О. Н. ПИРЮТКО, А. В. ШАШКОВА
УО БГПУ им. М. Танка (г. Минск, Беларусь)

ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ НАВЫКОВ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Задачи с параметрами являются наиболее трудными в курсе элементарной математики. Решение многих из них представляет собой исследование функций, входящих в условие задачи, и последующее рассмотрение уравнений или неравенств с числовыми коэффициентами.

Задачи с параметрами зачастую являются непосильными для учащихся, так как тема «Задачи с параметрами» не является отдельной составляющей школьного курса математики, а отдельные вопросы рассматриваются только на факультативных занятиях. Трудности в решении задач с параметрами связаны не столько с техническими сложностями, сколько с отсутствием ясного понимания многоуровневости таких задач. Например, при решении типичных уравнении нужно всего лишь найти его корни, следуя алгоритму решения. В уравнении с параметрами необходимо провести анализ корней уравнения, т.е. понять, как они меняются при изменении входящих в задачу параметров, или при каких значениях параметра корни уравнения в итоге удовлетворяли тому или иному условию.

Исследование задач с параметрами играет важную роль в формировании логического мышления, в развитии исследовательских навыков школьников, так как при решении данных задач сначала проводиться анализ задачи, классифицируется значение параметра. Затем нужно перейти от исходной задачи к равносильной ей, используя рациональные методы решения.

Существуют различные классификации задач с параметрами и методов их решения. На примере предложенной задачи мы покажем различные подходы к ее решению с помощью:

1) аналитического метода;
2) расположение корней квадратного трехчлена;
3) функционально-графического метода.

Методов решения задач значительно больше, но выше перечисленные методы являются доступными для учащихся, так как опираются на школьную программу.

В качестве примера рассмотрим задачу, которая решается с помощью выше указанных методов.

Задача. Найдите все значения a, при которых корни уравнения $(a-1)x^2-4ax+4(a+3)=0$ больше -2^x?

Аналитический метод. Это способ прямого решения, повторяющий стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Этот метод является не только самостоятельным методом, но и обязательной составной частью всех остальных методов. Поэтому он является универсальным для всех типов задач.

Решение 1. Т. к. в условии не сказано, что уравнение является квадратным, поэтому рассмотрим следующий случай:

1. Пусть $a-1=0$, т. е. $a=1$. В этом случае уравнение примет вид

$-4x+16=0$, откуда $x=4$. Итак, случай $a=1$ подходит.

2. Пусть $a\neq 1$. Условие существования корня состоит в том, что

$$\frac{D}{4}=4a^2-4(a-1)(a+3)=-8a+12\geq 0\text{, т. е. } a\leq\frac{3}{2} \qquad (1)$$

Пусть x_1, x_2 - корни уравнения. Надо найти значение параметра a, при котором $x_1+2>0$ и $x_2+2>0$. Два выражения больше нуля тогда и только тогда, когда их сумма и их произведение больше нуля:

$$\begin{cases} x_1+x_2+4>0, \\ (x_1+2)(x_2+2)>0. \end{cases} \qquad (2)$$

Согласно теореме Виета:

$$x1+x2+4=\frac{4a}{a-1}+4=\frac{8a-4}{a-1};$$

$$(x1+2)(x2+2)=x1x2+2(x1+x2)+4=\frac{4a+12}{a-1}+\frac{8a}{a-1}+4=\frac{16a+8}{a-1}.$$

Тогда и система (2) равносильна системе:

$$\begin{cases} \dfrac{8a-4}{a-1} > 0, \\ \dfrac{16a+8}{a-1} > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Окончательно получим, что решениями являются те и только те значения параметра a, которые удовлетворяют неравенству (1) и системе (3):

$$\begin{cases} \dfrac{8a-4}{a-1} > 0, \\ \dfrac{16a+8}{a-1} > 0, \\ a \le \dfrac{3}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty), \\ a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty), \\ a \in (-\infty; \frac{3}{2}]. \end{cases}$$

Учитывая случай 1, получим ответ: $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup [1; \frac{3}{2}]$.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup [1; \frac{3}{2}]$.

Расположение корней квадратного трехчлена. Рассматривается квадратичная функций (левая часть уравнения) и ее нули, удовлетворяющие данному условию расположения точек на оси абсцисс

Решение 2. Случай $a = 1$ аналогичен в Решении 1.

