

На основании полученных экспериментальных данных сделаны следующие выводы: увеличение диагонали отпечатка указывает на пластифицирующее влияние МП при микроиндентировании кристаллов сурьмы; увеличение толщины двойников и их числа указывает на интенсификацию размножения двойникоующих дислокаций за счет стимулирования источников приложением МП; падение длины двойников указывает на снижение подвижности двойникоующих дислокаций.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Головин, Ю.И. Магнитопластичность твердых тел / Ю.И. Головин // ФТТ. – 2004. – Т. 46, вып. 5. – С. 769–803.
2. Пинчук, А.И. Магнитопластический эффект в случае двойникования кристаллов висмута под воздействием сосредоточенной нагрузки / А.И. Пинчук, С.Д. Шаврей // ФТТ. – 2001. – Т. 43, вып. 1. – С. 39–41.
3. Пинчук, А.И. Двойникование в кристаллах сурьмы в условиях воздействия сосредоточенной нагрузки и постоянного магнитного поля / А.И. Пинчук, С.Г. Слесарев // 16 Петербургские чтения по проблемам прочности: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 75-летию со дня рождения В.А. Лихачева, Санкт-Петербург, 14–16 марта 2006 г. – С. 120.

У. А. ШЫЛНЕЦ, Ж. С. ТОПАЛЬ, Г. А. СКРАБЕЦ  
БДПУ імя М. Танка (г. Мінск, Беларусь)

#### РАШЭННЕ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ТРЭЦЯГА ПАРАДКУ ПРЫ ДАПАМАЗЕ F-МАНАГЕННЫХ ФУНКЦЫЙ

Няхай  $p = p(x, y), q = q(x, y)$  – адназначныя функцыі класа  $C^1(D)$ . Праз  $C^k(D)$  абазначаем клас функцый ад назалежных зменных  $x, y$ , якія маюць у аднавязным абсягу  $D$  непарыўныя частковыя вытворныя да парадку  $k$  уключна. Лічым гэтыя функцыі рэчаіснымі або камплекснымі, або гіперкамплекснымі і ў апошнім выпадку мяркуем, што значэнні гэтых функцый у абсягу  $D$  з’яўляюцца элементамі якой-небудзь асацыятыўнай і камутатыўнай алгебры з адзінкай над полем камплексных лікаў. Мяркуем, што ў абсягу  $D$  існуе  $\delta^{-1}$ , дзе  $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x$ .

Пры гэтых умовах формальнымі вытворнымі  $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}$  якой-небудзь функцыі

$f = f(x, y) \in C^1(D)$  называюцца такія функцыі ад  $x, y$ , якія вызначаюцца ў абсягу  $D$  наступным чынам:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \delta^{-1} \left( \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) f, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \delta^{-1} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) f.$$

Няхай  $p, q, f \in C^2(D)$ . Тады вызначым фармальныя вытворныя

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}, \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}$$

з сістэмы:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial y},$$

адкуль

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \delta^{-1} \left( \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = \delta^{-1} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} = \delta^{-1} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} = \delta^{-1} \left( \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Такім чынам, згодна з азначэннем фармальных вытворных 1-га парадку, маем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right).$$

Аналагічна вызначаюцца фармальныя вытворныя  $\frac{\partial^n f}{\partial p^k \partial q^{n-k}}$  парадку  $n > 2$  у выпадку функцый  $p, q$  і

$f$  класа  $C^n(D)$ .

Прадметам нашага даследавання з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных трэцяга парадку:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} &\equiv 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

дзе  $f, \varphi$  – шуканыя камплексныя функцыі класа  $C^3(D)$ .

Няхай  $\Phi = f + j\varphi, p = x + jy, q = x - jy$  ( $j^2 = i^2 = -1, j \neq i$ ).

**Тэарэма 1.** Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1) эквівалентная дыферэнцыяльнаму раўнанню ў фармальных вытворных

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial q^3} = 0. \quad (2)$$

Знойдем агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (2).

