Учреждение образование
«Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка»

Факультет физико-математический
Кафедра математики и методики преподавания математики

(рег. №УМ-24– 1 –75–2017 г.)

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
_________________ И.Н.Гуло
29 мая 2017 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
_________________ С.И.Василец
31 мая 2017 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
(ПО ВЫБОРУ СТУДЕНТА)

Занимательные и олимпиадные математические задачи

для специальности: 1-02 05 01 «Математика и информатика»

Составители: Гриб Н.В., кандидат физико–математических наук, доцент

Рассмотрено и утверждено
на заседании Совета БГПУ «26» июня 2017 г., протокол № 10

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Занимательные и олимпиадные математические задачи» разработан для студентов 3 курса физико-математического факультета в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования специальности 1-02 05 01 "Математика и информатика" и рассчитан на изучение дисциплины в 6 семестре.

В курсе математики средней школы учащиеся изучают разнообразные алгоритмы решения математических задач и учатся применять их на практике. Этого, однако, недостаточно, чтобы решить задачу олимпиадного типа. Ее решение требует, кроме твердого знания стандартных алгоритмов, проявления смекалки, творческой фантазии и настойчивости в достижении цели. Все эти качества человеческой личности представляют большую ценность и за пределами математики. Их необходимо воспитывать и развивать уже в школе. Лучше всего делать это, решая соответствующие задачи под руководством учителя и самостоятельно. Понятно, что учитель математики должен иметь необходимую подготовку и интерес к подобной работе.

Изучение дисциплины по выбору «Занимательные и олимпиадные математические задачи» должно обеспечить формирование у студентов академических, социально-личностных и профессиональных компетенций.

Цель УМК – обеспечить эффективное освоение обучающимися учебного материала, входящего в учебную программу дисциплины, организовать самостоятельную работу студентов.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Занимательные и олимпиадные математические задачи» состоит четырех разделов: теоретического, практического, вспомогательного и раздела контроля знаний.

Теоретический раздел содержит лекционный материал по дисциплине с примерами решения задач. Практический раздел состоит из задач для аудиторного и самостоятельного решения, сгруппированным по темам. Раздел контроля знаний содержит задачи для подготовки к зачету. Во вспомогательном разделе содержится список литературы.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ИДЕИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

§1.1. Поиск родственных задач

Если задача трудна, то попытайтесь найти и решить более простую «родственную» задачу. Это часто даёт ключ к решению исходной. Помогают следующие соображения:

- рассмотреть частный (более простой) случай, а затем обобщить идею решения;
- разбить задачу на подзадачи (например, необходимость и достаточность);
- обобщить задачу (например, заменить конкретное число переменной);
- свести задачу к более простой.

Пример 1. В угловой клетке таблицы 5×5 стоит плюс, а в остальных клетках стоят минусы. Разрешается в любой строке или любом столбце поменять все знаки на противоположные. Можно ли за несколько таких операций сделать все знаки плюсами?

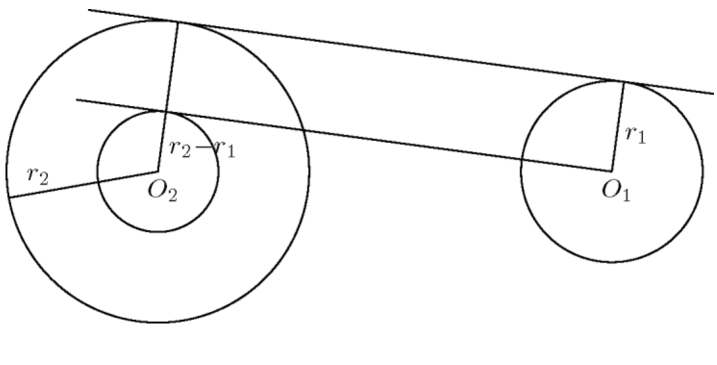
Решение. Возьмём квадрат поменьше, размера 2×2, в котором стоят один плюс и три минуса. Можно ли сделать все знаки плюсами? Несложный перебор показывает, что нельзя.

Воспользуемся этим результатом: выделим в квадрате 5×5 квадратик 2×2, содержащий один плюс. Про него уже известно, что сделать все знаки плюсами нельзя. Значит, в квадрате 5×5 и подавно.

Пример 2. Постройте общую внешнюю касательную к двум окружностям.

Решение. Если одна из окружностей будет точкой, то задача станет легче.

Пусть и — центр и радиус меньшей окружности, и — центр и радиус большей окружности. Рассмотрим прямую, проходящую через и параллельную общей касательной. Эта прямая удалена от на расстояние , значит, является касательной к окружности с центром и радиусом . Построим эту окружность. Из точки проведём касательную к ней. Пусть *C* — точка касания. На прямой лежит искомая точка касания.



Задачи

1. Легко распилить кубик 3x3x3 на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если разрешается перекладывать части перед тем как их пилить?

