Доклады Академии наук БССР

1985 Том XXIX № 8

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

Р. И. ТЫШКЕВИЧ, А. А. ЧЕРНЯК, Ж. А. ЧЕРНЯК

О ВЫНУЖДЕННО P-ГРАФИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

(Представлено академиком АН БССР Д. А. Супруненко)

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Последовательность

$$\pi = (d_1, \ \ldots, \ d_n) \tag{1}$$

целых чисел называется графической, если существует граф порядка n (реализация π), для которого $d_1, ..., d_n$ — степени вершин. Пусть P — абстрактное теоретико-графовое свойство. Графическая последовательность называется вынужденно P-графической, если все ее реализации обладают свойством P.

К настоящему времени описано немного вынужденно P-графических последовательностей. С. Б. Рао предложил в [8] общий подход к описанию таких последовательностей для свойств P, сохраняющихся при переходе к индуцированным подграфам. Фактическое тестирование последовательностей по критерию Рао требует знания множества индуцированных подграфов, запрещаемых свойством P, и громоздко, даже если последнее множество известно.

Пусть $G(P)$ — множество графов со свойством P. Назовем P наследственным, если выполняются следующие два условия.

1. Если $G \in G(P)$, H — индуцированный подграф в G, то $H \in G(P)$.
2. Если $F, G \in G(P)$, (F, A, B) — полярный (в смысле [1]) граф, то и композиция $(F, A, B) \circ G$ (в смысле [1]) также принадлежит $G(P)$.

Здесь предлагается метод характеризации вынужденно P-графических последовательностей для наследственных свойств P, основанный на теории декомпозиции [1, 2]. В частности, приводятся характеризации вынужденно P-графических последовательностей в тех случаях, когда P есть одно из следующих свойств:

1) быть хордальным графом [7];
2) быть сильно хордальным графом [3];
3) быть интервальным графом [7];
4) быть транзитивно ориентируемым графом [4];
5) быть тривиально совершенным графом [6].

Заметим, что этими свойствами выделяются основные известные подклассы класса совершенных графов. Временная сложность тестирования равна соответственно

$$O(n), \ O(kl^5)(\leqslant O(n^5)), \ O(kl^5), \ O(kl^5), \ O(n),$$

где n — длина тестируемой последовательности, k — число компонент в ее каноническом разложении [1], l — максимум длин этих компонент. При тестировании по критерию Рао в этих случаях потребовалось бы соответственно $O(n^9)$, $O(n^{11})$, $O(n^{10})$, $O(n^{11})$, $O(n^7)$ элементарных операций.

Вынужденно P-графическая последовательность, где P — одно из свойств 1) — 5), ниже называется вынужденно хордальной, вынужденно сильно хордальной и т. д.

Лемма 1. *Пусть P — наследственное свойство. Графическая последовательность является вынужденно P-графической, если и только если таковы все ее неразложимые [1] компоненты.*

С помощью этой леммы задача характеризации вынужденно P-графических последовательностей для любого наследственного свойства P сводится за линейное время к неразложимому случаю.

Лемма 2. *Каждое из указанных выше свойств 1) — 5) является наследственным.*

Теорема 1. *Для невозрастающей неразложимой неполярной графической последовательности (1) следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *π является вынужденно хордальной;*

2) *либо $d_4 = 1$, либо при $d_4 > 1$ и $k = \max\{i : d_i > 1\}$*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = k(k-1) + n - k - 2;$$

3) *π является вынужденно сильно хордальной.*

Любой полярный граф является хордальным и потому всякая полярная последовательность является вынужденно хордальной. Критерий полярности графической последовательности известен [1, 5], так что получена полная характеризация вынужденно хордальных графических последовательностей.

Если P — сильная хордальность, то остаются еще неразложимые полярные последовательности. Их характеризация основана на модификации теоремы Рао из [8]. Пусть

$$\varphi = (c_1, \ldots, c_p), \quad \psi = (d_1, \ldots, d_q)$$

— последовательности натуральных чисел. Пара $(\varphi; \psi)$ называется графической, если существует двудольный граф $G(A, B)$ с долями A и B, такой, что $|A| = p$, $|B| = q$, $c_1, \ldots, c_p$ — степени вершин графа G, входящих в A, $d_1, \ldots, d_q$ — то же для B. $G(A, B)$ называется реализацией пары $(\varphi; \psi)$. Множество графических пар обозначим $B\Pi$.

