Доклады Академии наук БССР

1984 Том XXVIII № 5

УДК 519.1

А. А. ЧЕРНЯК

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ С ПРЕДПИСАННЫМИ СТЕПЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ И ПОРЯДКОМ. УНИГРАФИЧНОСТЬ

(Представлено академиком АН БССР Д. А. Супруненко)

Все рассматриваемые в статье графы конечные неориентированные, без петель и кратных ребер. Все неопределяемые здесь понятия можно найти в ([1]).

Основными топологическими критериями живучести графов являются обхват, реберная и вершинная связность ([2]). Проблемы построения оптимальных по этим критериям графов, имеющих в качестве заданных некоторые параметры, широко изучаются в теории синтеза высоконадежных сетей связи (см., например, ([3])). Одна из таких проблем — синтез графов с максимально возможной связностью, имеющих предписанную степенную последовательность, решена в ([4, 5]). Задача синтеза графов, имеющих заданные порядок, связность, наибольшую и наименьшую степени вершин, была решена в ([6]). Много работ посвящено проблеме вычисления функции $f(r; m)$ (наименьшего порядка регулярного графа степени r и обхвата m, называемого (r, m)-клеткой ([7]). В ([8]) обобщается понятие клетки и вводится функция $f(k_1, \ldots, k_n; m)$ — наименьший порядок графа со степенным множеством $\{k_1, \ldots, k_n\}$ и обхватом m, где $k_1 \geqslant 2$. Там же вычисляются значения $f(3,4; 5)$, $f(3,4; 6)$, $f(k_1, k_2; 4)$, $f(2, k; m)$ (проблема вычисления f в общем случае уже при $n=2$, $m=5$ признана трудной).

В настоящей работе полностью решен вопрос существования и построения графов с наибольшей вершинной (реберной) связностью, имеющих предписанные степенное множество и порядок. Дана также характеризация графов, однозначно до изоморфизма определяемых этими параметрами. Развиваются основные утверждения в ([8]) о вычислении функции f обобщенной клетки. Полученные результаты используются при исследовании надежности сложных систем.

Пусть $k_1 < \ldots < k_n < p$ — положительные целые числа. Набор

$$\{k_1, \ldots, k_n \mid p\} \tag{1}$$

называется графическим, если существует граф G на p вершинах со степенным множеством $\{k_1, \ldots, k_n\}$, т. е. G — реализация набора (1). Если набор (1) имеет единственную реализацию, то он называется униграфическим. Если некоторый набор имеет вид $\{1, k_1+1, \ldots, k_n+1, k_n+2 \mid p+2\}$, то будем говорить, что он получается из (1) смещением. Положим $r = p - k_n - 1$.

Набор (1) называется исключительным, если он удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

$$k_i,\ i = \overline{1, n},\ p \text{ нечетные;} \tag{2}$$

$$k_1 = 1,\ n = 2,\ p = k_2 + 2,\ k_2 \neq 2; \tag{3}$$

$$n = k_1 = 1,\ p \neq 2; \tag{4}$$

$$n = 2,\ k_1 = 3,\ p = k_2 + 2,\ k_2 \notin \{4,\ 6\}. \tag{5}$$

Определим также следующие наборы:

$$\{1|p\},\ p \text{ четное};\ \{k_1|p\},\ pk_1 \text{ четное},\ p - k_1 \leqslant 2;\ \{2|5\};\ \{1,\ 2|4\}. \tag{6}$$

$H(V)$ — граф с множеством вершин V; $H(W)$ — подграф, порожденный W.

Л е м м а 1 [9]. *Набор (1) графический тогда и только тогда, когда он не удовлетворяет условиям (2)—(3).*

Л е м м а 2. *Пусть в (1) $n=2$, $k_1 \geqslant 3$, k_1 нечетное, k_2 четное, $p=k_1+k_2-1$. Тогда (1) имеет k_1-связную реализацию, если и только если $k_1 \geqslant 5$ или $k_1=3$, $k_2 \in \{4,6\}$. Если $k_1=3$, $k_2 \geqslant 8$, то (1) имеет 2-связную реализацию.*

Л е м м а 3. *Пусть $k_1=1$, $n \geqslant 2$. Тогда (1) имеет связную реализацию, если он отличен от исключительного.*

Л е м м а 4. *Если rk_1 четное, $k_1 \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, то набор (1) имеет k_1-связную реализацию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существует граф $H_1(V_1)$ со степенным множеством $\{k_1,\ \ldots,\ k_n\}$ и $k_n + 1$ вершинами, содержащий k_1 вершин $V_3 = \{v_1,\ \ldots,\ v_{k_1}\}$ степени k_n [10]. При $r = 0$ H_1 искомый. Пусть $r > 0$.