2. Докажите, что в выпуклом -угольнике сумма внутренних углов равна

.

3. Докажите, что делится на 6 при любом целом *n*.

4. Решите уравнение .

5. Постройте общую внутреннюю касательную к двум окружностям.

§1.2. "Причёсывание" задач

Хороший математик перед решением сначала «приготовит» задачу, т. е. преобразует её к удобному для решения виду.

Приготовление задачи может состоять в переформулировке условия на более удобном языке (например, на языке графов), отщеплении простых случаев, сведении общего случая к частному.

Такие преобразования сопровождаются фразами «в силу симметрии», «явно не хуже», «для определённости», «не нарушая общности», «можно считать, что...».

Пример 1. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше 2/5. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше 4/7.

Решение. «Лобовое» решение состоит в рассмотрении количеств мальчиков, ходивших только в первый поход, ходивших только во второй поход, ходивших в оба похода, то же для девочек, составлении и решении системы уравнений и неравенств. Этого делать не хочется, поэтому будем избавляться от лишних параметров, сводя задачу к её частному-случаю. Мы проделаем это в несколько шагов. После каждого шага упрощения становится очевидным следующий шаг.

Будем увеличивать число мальчиков в классе, не изменяя числа девочек и не нарушая условия задачи.

1 шаг. «Впишем» всех девочек в число участников обоих походов. От этого доля мальчиков в походах уменьшится, а в классе — не изменится. Итак, можно считать, что все девочки ходили в оба похода.

2 шаг. Если мальчик ходил в первый поход, то освободим его от посещения второго. Доля мальчиков в походе уменьшится. Итак, можно считать, что каждый мальчик ходил только в один поход.

3 шаг. Если в одном походе было меньше мальчиков, чем в другом, то добавим в класс мальчиков. Доля мальчиков в походах останется не больше 2/5, а доля мальчиков в классе увеличится. Можно считать, что мальчиков было в походах поровну.

4 шаг. Задача стала тривиальной: в обоих походах были все девочки и ровно половина мальчиков. Обозначим число девочек $3x$, тогда мальчиков в походах было не больше $2x$ а во всём классе — не больше Ax. Максимальное число мальчиков в классе Ax, а это 4/7 класса.

Пример 2. Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади треугольника.

Решение. Трудность состоит в том, что положение параллелограмма внутри треугольника произвольное. Будем преобразовывать параллелограмм, не уменьшая его площадь.

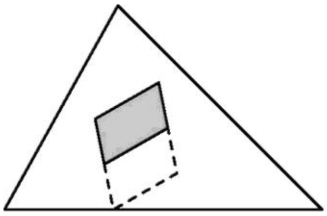
1 шаг. «Удлиним» параллелограмм так, чтобы одна его вершина попала на сторону треугольника.

2 шаг. Перекроим параллелограмм, не меняя его площади, так, чтобы его сторона попала на сторону треугольника.

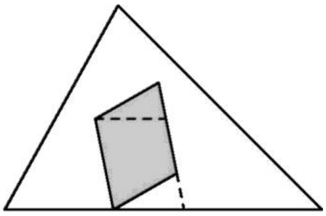
3 шаг. «Удлиним» параллелограмм вдоль общей с треугольником стороны так, чтобы все четыре вершины попали на стороны треугольника.

4 шаг. Перекроим параллелограмм, не меняя его площади, так, чтобы один его угол совпал с углом треугольника.

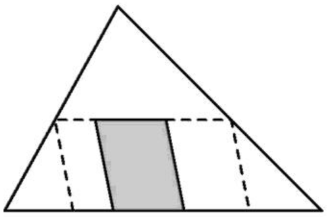
5 шаг. Теперь задача решается легко. Например, покроем параллелограмм дополняющими его треугольниками (один из треугольников отражается центрально симметрично относительно середины его общей с параллелограммом стороны, а второй параллельно переносится).



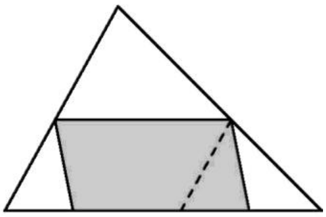
Шаг 1



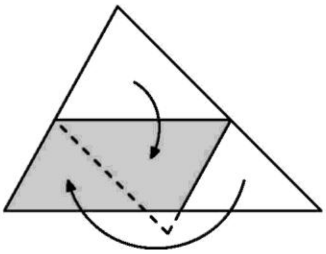
Шаг 2



Шаг 3



Шаг 4



Шаг 5

Пример 3. В 9 ячейках записаны числа: в первой — единица, в остальных — нули. За одну операцию можно выбрать две ячейки и заменить каждое число в них полусуммой этих чисел. Какое наименьшее число можно получить в первой ячейке?

Решение. Нетрудно получить число , усредняя число в первой ячейке со всеми остальными по очереди. Труднее доказать, что меньше получить нельзя.

