ i = \overline{1, r}.$$

Из предыдущего вытекает следующий

Алгоритм.

Шаг 1. Определить множество W β-вершин и занумеровать их по невозрастанию степеней: $W = \{w_1, \ldots, w_s\}$. Положить

$$i = 0,\ j = 0,\ W_1 = \varnothing,\ W_2 = \varnothing.$$

Перейти к шагу 2.

Шаг 2. Проверить условия

$$G(W) = K(W),\ G(VG \setminus W) \in \mathbf{K}_\beta.$$

Если оба они выполняются, то STOP: $VG = W \cup (VG \setminus W)$—полярное разбиение. Иначе перейти к шагу 3.

Шаг 3. Положить $i = i + 1$. Если $i > s$, то STOP: $G \notin (1, \beta)$. Иначе положить $v = w_i$, определить множества Z, C_i, $i = \overline{1, r}$, перейти к шагу 4. $F_i(X_i, Y_i)$.

Шаг 4. Найти связные компоненты $F_i(X_i, Y_i)$, $i = \overline{1, t}$, графа $F = \bar{G}(Z)$. Если все они двудольные, то перейти к шагу 5, иначе перейти к шагу 3.

Шаг 5. Положить $j = j + 1$. Если $j > t$, то перейти к шагу 7, иначе перейти к шагу 6.

Шаг 6. Если $VF_j = \{w\}$, то при $\deg_H w > 0$ положить $W_1 = W_1 \cup \{w\}$, а при $\deg_H w = 0$ положить $W_2 = W_2 \cup \{w\}$. Если $|VF_j| > 1$ и $x \in X_j$, $y \in Y_j$ — некоторые вершины, то положить

$$W_1 = W_1 \cup X_j,\ W_2 = W_2 \cup Y_j$$

в следующих двух ситуациях:

$$\deg_H x > \deg_H y; \ \deg_H x = \deg_H y, \quad |X_j| \geqslant |Y_j|.$$

В остальных ситуациях положить

$$W_1 = W_1 \cup Y_j, \ W_2 = W_2 \cup X_j.$$

Перейти к шагу 5.

Шаг 7. Определить

$$W_3 = \bigcap_{w \in W_1} N_H(w).$$

Перейти к шагу 8.

Шаг 8. Определить связные компоненты K_{D_i}, $i = \overline{1, t}$, графа G (W
Если не все они клики, то перейти к шагу 3, иначе — к шагу 9.

Шаг 9. Если в W_2 нет такой вершины u, что $\deg_H u > 0$, то пере
к шагу 11. Иначе для некоторой вершины $w \in N_H(u)$ найти такое множ
ство D_i, что $w \in D_i$. Положить $W_4 = D_i$ и перейти к шагу 10.

Шаг 10. Если выполняются оба условия

$$G(W_1 \cup W_4) = K(W_1 \cup W_4), \ G(VG \setminus (W_1 \cup W_4)) \in \mathbf{K}_\beta,$$

то STOP: $VG = (W_1 \cup W_4) \cup (VG \setminus (W_1 \cup W_4))$—полярное разбиение. И
че перейти к шагу 3.

Шаг 11. Выбрать в H компоненту K_{c_i} максимального порядка, пол
жить $W_4 = D_i$ и перейти к шагу 10.

Временная сложность описанного алгоритма $O(|VG|^3)$.

§ 4. Распознавание класса (∞, β), β фиксировано, $\beta > 1$.

Теорема. *Проблема распознавания $G \in (\infty, \beta)$ является NP-по*
ной ($\beta > 1$).

Доказательство. Известна следующая *NP*-полная проблем
распознавания [1].

Заданы конечное множество U и покрытие его C трехэлементным
подмножествами:

$$C = \{c_i : i = \overline{1, m}\}, \quad c_i = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}\}, \ m > 1.$$

Существует ли такая функция $t: U \to \{0, 1\}$, что для каждого множест
c_i t принимает значение 1 точно в одной точке u_{ij_i} этого множества?

Сведем эту проблему к проблеме распознавания $G \in (\infty, \beta - 1)$, $\beta >$
Возьмем объединение m попарно непересекающихся полных графов
порядка β:

$$VH_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{i\beta}\}, \ i = \overline{1, m}.$$

Пару вершин v_{ij}, v_{kl} свяжем цепью v_{ij}, v_{ijkl}, v_{kl} длины 2, если и тольк
если $i \neq k$ и выполняется одно из следующих условий (4), (5):

$$j < 4, \ l < 4, \ u_{ij} = u_{kl}, \tag{4}$$

$$j > 3, \ l > 3. \tag{5}$$

Вершины v_{14}, v_{24} свяжем еще цепью v_{14}, v_1, v_2, v_3, v_4, v_{24} длины 5. Здес
все v_{ijkl} и v_i попарно различны и отличны от v_{rs}. Наконец, присоедини
новую вершину v_5, соединив ее ребрами с v_2 и v_3. Полученный гра
обозначим G.