Определим на $B\Pi$ частичный порядок $\ll$. Пусть

$$(\varphi_i; \psi_i) \in B\Pi, \quad i = 1, 2.$$

Если какая-либо из реализаций $G(A, B)$ пары $(\varphi_2; \psi_2)$ имеет индуцированный подграф $H(C, D)$, реализующий пару $(\varphi_1; \psi_1)$, причем $C \subseteq A$, $D \subseteq B$, то

$$(\varphi_1; \psi_1) \ll (\varphi_2; \psi_2).$$

Пусть π — неразложимая полярная последовательность длины, большей 1. Для таких π однозначно определено полярное разбиение $\pi = (\pi_A; \pi_B)$ [1]. Следующим образом сопоставим с π графическую пару $b(\pi)$. Пусть

$$|A| = p, \quad \pi_A = (a_1, \ldots, a_p).$$

Очевидно, $a_i \geqslant p - 1$. Положив

$$c_i = a_i - p + 1, \quad \varphi = (c_1, \ldots, c_p), \quad \psi = \pi_B,$$

получим графическую пару $(\varphi; \psi) = b(\pi)$.

Теорема 2. *Неразложимая полярная последовательность π является вынужденно сильно хордальной, если и только если ни одно из следующих двух условий не выполняется:*

$$(2^3;\ 2^3) \ll b(\pi), \quad (2^4;\ 2^4) \ll b(\pi) \tag{2}$$

(i^k означает, что i повторяется в последовательности k раз).

Теорема 3. (I) *Неразложимая неполярная невозрастающая графическая последовательность (1) является вынужденно интервальной, если и только если выполняется одно из следующих двух условий:*

1) $d_3 \leqslant 2,\ d_4 = 1$;
2) $\pi = ((k-1)^k,\ 1^2),\ k > 3$.

(II) *Для неразложимой полярной графической последовательности π следующие три утверждения эквивалентны:*
1) π *вынужденно интервальна;*
2) π *вынужденно транзитивно ориентируема;*
3) π *не удовлетворяет ни одному из условий*

$$(2^3;\ 2^3) \ll b(\pi),\ (1^3;\ 1^3) \ll b(\pi),\ (2^2,\ 1^2;\ 2^3) \ll b(\pi). \qquad (3)$$

Условия (2) и (3) можно проверить с помощью следующей теоремы:

Теорема 4. *Пусть* $(\varphi;\ \psi),\ (\alpha;\ \beta) \in В П$, *причем* $\varphi = (a_1,\ \ldots,\ a_p),\ \psi = (b_1,\ \ldots,\ b_q),\ \alpha = (d_1,\ \ldots,\ d_n),\ \beta = (l_1,\ \ldots,\ l_m)$ — *невозрастающие последовательности,*

$$n \leqslant p,\ m \leqslant q,\ d_1 - d_n \leqslant 1,\ l_1 - l_m \leqslant 1.$$

Тогда $(\alpha;\ \beta) \ll (\varphi;\ \psi)$, *если и только если существуют такие целые* s *и* t, *что*

$$0 \leqslant s \leqslant p - n,\ 0 \leqslant t \leqslant q - m,\ a_i \geqslant d_{i-s},\ i = \overline{s+1,\ s+n},$$

$$b_j \geqslant l_{j-t},\ j = \overline{t+1,\ t+m},$$

$$i_2 j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1 \geqslant \Sigma_{i=s+1}^{s+i_1}(a_i - d_{i-s}) +$$

$$+ \Sigma_{j=t+1}^{t+j_1}(b_j - l_{j-t}) + \Sigma_{i \in I_2} a_i + \Sigma_{j \in J_2} b_j - f,$$

где

$$f = \Sigma_{i=1}^{p} a_i = \Sigma_{j=1}^{q} b_j,\ i_1 = \overline{0,\ n},\ j_1 = \overline{0,\ m},\ i_2 = \overline{0,\ p-n},$$

$$j_2 = \overline{0,\ q-m},$$

I_2 — *множество наименьших* i_2 *чисел среди* $1,\ \ldots,\ s,\ s+n+1,\ \ldots,\ p$,
J_2 — *множество наименьших* j_2 *чисел среди* $1,\ \ldots,\ t,\ t+m+1,\ \ldots,\ q$.

Перейдем к характеризации неполярных неразложимых вынужденно транзитивно ориентируемых графических последовательностей.