Изменим условие задачи. Пусть после каждой операции все ненулевые числа становятся равными наименьшему из них. Эта новая операция даёт результат в каждой ячейке не больше, чем исходная операция.

Теперь всё ясно: новая операция либо ничего не меняет (если числа равны), либо уничтожает один нуль и уменьшает все числа в два раза. Поскольку новая операция не позволяет получить число меньшее , то исходная операция — тем более.

Задачи

1. В кладовой лежат 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых, причём левых и правых поровну — по 150. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар.

2. Из бумажного параллелограмма вырезали треугольник. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади параллелограмма.

3. На плоскости нарисовано несколько точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Отрезки могут выходить из одной точки, но не должны пересекаться. Кто не может сделать ход, проигрывает. Докажите, что при любых ходах игроков победителем будет один и тот же, а кто именно — определяется лишь начальной позицией.

Указание. Игра заканчивается, если рисунок представляет собой многоугольник, разбитый на треугольники.

4. Дан выпуклый многоугольник площади 9. Его пересекают десять параллельных прямых на расстоянии 1 друг от друга. Докажите, что сумма длин отрезков, высеченных многоугольником на этих прямых, не более десяти.

5. В n-мерном кубе покрашено более половины вершин. Ребро называется покрашенным, если покрашены обе ограничивающие его вершины. Докажите, что покрашено не менее n рёбер.

§1.3. Доказательство от противного

Рассуждают примерно так: «Допустим, исходное утверждение неверно. Если из этого получим противоречие, то исходное утверждение верно».

Пример 1. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Решение. Предположим противное, пусть — все простые числа. Рассмотрим число . Оно не делится ни на одно из чисел , иными словами, ни на одно простое число. Получаем противоречие с тем, что любое число имеет хотя бы один простой делитель.

Пример 2. Пять мальчиков нашли девять грибов. Докажите, что хотя бы двое из них нашли грибов поровну.

Решение. Допустим, что мальчики нашли разное количество грибов. Расставим их по возрастанию числа найденных грибов. Первый собрал не меньше нуля, второй — не меньше одного, третий — не меньше двух, четвёртый не меньше трёх, пятый — не меньше четырёх. Всего — не меньше десяти. Противоречие.

Пример 3. Докажите, что не существует треугольной пирамиды, у которой к каждому ребру примыкает тупой угол одной из граней.

Решение. Допустим, что такая пирамида существует. Поскольку в треугольнике против тупого угла лежит самая длинная сторона, то для каждого ребра найдётся более длинное ребро. Это невозможно, так как количество рёбер у пирамиды конечно. Противоречие.

Задачи

1. По кругу расставлены 100 чисел. Известно, что каждое число равно среднему арифметическому двух соседних. Докажите, что все числа равны.

2. На плоскости отмечено несколько точек. Известно, что любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что все отмеченные точки являются вершинами выпуклого многоугольника.

3. Докажите, что если $(m — 1)! + 1$ делится на m, то число m — простое.

4. Существует ли выпуклый многоугольник, у которого больше трёх острых углов?

5. Докажите, что не существует многогранника, у которого число граней нечётно и каждая грань имеет нечётное число вершин.

6. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, имеющих вид а) $4к + 3$; б) $3к + 2$; в) $6к + 5$.

§1.4. Чётность

Многие задачи легко решаются, если заметить, что некоторая величина имеет определённую чётность. Из этого следует, что ситуации, в которых эта величина имеет другую чётность, невозможны. Иногда эту величину (функцию) надо сконструировать, например, рассмотреть чётность суммы или произведения, разбить объекты на пары, заметить чередование состояний, раскрасить объекты в два цвета. Чётность в играх — это возможность сохранить чётность некоторой величины при своем ходе.

Пример 1. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1м). Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

Решение. Поскольку кузнечик вернулся в исходную точку, количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево, поэтому общее количество прыжков четно.

Пример 2. Существует ли замкнутая 7-звенная ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз?

Решение. Допустим, что существует. Тогда пересекающиеся звенья образуют пары. Следовательно, количество звеньев должно быть чётным. Противоречие.

Пример 3. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, четно.

Решение. Назовём марсиан с чётным числом рук чётными, а с нечётным — нечётными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук четно. Общее число рук у чётных марсиан четно, поэтому общее число рук у нечётных марсиан тоже четно. Следовательно, число нечётных марсиан четно.

Задачи

1. Можно ли разменять 25 рублей десятью купюрами достоинством 1, 3 и 5 рублей ?

2. Девять шестеренок зацеплены по кругу: первая со второй, вторая с третьей и т. д., девятая с первой. Могут ли они вращаться? А если шестеренок n?

3. В ряд стоят 100 фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?

4. Даны 6 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?

5. Все кости домино выложили в цепочку по правилам игры. На одном конце оказалась пятёрка. Что может оказаться на другом конце?

6. Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересекать все его стороны?