Покажем теперь, что нужная функция t для заданного покрытия
существует тогда и только тогда, когда $G \in (\infty, \beta - 1)$.

В самом деле, пусть t—нужная функция. Положим $v_{ij} \in A$, если и толь
ко если $j < 4$, $t(u_{ij}) = 1$; $v_{ijkl} \in A$, если и только если $j > 3$ или $j < 4$
$l < 4$, $t(u_{ij}) = 0$; v_1, v_4, $v_5 \in A$, $VG \setminus A = B$. Теперь имеем $G(A)$—пусто
граф, $G(B) \in \mathbf{K}_{\beta-1}$, $(G, A, B) \in (\infty, \beta - 1)$.

Обратно, пусть $(G, A, B) \in (\infty; \beta - 1)$. $G(B)$ не имеет клик мощности β, поэтому для каждого $i = \overline{1, m}$ в A входит хотя бы одна из вершин v_{ij}. Если бы $G(A)$ содержал ребро какого-либо графа H_i, то в $G(A)$ был бы индуцированный подграф $K_1 \cup K_2$ на трех вершинах, что невозможно. Итак, A содержит точно по одной вершине каждого из H_i.

Пусть $v_{ij} \in A$, $j > 3$. Тогда для $k \neq i$, $l > 3$, $v_{kl} \in A$, иначе при $v_{ijkl} \in A$ $G(A)$ содержал бы индуцированный подграф $K_1 \cup K_2$, а при $v_{ijkl} \in B$ $G(B)$ содержал бы индуцированный подграф $K_{1,2}$. То и другое невозможно. Поэтому

$$\beta = 4, \ v_{14}, \ v_{24} \in A, \ v_1, \ v_4 \in B.$$

Далее если $v_2 \in A$, то v_3, $v_5 \in B$, что невозможно. Если же $v_2 \in B$, то v_3, $v_5 \in A$, что также невозможно. Итак, $v_{ij} \in A$ влечет $j < 4$.

Положив теперь

$$t(u_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_{ij} \in A, \\ 0, & \text{если } v_{ij} \in B, \end{cases}$$

получим нужную функцию t.

С л е д с т в и е. Проблема распознавания $G \in C$ (см. § 1) является NP-полной.

Summary

The notations of polar graphs of the class (α, β) and canonical decomposition at the level (α, β), where α and β are arbitrary integers, have been introduced earlier by the present authors. Here effective algorithms for constructing canonical decomposition and for recognizing graphs of the class $(1, \beta)$ and $U_\beta (1, \beta)$, $\beta = 1, 2, ...$, are given. It is also proved that the problem of recognizing the graphs from the union $U_\beta (\alpha, \beta)$, where $\alpha \geqslant 2$ is fixed, $\beta = 1, 2, ...$, is NP-complete.

Литература

1. Г э р и М., Д ж о н с о н Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М.: Мир, 1982.—416 с.
2. М е л ь н и к о в О. И., К о ж и ч П. П. — Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 1985, № 6, с.
3. Т ы ш к е в и ч Р. И. — ДАН БССР, 1980, т. 24, № 8, с. 677—679.
4. Т ы ш к е в и ч Р. И., М е л ь н и к о в О. И., К о т о в В. М.—Кибернетика, 1981, № 6, с. 5—8.
5. Т ы ш к е в и ч Р. И., Ч е р н я к А. А.— Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 1979, № 5, с. 14—26.
6. Т ы ш к е в и ч Р. И., Ч е р н я к А. А.— Кибернетика, 1985, № 2, с. 67—74.
7. Т ы ш к е в и ч Р. И., Ч е р н я к Ж. А.— ДАН БССР, 1979, т. 23, № 4, с. 307—310.
8. Ч е р н я к Ж. А. — Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 1981, № 1, с. 23—29.
9. F o l d e s S., H a m m e r P. L.— Proc. of the 8-th South-East Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, 1977, p. 311—315.
10. H a m m e r P. L., S i m e o n e B.— Combinatorica, 1981, vol. 1, N 3, p. 275—284.
11. T y s h k e v i c h R. I.— Discrete Math., 1984, vol. 51, p. 91—100.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина,
Институт проблем надежности и долговечности машин АН БССР

Поступила в редакцию 04.07.84

УДК 519.4

В. С. КОНЮХ

p-ПОДГРУППЫ СИЛОВА ПРОЕКТИВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

Строение p-подгрупп Силова полной линейной группы хорошо известно [1, 3, 5]. Однако, несмотря, казалось бы, на близкое родство групп GL(n, P) и PGL(n, P), вопрос о строении p-подгрупп Силова группы