1) $r > k_1$. Согласно [1,5], существует регулярный k_1-связный граф $H_2(V_2)$ степени k_1 с вершинами $u_1,\ \ldots,\ u_r$, содержащий по крайней мере t попарно несмежных ребер $Y = \{u_i u_{t+i} \mid i = \overline{1,\ t}\}$, где $t = [(k_1 + 1)/2]$. Если теперь $X = \{v_i v_{i+t} \mid i = \overline{1,\ t}\}$, $Z = \{v_i u_i \mid i = \overline{1,\ 2t}\}$ (при нечетном k_1 считаем, что $v_{2t} = v_1$), то можно доказать, что граф $G = (H_1 - X) \cup (H_2 - Y) \cup Z$ является k_1-связной реализацией (1).

2) $r < k_1$. Добавим к H_1 r вершин множества V_2, положив их смежными со всеми вершинами из V_3, затем заменим подграф $H_1 \langle V_3 \rangle$ регулярным (k_1-r-1)-связным графом степени k_1-r-1 с множеством вершин V_3. Можно доказать, что полученный граф — k_1-связная реализация (1).

3) $r = k_1$. Добавим к H_1 множество вершин $V_2 = \{u_1,\ \ldots,\ u_{k_1}\}$, положив их смежными со всеми вершинами из V_3, затем исключим все ребра подграфа $H_1 \langle V_3 \rangle$, а также ребра $\{u_i v_i \mid i = \overline{1,\ k_1}\}$, добавим ребра $u_1 u_2$, $u_3 u_4$, $\ldots$, $u_{k_1-1} u_{k_1}$. Можно доказать, что полученный граф G является k_1-связной реализацией набора (1).

Л е м м а 5. *Если набор (1) отличен от исключительного, то он имеет k_1-связную реализацию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через S множество всех наборов $\{s_1, \ldots, s_m | q\}$, которые отличны от исключительного и не имеют s_1-связных реализаций. Предположим, что $S \neq \varnothing$ и (1) — набор из S наименьшей длины n. Из [5] и лемм 4, 5 следует, что $n \geqslant 2$, $k_1 \cdot r$ нечетное, $k_1 \geqslant 3$. Рассмотрим 3 случая.

1) $k_1 > r$. Можно показать, что набор

$$\{k_1 - r - 1,\ \ldots,\ k_{n-1} - r - 1 | k_n\} \tag{7}$$

может быть исключительным, только если (1) совпадает с набором $\{k_1,\ k_2 | k_1 + k_2 - 1\}$, который является либо исключительным, либо имеет k_1-связную реализацию (лемма 2). Противоречие.

Так как (7) неисключительный, то он должен иметь (k_1-r-1)-связную реализацию $H(V_1)$. Добавим к H $(r+1)$-вершинное множество V_2, положив их смежными со всеми вершинами из V_1. Полученный граф G—k_1-связная реализация (1). Противоречие.

2) $k_1 < r$. Набор

$$\{k_2,\ \ldots,\ k_n \mid k_n + r - k_1\} \tag{8}$$

отличен от исключительного. Но тогда он должен иметь k_2-связную реализацию $H_2(V_2)$, содержащую по крайней мере $t=(k_1+1)/2$ попарно несмежных ребер $Y=\{u_iu_{i+t}\mid i=\overline{1,\ t}\}$. Пусть $H_1(V_1)$ — полный граф, $V_1=\{v_1,\ \ldots,\ v_{2t}\}$, $X=\{v_iv_{i+t}\mid i=\overline{1,\ t}\}$, $Z=\{v_iu_i\mid i=\overline{1,\ 2t}\}$. Можно доказать, что $G=(H_1-X)\cup(H_2-Y)\cup Z$ — k_1-связная реализация набора (1). Противоречие.