7. На столе стоят 7 перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

8. В языке дикарей хотийцев всего два звука: «ы» и «у». Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: пропуска идущих подряд звуков «ыу» или «ууыы» и добавления в любом месте звуков «уы». Означают ли одно и то же слова «уыу» и «ыуы» ?

9. На доске написаны числа 1, 2, … ,101. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность. Повторив эту операцию 100 раз, мы получим одно число. Докажите, что это число не может быть нулем.

10. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью и каждые 15 минут поворачивает на . Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

11. В трёх вершинах квадрата сидели кузнечики. Они стали играть в чехарду: один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную относительно другого. Сможет ли хоть один кузнечик попасть в четвёртую вершину квадрата?

§1.5. Обратный ход

Если в задаче задана некоторая операция, и эта операция обратима, то можно сделать «обратный ход» от конечного результата к исходным данным. (Например, надо вынести шкаф из комнаты. Пройдёт ли он через дверь? Пройдёт, потому что через дверь его внесли.) Анализ с конца используется в играх при поиске выигрышных и проигрышных ситуаций.

Пример 1. На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на двадцатый день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

Решение. Начнем с конца. Пусть сегодня половина озера покрылась цветами. Через сколько дней покроется всё озеро? Завтра! И это будет 20-й день.

Ответ: за 19 дней.

Пример 2. Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

Решение. Мы знаем, что в конце у всех оказалось по 40 фантиков, а перед этим у Пети и Вани было вдвое меньше. Значит, у Пети и Вани было по 20, а у Толи — 80. А перед этим у Пети и Толи было вдвое меньше, т. е. у Пети было 10, у Толи — 40, у Вани — 70. И наконец, возьмём половину фантиков у Вани и Толи и вернем Пете.

Ответ: у Пети было 65 фантиков, у Вани — 20, а у Толи — 35.

Задачи

1. Однажды царь наградил крестьянина яблоком из своего сада. Пошёл крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, в каждом заборе только одни ворота, и в каждых воротах стоит сторож. Подошёл крестьянин к первому сторожу и показал царский указ, а сторож ему в ответ: «Иди возьми, но при выходе отдашь мне половину тех яблок, что несёшь, и ещё одно». То же ему сказали второй и третий сторож. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы после расплаты со сторожами у него осталось одно яблоко?

2. Трём братьям дали 24 бублика так, что каждый получил на три бублика меньше, чем ему лет. Меньший брат был сообразительный и предложил поменять часть бубликов: «Я, — сказал он, — оставлю половину бубликов, а другую разделю между вами поровну; после этого средний брат также оставит половину бубликов, а другую разделит поровну между мной и старшим братом. В конце старший брат поделит так же». Так они и сделали. Оказалось, что все получили поровну. Сколько лет каждому брату?

3. Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т. д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

§1.6. Подсчёт двумя способами

При составлении уравнений выражают некоторую величину двумя способами (например, площадь, путь или время). Иногда некоторую величину оценивают двумя способами, тогда получают или неравенство, или величины разной чётности. Эта идея тесно связана с идеей инварианта. Она бывает источником противоречия.

Пример 1. Можно ли расставить числа в квадратной таблице 5x5 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

Решение. Допустим, что можно. Найдем сумму всех чисел. Если считать её по строкам, то сумма будет положительной, а если по столбцам — то отрицательной. Противоречие. Значит, так расставить числа нельзя.

Пример 2. В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Решение. Пусть m — число мальчиков, d — число девочек. Найдем общее количество «дружб» двумя способами. Поскольку каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, это число равно $4m$. С другой стороны, каждая девочка дружит с пятью мальчиками, значит это число равно $5d$. Получаем уравнение $4m = 5d$. Поскольку $m + d = 27$, то $m = 15$, $d = 12$.

Пример 3. Найдите сумму геометрической прогрессии $S_n = 1 + 3 + 9 + ... + 3^n$.

Решение. Заметим, что зная S_n, можно получить следующую сумму S_{n+1} двумя способами: либо добавить 3^n, либо умножить все слагаемые на 3, а потом прибавить 1. Получаем уравнение: $S_n + 3^n = 3\,S_n + 1$. Отсюда $S_n = (3^n – 1)/2$.

Пример 4. Могут ли все грани выпуклого многогранника иметь 6 и более сторон?

Решение. Нет, не могут. Оценим двумя способами среднее арифметическое всех углов всех граней. С одной стороны, среднее арифметическое углов n-угольника при n 6 не меньше 120°. С другой стороны, к каждой вершине многогранника примыкают не менее трёх граней, и сумма примыкающих углов строго меньше 360° . Поэтому среднее арифметическое углов при каждой вершине строго меньше 120°. Полученное противоречие доказывает, что такого многогранника не существует.

Задачи

1. Можно ли соединить 5 городов дорогами так, чтобы каждый город был соединён с тремя другими?

2. В каждой клетке прямоугольной таблицы размером $m \times k$ клеток написано число. Сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 1. Докажите, что $m = k$.