Если

$$\psi = (c_1,\ \ldots,\ c_n),\ \sigma = (1^x,\ c_1,\ c_2+1,\ \ldots,\ c_n+1,\ n-1+x),$$

$$1 = c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n,\ x \geqslant 0,$$

то скажем, что σ получается из ψ смещением.

Пусть далее

$$\tau = \bar{\pi} = (n-1-d_1,\ n-1-d_2,\ \ldots,\ n-1-d_n) = (l_1,\ \ldots,\ l_n).$$

В этих обозначениях верна

Теорема 5. *Неразложимая неполярная невозрастающая графическая последовательность (1) вынужденно транзитивно ориентируема, если и только если выполняется какое-либо из следующих условий 1) — 10):*

1) π *совпадает с одной из последовательностей*

$$(3^5,\ 1^3),\ (4^3,\ 2^4),\ ((m+k)^2,\ 3^m,\ 2^k),\ (m^2,\ 3,\ 2^{m-1},\ 1)$$

(здесь $k \geqslant 0,\ m \geqslant 4$*);*

2) $d_1 = n-3,\ d_2 = \ldots = d_k = k-1,\ k = \max\{i : d_i > 1\}$;

3) $d_3 \leqslant 2,\ d_5 = 1$ *или* $d_1 = n-2,\ d_3 \leqslant 3,\ d_5 \leqslant 2$;

4) $d_1 + d_2 = \Sigma_{i=3}^n d_i,\ d_3 \leqslant 2;$

5) $l_n = l_{n-1} = n-2,\ l_{n-2} = l_{n-3} = 3,\ l_{n-4} \leqslant 2;$

6) $l_n = n-2,\ l_{n-2} \leqslant 3,\ l_{n-3} \leqslant 2;$

7) $l_n = l_{n-1} = n-2,\ l_{n-2} = n-3,\ l_{n-3} = \ldots = l_1 = 3;$

8) $l_n = n-2,\ l_{n-1} = l_{n-2} = l_{n-3} = 3,\ l_{n-4} = 2;$

9) $l_{n-2} = l_{n-3} = 2,\ l_{n-4} = 1,\ l_n + l_{n-1} = \Sigma_{i=1}^{n-2} l_i$, *или* $l_{n-2} \leqslant 2,\ l_{n-3} = 1$, *или* $l_{n-4} = 1,\ l_{n-3} = \ldots = l_n = 2;$

10) τ *получается конечным числом смещений из последовательности* $(f_1, \ldots, f_t)$, *где*

$$t \geqslant 4,\ 0 < f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \leqslant f_t,\ f_t \leqslant 2,\ f_{t-3} = 1,$$

или

$$f_1 = 1,\ f_3 \geqslant t-4,\ f_5 \geqslant t-3,$$

или

$$f_{t-1} \leqslant 2,\ f_{t-2} = 1.$$

Теорема 6. (I) *Неразложимая неполярная невозрастающая графическая последовательность (1) является вынужденно тривиально совершенной, если и только если*

$$d_i = 1,\ i = \overline{2,\ n}.$$

(II) *Неразложимая полярная графическая последовательность является вынужденно тривиально совершенной, если и только если* $\pi = (0)$.

Следствие. Все реализации вынужденно тривиально совершенной графической последовательности изоморфны.

Summary

Let P be one of the following properties: chordality, strong chordality, intervality, comparability, trivial perfectness. The graphical sequences, all realizations of which possess the property P, are characterized. The complexity of testing is equal to $O(n)$, $O(n^5)$, $O(n^5)$, $O(n^5)$, $O(n)$, respectively.

Литература

1. Тышкевич Р. И.— ДАН БССР, 1980, т. 24, № 8, с. 667—669. 2. Тышкевич Р. И., Мельников О. И., Котов В. М.— Кибернетика 1981, № 6, с. 5—8. 3. Farber M. — Discrete Math., 1983, vol. 43, p. 173 — 189. 4. Gilmor P., Hoffman A. J. — Canadian J. Math., 1964, vol. 16, p. 539—548. 5. Hammer P. L., Simeone B.— Combinatorica, 1981, vol. 1, N 3, p. 275—284. 6. Golumbic M. C.— Discrete Math., 1978, vol. 24, p. 105—107. 7. Golumbic M. C.— Algorithmic graph theory and perfect graphs. A series of monographs Univ. of Maryland, 1980, p. 285. 8. Rao S. B.— Springer Lect. Notes Math., 1981, vol. 885, p. 441—458.

Поступило 14.05.84

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина,
Институт проблем надежности
и долговечности машин
АН БССР,
Минский радиотехнический институт