3) $k_1=r$. Набор

$$\{k_2,\ \ldots,\ k_n\mid k_n+2\} \tag{9}$$

отличен от исключительного. Но тогда он должен иметь k_2-связную реализацию $H_2(V_2)$. Пусть $H_1(V_1)$ — полный граф, $V_1=\{v_1,\ \ldots,\ v_{k_1-1}\}$, $Y=\{wu_i\mid i=\overline{1,\ k_1-1}\}$ — набор ребер в H_2, инцидентных некоторой вершине w, $Z=\{wv_i,\ u_iv_i\mid i=\overline{1,\ k_1-1}\}$. Можно доказать, что граф $G=(H_2-Y)\cup H_1\cup Z$ является k_1-связной реализацией набора (1).

Теорема 1. *Если графический набор (1) отличен от наборов (4) и (5), то он имеет m-связную реализацию тогда и только тогда, когда $m\leqslant k_1$. Если графический набор (1) совпадает с одним из наборов (4)—(5), то он имеет m-связную реализацию тогда и только тогда, когда $m<k_1$.*

Теорема 2. *Пусть графический набор (1) отличен от (4). Тогда (1) имеет m-реберно-связную реализацию, если и только если $m\leqslant k_1$.*

Лемма 6. *Если набор (1) совпадает с одним из наборов*

$$\{k_1,\ k_2\mid k_1+k_2+3\}; \tag{10}$$

$$\{k_1,\ k_2\mid k_1+k_2+1\}; \tag{11}$$

$$\{k_1,\ k_2\mid k_1+k_2-1\}, \tag{12}$$

где k_1 нечетное, k_2 четное, $k_1\geqslant 3$, то (1) неуниграфический.

Лемма 7. *Если в наборе (1) $k_1=1$, $k_2=2$, $r=1$, $n>2$ или (1) совпадает с одним из наборов*

$$\begin{gathered}\{1,\ 4,\ 7\mid 9\};\ \{1,\ k_2,\ k_2+1\mid k_2+3\},\ k_2\geqslant 3;\\ \{1,\ k_2,\ k_2+2\mid k_2+4\},\ k_2\geqslant 4,\ k_2\ \text{четное};\\ \{1,\ 3,\ 2m\mid 2m+2\};\ \{1,\ 3,\ 2m,\ 2m+2\mid 2m+4\},\end{gathered} \tag{13}$$

где $m\geqslant 2$, то (1) неуниграфический.

Лемма 8. *Пусть $n\geqslant 2$, $r\cdot k_1$ четное, $r\neq 0$. Тогда набор (1) неуниграфический.*

Лемма 9. *Если $r\neq 0$ и графический набор (1) не совпадает с наборами в (6), то (1) неуниграфический.*

Доказательство. Обозначим через U множество всех униграфических наборов, отличных от наборов в (6). Предположим, что $U\neq\varnothing$ и (1) — набор в U наименьшей длины. Из леммы 8 и ([11]) следует, что $k_1\cdot r$ нечетное, $n\geqslant 2$. Отметим, что при этих условиях неуниграфичность хотя бы одного из наборов (7)—(9), (14) означала бы неуниграфичность набора (1).

Если $k_1>r$, то набор (7) может совпадать только с $\{1,\ 2\mid 4\}$ или $\{1\mid p\}$. Тогда (1) совпадает с (12). Если $k_1<r$, то набор (8) может совпадать только с одним из наборов (6). Но тогда (1) совпадает с (10). Если $k_1=r>0$, то набор (9) может совпадать только с $\{k_1\mid p\}$. Но тогда (1) совпадает с (11). В любом случае имеем противоречие лемме 6. Пусть теперь $k_1=r=1$. Из лемм 1, 7 следует, что $n>2$, $k_2>2$. Можно показать, что набор

$$\{k_2-2,\ \ldots,\ k_{n-1}-2\mid k_n-2\} \tag{14}$$

неграфический, только если он совпадает с (3). Но тогда (1) совпадал бы с последним набором в (13), что невозможно. Таким образом, графический набор (14) должен совпадать с одним из наборов в (6), что возможно только в случае совпадения (1) с одним из наборов в (13). Противоречие.