3. Существует ли выпуклый 1978-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов?

4. Докажите, что не существует многогранника, у которого

а) все грани — шестиугольники;

б) в каждой вершине сходятся 6 граней.

5.Треугольник разрезали на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что хотя бы у одного четырёхугольника есть угол не меньше 120°.

6. В городе отличников от каждой площади отходит ровно 5 улиц. Докажите, что число площадей четно, а число улиц делится на 5 (улицы соединяют площади).

7. В квадрате со стороной единица поместили несколько отрезков, параллельных сторонам квадрата (квадрату принадлежит граница, а отрезкам принадлежат концы). Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма их длин равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбит объединением отрезков, найдётся такая, площадь которой не меньше 0,01.

Указание. Оцените двумя способами сумму периметров частей. Чем меньше площадь, тем относительно больший периметр на неё приходится.

8. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут одновременно оказаться в вершинах квадрата большего размера.

9. На Олимпе есть игра: всем богам наливают поровну амброзии, затем один бог переливает другому столько амброзии, сколько у того уже было, и это повторяется несколько раз. Однажды удалось слить всю амброзию в чашу Зевса. Докажите, что количество богов является степенью двойки.

§1.7. Соответствие

Мы говорим, что между двумя множествами установлено *взаимно однозначное соответствие,* если каждому элементу первого множества поставлен в соответствие элемент второго множества, при этом каждый элемент второго множества соответствует ровно одному элементу первого множества. Иначе говоря, мы разбили элементы обоих множеств на пары, причём в каждую пару входит по элементу из каждого множества.

Если между двумя конечными множествами установлено взаимно однозначное соответствие, то можно утверждать, что они содержат одинаковое количество элементов, даже если пересчитать элементы этих множеств мы не можем. К примеру, чтобы узнать, равное ли количество дам и кавалеров пришло на бал, достаточно объявить танец. Если никто не остался без пары, значит тех и других поровну.

Если же мы установили соответствие между всеми элементами одного множества и частью элементов другого множества, то количество элементов в первом множестве меньше, чем во втором.

Пример 1. В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения у этих диагоналей? (Концы диагоналей не считаются точками пересечения.)

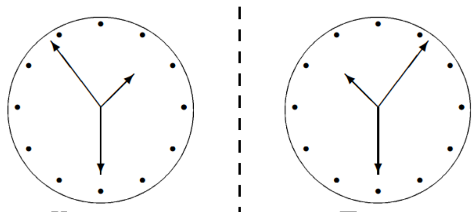
Решение. Каждой точке пересечения диагоналей соответствует четвёрка вершин — концов соответствующих диагоналей. Имеется и обратное соответствие: каждой четвёрке вершин соответствует точка пересечения диагоналей образованного ими четырёхугольника. Поэтому число точек пересечения диагоналей равно количеству четвёрок вершин, т. е. числу сочетаний из *n* по 4.

Пример 2. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

Решение. Основная идея: если стрелки показывают хорошее время, то их зеркальное отражение показывает плохое, и наоборот.

В полночь стрелки совпадают. Если пустить часы назад, то стрелки, будут показывать какое-то вчерашнее время, а их расположение будет зеркально симметричным расположению стрелок на обычных часах.

Итак, каждому хорошему моменту сегодня соответствует плохой момент вчера. Причем интервалу хорошего времени соответствует интервал плохого. Значит, хорошего времени сегодня столько же, сколько было плохого вчера. Поэтому хорошего и плохого времени в сутках поровну.



Хорошее *Плохое*

Пример 3. Номер автобусного билета состоит из 6 цифр. Билет называют *счастливым,* если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме трёх последних цифр. Каких автобусных билетов больше: счастливых или тех, чьи номера делятся на 11?

Решение. Счастливые билеты, упомянутые в условии, будем называть счастливыми по-московски. Назовём билет счастливым по-питерски, если сумма цифр его номера, стоящих на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах.

Выясним сначала, каких счастливых билетов больше — по-московски или по-питерски? Их поровну, поскольку между ними можно установить взаимно однозначное соответствие следующим образом. Переставим цифры номера билета, счастливого по-московски: первые три цифры поставим на нечётные места (первое, третье и пятое), а последние три цифры — на чётные (например, номер 129345 превратится в 132495). Получим счастливый по-питерски билет.

Теперь заметим, что номер любого билета, счастливого по-питерски делится на 11 (Признак делимости на 11: «Число делится на 11, тогда и только тогда, когда сумма его цифр, стоящих на чётных местах, минус сумма цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11»). Обратное неверно: существуют не счастливые по-питерски билеты, номера которых делятся на 11, например, если разность сумм цифр, стоящих на нечётных и чётных местах, равна 11. Поэтому билетов с номерами, делящимися на 11 больше, чем счастливых по-питерски, а значит и по-московски.

Пример 4. Докажите, что в числе первые 999 цифр справа после запятой — нули.