Рассмотрим квадратный трёхчлен $y = (a-1)x^2 - 4ax + 4(a+3)$.

Так как $x = -2$ не принадлежит промежутку $[x_1; x_2]$ (см. рисунок 1), то при $a - 1 > 0$ верно неравенство $f(-2) > 0$.

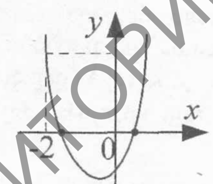

Рисунок 1

При $a - 1 < 0$ получаем (см. рисунок 2), что $f(-2) < 0$.

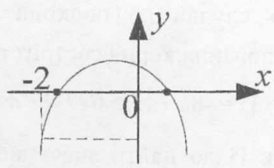

Рисунок 2

Таким образом, необходимое условие выполнения требования задачи есть выполнение следующих неравенств: $f(-2)(a-1) > 0$; (а)

добавим к этому условию условия существование корней $\frac{D}{4} \ge 0$ (б)

(где D – дискриминант квадратного трёхчлена); и положения абсциссы вершины параболы правее точки –2, то есть $\frac{4a}{2(a-1)} > -2$. (в)

Получим систему:

$$\begin{cases} -8a+12 \geq 0, \\ \dfrac{4a}{2(a-1)} > -2, \\ 4(a-1)+8a+4(a+3)(a-1) > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{8a-4}{2(a-1)} > 0, \\ (16a+8)(a-1) > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, что рассуждения, приведшие к этой системе, являются условием необходимым, но недостаточным. Для строгого обоснования потребуется проверить обратное. Пусть выполнены три условия: (а), (б), (в). Тогда $\frac{D}{4} \geq 0$ означает, что оба корня действительные, условие (а) означает, что точка -2 меньше, чем полусумма корней, которая равна $\frac{4a}{2(a-1)}$. Поэтому ясно, что система (4) равносильна системе (3).

Решение относительно параметра. Для решения задач с параметрами с помощью функционально-графического метода необходимо, чтобы учащиеся умели представлять искомые решения в виде геометрического места точек на координатной плоскости, где в качестве одной из координат выступает параметр, а в качестве другой – искомая переменная, а также уметь анализировать свойства функции [2].

Решение 3. Решим уравнение $(a-1)x^2-4ax+4(a+3)=0$ относительно параметр a. Получим $a(x^2-4x+4)=x^2-12$. Заметим, что если $x^2-4x+4=0$, то уравнение относительно a решений не имеет, так как ни при каком значении a корень уравнения не может быть равен 2.

Если $x^2-4x+4 \neq 0$, то $a=\frac{x^2-12}{(x-2)^2}$. Для дальнейшего решения необходимо построить график функции $y=\frac{x^2-12}{(x-2)^2}$ и рассмотреть его свойства:

1) $D=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$;
2) $y=0$, если $x=\pm 2\sqrt{3}$;
3) $x=0, y=-3$;
4) $y'(x)=\frac{-4(x-6)}{(x-2)^2}$; $y(x)$ возрастает, если $x \in (2;6)$, $y(x)$ убывает, если $x \in (-\infty;2)?(6;+\infty)$;

$x=6$ – точка $\max f(6)=\frac{3}{2}$.

5) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-12}{(x-2)^2}=1; y=1$ – горизонтальная асимптота.

Используя график $y=\frac{x^2-12}{(x-2)^2}$ (см. рисунок 3), мы получим ответ на вопрос задачи.

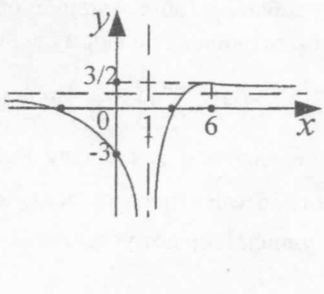

Рисунок 3

ЛИТЕРАТУРА
1. Крамор, В. С. Задачи с параметрами и методы их решения : учеб. изд. / В. С. Крамор. – М. : ООО «Изд-во Оникс», 2007. – С. 242–250.
2. Тавгень, О. И. Математика в задачах : учеб. пособие / О. И. Тавгень. – Минск : Аверсэв, 2005. – 366 с.