Лемма 10. *Если $k_1 \geqslant 3$, $n \geqslant 2$, $r=0$, то (1) неуниграфический.*

Лемма 11. *Пусть $k_1=2$, $n \geqslant 2$, $r=0$. Тогда (1) униграфический, если и только если истинно высказывание*

$$(n=2,\ k_2 \text{ нечетное}) \vee (n=3,\ k_3=k_2+1,\ k_2 \neq 3).$$

Лемма 12. *Пусть $k_1=1$, $n \geqslant 2$, $r=0$, $k_n-k_{n-1}>1$. Тогда (1) униграфический, если и только если истинно высказывание*

$$(n=2) \vee (n=3,\ k_3=k_2+2,\ k_2 \text{ четное}) \vee (n=4,$$
$$k_2=2,\ k_4=k_3+2,\ k_3 \neq 3).$$

Теорема 3. *Графический набор (1) имеет единственную реализацию тогда и только тогда, когда он совпадает с одним из наборов (6), (15) или получается из некоторого набора в (15) конечным числом смещений:*

$$\begin{gathered}
\{2,\ k_2 \mid k_2+1\},\ k_2 \text{ нечетное};\\
\{1,\ k_2 \mid k_2+1\};\\
\{2,\ k_2,\ k_2+1 \mid k_2+2\},\ k_2 \neq 3;\\
\{1,\ k_2,\ k_2+2 \mid k_2+3\},\ k_2 \text{ четное};\\
\{1,\ 2,\ k_3,\ k_3+2 \mid k_3+3\},\ k_3 \neq 3.
\end{gathered} \tag{15}$$

Теорема 4. $f(3,4;\ 8)=39$, $f(3,4;\ 7)=29$.

Теорема 5. *Для любого целого $k \geqslant 4$*

$$f(3,\ k;\ 5)=1+3k,\ f(3,\ k;\ 6)=2+4k f(3,\ k;7)=1+7k.$$

Теорема 6. *Если $m \geqslant 3$, то*

$$k_m+k_1+1 \leqslant f(k_1,\ \ldots,\ k_m;\ 4) \leqslant k_m+k_{[(m+1)/2]}.$$

Следствие 1. *Если $m \in \{3,\ 4\}$, $k_2=k_1+1$, то*

$$f(k_1,\ \ldots,\ k_m;\ 4)=k_m+k_2.$$

Summary

The problem on the existence of graphs with maximal vertex (edge) connectivity which have prescribed degree set and order is completely solved. The graphs which are uniquely defined by their degree set and order are characterized. The results of [8] on calculating $f(D;\ m)$ are extended ($f(D;\ m)$ is the least order of the graph called $(D,\ m)$-cage, with a degree set D and girth m).

Литература

[1] Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с. [2] Soi I. M., Aggarval K. K.— IEEE Trans. Reliability, 1981, R-30, N 5, p. 438—443. [3] Wilkov R.— IEEE Trans. Commun., 1972, vol. 20, p. 660—678. [4] Edmonds J.— J. Res. Nat. Bur. St., 1964, vol. 68, N 2, p. 73—74. [5] Wang D., Kleitman D.— SIAM J. Appl. Math., 1974, vol. 26, p. 313—314. [6] Boesch F. T., Suffel C. L.— Discrete Appl. Math., 1981, vol. 3, p. 9—18. [7] Wong P. K.— J. Graph Theory, 1982, vol. 6. p. 1—22. [8] Chartrand G., Gould P., Kapoor S.— Period. Math. Hung., 1981, vol. 12, N 4, p. 261—266. [9] Sipka T. A.— J. Graph Theory, 1980, vol. 4, p. 301—307. [10] Kapoor S., Polimeni A., Wall C.— Fund. Math., 1977, vol. 95, p. 189—194. [11] Johnson R. H.— Pacific J. Math., 1975, vol. 56, N 1, p. 143—158.

Институт проблем надежности
и долговечности машин
АН БССР

Поступило 10.05.83