Идея решения. Добавим сопряжённую иррациональность и заметим, что сумма есть число целое, а слагаемое достаточно мало.

Задачи

1. Докажите, что дроби и имеют одинаковую длину периодов.

2. Докажите, что сумма номеров счастливых билетов делится на 13.

3. По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий отрезок начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить отрезок нельзя). Предположим, что игроки не делают ошибок. Кто из них победит: первый или второй?

4. На окружности даны 1987 точек, одна из них отмечена. Рассмотрим всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, которые содержат отмеченную точку, или тех, которые её не содержат?

5. Докажите, что число представимо в виде , причём = 1.

§1.8. Инварианты

Инвариант - величина, которая не изменяется в результате некоторых операций (например, разрезание и перестановка частей фигур не меняет суммарной площади). Если инвариант различает два положения, то от одного нельзя перейти к другому. В качестве инварианта может использоваться *чётность* или *раскраска*. В задачах про сумму цифр используются остатки от деления на 3 или 9. *Полуинвариант* - величина, изменяющаяся только в одну сторону (т. е. которая может только увеличиваться или только уменьшаться). Понятие полуинварианта часто используется при доказательствах остановки процессов.

Пример 1. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

Решение. Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод - ананас, если число бананов было нечётным – банан.

Пример 2. В одной клетке квадратной таблицы 4 × 4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

Решение. Заменим знак «+» на число 1 и знак « » на число 1. Заметим, что произведение всех чисел в таблице не меняется при смене знака у всех чисел столбца или строки. В начальном положении это произведение равно 1, а в таблице из одних плюсов +1, чем и доказана невозможность перехода.

Пример 3. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

Решение. Рассмотрим число разноцветных пар (не только соседних), где левая фишка красная, и заметим, что чётность этого показателя не меняется. Но в исходной ситуации наш показатель равен 1, а в желаемой ситуации - нулю. Поэтому перейти к желаемой ситуации невозможно.

Пример 4. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

Указание. Обозначим количества хамелеонов каждого цвета Б, С и М соответственно. Докажите, что остатки от деления на 3 разностей Б-М, М-С, М-Б не меняются.

Пример 5. На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидели по одному веселому чижу. Время от времени какие-то два чижа перелетают один по часовой стрелке, а другой - против, каждый - на соседнее дерево. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

Решение. Пронумеруем деревья по кругу от 1 до 44. Сумма номеров деревьев, на которых сидят чижи, либо не меняется, либо уменьшается на 44, либо увеличивается на 44. Тем самым, остаток от деления этой суммы номеров на 44 не меняется. Изначально этот остаток равен 22, а если все чижи усядутся на одно дерево, то он будет равен нулю. Поэтому чижи не смогут собраться на одном дереве.

Пример 6. Можно ли круг разрезать на несколько частей, из которых сложить квадрат? (Разрезы - это участки прямых и дуги окружностей.)

Решение. Рассмотрим инвариант: разность сумм длин вогнутых и выпуклых граничных дуг всех частей. Эта величина не изменяется при разрезании одной части на две и при складывании одной части из двух.

Для единичного круга этот инвариант равен 2 , а для квадрата – нулю. Поэтому «квадратура круга» невозможна.

Задачи

1. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?
2. Можно ли круг разрезать на несколько частей и сложить из них квадрат? (Разрезы – это прямые и дуги окружностей.)
3. Болельщик Вася нарисовал расположения игроков на футбольном поле к началу первого и второго таймов. Оказалось, что некоторые игроки поменялись местами, а остальные остались на своих местах. При этом расстояние между любыми двумя игроками не увеличилось. Докажите, что все эти расстояния не изменились.
4. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника до любой прямой, проходящей через его центр есть величина постоянная.
5. (Сизифов труд). На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берет любой камень и переносит его вверх на ближайшую свободную ступеньку (т. е. если ближайшая ступенька свободна, то на неё, а если она занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну

ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500 и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди начинает Сизиф. Цель Сизифа положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?

6. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с 10 городами (если A соединён с B, то B соединён с A). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.

7. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.

8. В одном бидоне находится 1 л воды, а в другом – 1 л спирта. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного бидона в другой. Можно ли добиться, чтобы в первом бидоне концентрация спирта оказалась больше 50%?

9. Круг разрезали на части и сложили выпуклую фигуру. Докажите, что это опять круг. (Разрезы – это участки прямых и дуги окружностей.)

10. Можно ли разрезать правильный треугольник на части и сложить квадрат, если части можно параллельно переносить, но не поворачивать?

§1.9. Метод крайнего

Особые, крайние объекты часто служат «краеугольным камнем» решения. Так, например, рассматривают наибольшее число, ближайшую точку, угловую точку, вырожденную окружность, предельный случай. Поэтому полезно сразу рассматривать особые, крайние объекты.

В задачах на метод крайнего работает метод минимального контрпримера: допустим, утверждение задачи неверно. Тогда существует минимальный в некотором смысле контрпример. И если окажется, что его можно ещё уменьшить, то получится искомое противоречие.