**Тэарэма 2.** Агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных  $n$ -га парадку

$$\frac{\partial^n f}{\partial q^n} = 0$$

мае выгляд:

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} h_k q^k, \quad (x, y) \in D,$$

дзе  $h_k = h_k[p]$  – любыя функцыі, манагенныя ў сэнсе У.С. Фёдарова (F-манагенныя) ў абсягу  $D$  адносна функцыі  $p$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) [1].

Такім чынам, згодна з тэарэмай 2, агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (2) мае наступны выгляд:

$$\Phi = h_2 q^2 + h_1 q + h_0,$$

дзе  $h_k = h_k[p]$  – адвольныя функцыі, F-манагенныя ў абсягу  $D$  адносна функцыі  $p$  ( $k = 0, 1, 2$ ).

Лёгка паказаць [2], што бікамлексная функцыя  $H = H_1(x, y) + jH_2(x, y)$ , манатонная ў сэнсе У. С. Фёдарова па функцыі  $p = x + jy$  у абсягу  $D$ , мае выгляд:

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \{u[\bar{z}] + v[z]\} + j \frac{i}{2} \{u[\bar{z}] - v[z]\},$$

дзе  $u[\bar{z}]$  – камплексная функцыя, аналітычная ад  $\bar{z} = x - iy$  у абсягу  $D$ ;  $v[z]$  – камплексная функцыя, аналітычная ад  $z = x + iy$  у абсягу  $D$ .

Такім чынам, агульнае рашэнне раўнання (2) мае выгляд:

$$\Phi = \left\{ \frac{u_2[\bar{z}] + v_2[z]}{2} + j \frac{i u_2[\bar{z}] - i v_2[z]}{2} \right\} (x - jy)^2 + \left\{ \frac{u_1[\bar{z}] + v_1[z]}{2} + j \frac{i u_1[\bar{z}] - i v_1[z]}{2} \right\} (x - jy) + \left\{ \frac{u_0[\bar{z}] + v_0[z]}{2} + j \frac{i u_0[\bar{z}] - i v_0[z]}{2} \right\},$$

дзе  $u_0[\bar{z}], u_1[\bar{z}], u_2[\bar{z}]$  – адвольныя камплексныя функцыі, аналітычныя ад  $\bar{z} = x - iy$  у абсягу  $D$ ;  $v_0[z], v_1[z], v_2[z]$  – адвольныя камплексныя функцыі, аналітычныя ад  $z = x + iy$  у абсягу  $D$ .

Адсюль атрымліваем рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1):

$$f = \frac{u_2[\bar{z}] + v_2[z]}{2} (x^2 - y^2) + 2xy \frac{i u_2[\bar{z}] - i v_2[z]}{2} + \frac{u_1[\bar{z}] + v_1[z]}{2} x + \frac{i u_1[\bar{z}] - i v_1[z]}{2} y + \frac{u_0[\bar{z}] + v_0[z]}{2},$$

$$\varphi = -2xy \frac{u_2[\bar{z}] + v_2[z]}{2} + \frac{i u_2[\bar{z}] - i v_2[z]}{2} (x^2 - y^2) - \frac{u_1[\bar{z}] + v_1[z]}{2} y + \frac{i u_1[\bar{z}] - i v_1[z]}{2} x + \frac{i u_0[\bar{z}] - i v_0[z]}{2}.$$

#### ЛІТАРАТУРА

1. Фёдоров, В.С. Основные свойства обобщённых монотонных функций / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
2. Стельмашук, Н.Т. О некоторых линейных дифференциальных уравнениях в частных производных в дуальной и бикомплексной алгебрах / Н.Т. Стельмашук // Известия вузов. Математика. – 1964. – № 3. – С. 136–142.

**А. А. ЮДОВ, Н. С. КОВАЛИК**

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

#### КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО С КАСАТЕЛЬНЫМИ МНИМОЕВКЛИДОВА ТИПА

Группу Ли  $G$  движений пространства Минковского (пространства  ${}^1R_4$ ) будем задавать как совокупность матриц вида:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$