Пример 1. Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.

Решение. Выберем прямую и рассмотрим точки пересечения других прямых между собой. Среди этих точек пересечения выберем ближайшую к нашей прямой. Две прямые, проходящие через эту точку, пересекают исходную прямую и образуют с ней треугольник. Этот треугольник не могут пересекать другие прямые (подумайте, почему).

Пример 2. Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

Решение. Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон. Обозначим эту грань G, число её сторон n. К каждой стороне G примыкает грань многогранника, всего примыкающих граней n. Число сторон у каждой грани заключено между 3 и $n-1$, всего $n-3$ возможности. Поскольку число возможностей меньше числа примыкающих граней, то по принципу Дирихле (см. тему «Принцип Дирихле») одна из возможностей повторится. Таким образом, среди граней, примыкающих к грани G, найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Пример 3. В каждой клетке шахматной доски записано число. Оказалось, что любое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в соседних (по стороне) клетках. Докажите, что все числа равны.

Решение. Рассмотрим наибольшее из чисел. Оно равно своим соседям. Поскольку любые два числа соединяются цепочкой соседних чисел, все числа равны.

Пример 4. Из точки внутри выпуклого многоугольника опускают перпендикуляры на его стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один перпендикуляр попадёт на сторону.

Указание. Рассмотрите ближайшую точку границы.

Пример 5. Докажите, что число 1+ –   –   – не является целым.

Указание. Рассмотрите максимальную из степеней двойки, входящих в знаменатели слагаемых.

Задачи

1. Путешественник отправился из своего родного города А в самый удалённый от него город страны В; затем из В – в самый удалённый от него город С и т. д. Докажите, что если С не совпадает с А, то путешественник никогда не вернется домой. (Расстояния между городами страны различны).

2. Назовём автобусный билет (с шестизначным номером) счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

3. В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона можно считать точками в пространстве.)

4. На столе лежат одинаковые монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более трёх других.

5. На столе лежат произвольные монеты без наложений. Докажите, что найдётся монета, которая касается не более пяти других.

6. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно передвинуть по столу к его краю, не сдвинув других монет.

7. На полях шахматной доски расставлены целые числа, причём никакое число не встречается дважды. Докажите, что есть пара соседних (имеющих общую сторону) клеток, числа в которых отличаются не меньше, чем на 5.

8. На окружности стоят 30 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите эти числа и порядок их следования по окружности.

9. На прямой расположена колония из конечного числа бактерий. В моменты 1, 2, 3, ... некоторые из бактерий могут погибать; новых бактерий не возникает ни в один момент. Погибают те и только те бактерии, от которых ни слева на расстоянии 1, ни справа на расстоянии – нет бактерий. Существует ли колония бактерий, которая будет жить вечно?

10. В течение дня в библиотеке побывало 100 читателей. Оказалось, что в тот день из любых трёх читателей двое в библиотеке встретились. Докажите, что сотрудник библиотеки мог сделать важное сообщение в такие два момента времени, чтобы все 100 человек его услышали. (Каждый читатель побывал в библиотеке только один раз.)

11. На плоскости отмечено несколько прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух отмеченных прямых, проходит по крайней мере ещё одна. Докажите, что все отмеченные прямые проходят через одну точку.

12. На плоскости отметили несколько точек. Точки, находящиеся от данной на наименьшем расстоянии, назовём ближайшими (их может быть несколько). Докажите, что найдётся точка, имеющая не более трёх ближайших.

13. Найдите наибольшее значение выражения + +…+ +, где , , ..., – неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

§1.10. Уход на бесконечность и малые шевеления

Методу крайнего родственны рассмотрение ситуации на бесконечности (в *асимптотике*) и метод малых шевелений.

Пример 1. На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Докажите, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.

Идея решения. Выберем направление, не перпендикулярное ни одной из прямых. Будем двигать по этому направлению точку с единичной скоростью. Скорость удаления этой точки относительно любой отмеченной точки стремится к единице, а скорость её удаления относительно любой отмеченной прямой меньше единицы.

Пример 2. Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь S > 1. Докажите, что её можно сдвинуть на целочисленный вектор так, чтобы исходная фигура и её образ пересекались.

Решение. Пусть расстояние между любыми двумя точками фигуры не превосходит d. Рассмотрим сдвиги нашей фигуры на всевозможные целочисленные векторы. Нарисуем на плоскости два квадрата с общим центром и сторонами, параллельными координатным осям | один со стороной l, а другой - со стороной l+2d (значение l мы определим позже, оно должно быть достаточно велико). Большой квадрат «окаймляет» малый, ширина «каймы» равна d. Поэтому любой из рассматриваемых образов фигуры, пересекающий малый квадрат, целиком лежит внутри большого. Левый нижний угол маленького квадрата расположим так, чтобы он принадлежал рассматриваемой фигуре.

Оценим площадь фигур, пересекающих малый квадрат. Таких фигур не меньше , так как сдвиги на векторы вида (m;n) (0 m l, 0 n< l) переводят левый нижний угол квадрата в точку внутри квадрата, а таких сдвигов всего имеется > . Если предположить, что образы фигуры не пересекаются, то их суммарная площадь должна не превосходить площади большого квадрата. Получаем неравенство

S или (S–1) –4ld –4

В левой части последнего неравенства стоит квадратный трёхчлен относительно l со старшим коэффициентом большим нуля. При достаточно больших l он принимает положительные значения (его график - парабола с ветвями вверх). Значит, можно подобрать такое l, при котором последнее неравенство не будет выполняться. Поэтому предположение, что образы нашей фигуры не пересекаются приводит к противоречию.

Так как два образа рассматриваемой фигуры при сдвигах на целочисленные векторы пересекаются, то при сдвиге исходной фигуры на разность этих векторов получим фигуру, пересекающую её.

Пример 3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде + , где x и y – натуральные числа.

Решение. Рассмотрим натуральное число N и оценим, какое количество чисел, не превосходящих его, может быть представлена в указанном виде. Очевидно, что число x в таком представлении должно не превосходить , а y - не превосходить . Количество всевозможных таких пар (x;y) не больше = . Поэтому и количество представимых чисел не больше этой величины. Значит, среди чисел, не превосходящих N, доля тех, которые представимы в указанном виде, не превосходит . При достаточно больших N она будет сколь угодно мала.

Задачи

1. Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом «внутренностей парабол». (Под внутренностью параболы мы понимаем выпуклую фигуру, границей которой является парабола.)

2. Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами в целых точках, не содержащего внутри и на границе других целых точек, равна единице.

3. Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь S > 10. Докажите, что её можно параллельно перенести так, чтобы она покрыла не менее 11 целых точек.

4. (лемма Минковского). Докажите, что центрально-симметричная относительно начала координат выпуклая фигура площади больше 4 содержит ещё хотя бы одну целую точку.

Указание. Произведите гомотетию с коэффициентом и воспользуйтесь результатом примера 2.

5. Прямая пересекает замкнутую ломаную в 1995 точках. Докажите, что некоторая прямая, не параллельная ни одному звену ломаной, пересекает её не более чем в 1995 точках.

6. Проведены 100 хорд одной окружности, любые две из них пересекаются. Всегда ли можно провести ещё одну хорду так, чтобы она пересекала их все?

7. Докажите, что если натуральные числа , , ..., таковы, что + +…+ <1, то существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде + + ::: + для некоторых целых неотрицательных чисел , , ..., .

8. Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы n слагаемых, каждое из которых является n-й степенью натурального числа.

§1.11. Принцип Дирихле

В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти ящиках, то в некотором ящике сидят не меньше двух.». Общая формулировка: «*Если n кроликов сидят в k ящиках, то найдётся ящик, в котором сидят не меньше чем − кроликов, и найдётся ящик, в котором сидят не больше чем − кроликов*». Пусть вас не смущает дробное число кроликов – в предыдущем случае получается, что в ящике не меньше 10/9 кроликов, значит, не меньше двух.

Доказательство принципа Дирихле простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения часто встречаются.

Допустим, что в каждом ящике сидят меньше чем − кроликов. Тогда во всех ящиках вместе кроликов меньше чем − . Противоречие.

Принцип Дирихле кажется очевидным, однако, чтобы его применить, бывает не просто догадаться, что считать кроликами, а что – ящиками.

Зная принцип Дирихле, можно догадаться, в каких случаях его применять. Например, если каждому элементу множества А соответствует ровно один элемент множества В, то элементы А можно назвать кроликами, а элементы В- ящиками.

Принцип Дирихле бывает непрерывным: «*Если n кроликов съели m кг травы, то какой-то кролик съел не меньше m n кг и какой-то съел не больше — кг*» (а если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего). Заметим, что в последней формулировке кролики играют роль ящиков для травы, а трава – роль кроликов, сидящих в ящиках.

Пример 1. В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

Решение. Всего в году бывает 366 дней. Назовём дни ящиками, а учеников – кроликами. Тогда в некотором ящике сидят не меньше — кроликов, т. е. больше одного. Следовательно, не меньше двух.

Можно рассуждать от противного. Допустим, что каждый день отмечают день рождения не больше одного ученика, тогда всего учеников не больше 366. Противоречие.

Пример 2. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6 × 6 из чисел +1, −1, 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

Решение. Допустим, что квадрат составлен. Тогда суммы чисел могут меняться в пределах от −6 до +6. Всего 13 значений. Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2. Получаем 14 различных сумм. Противоречие, значит составить такой квадрат невозможно.

Пример 3. На Земле океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

Решение. Отразим океан симметрично относительно центра Земли. Поскольку сумма площадей океана и его образа превышает площадь земной поверхности, то существует точка, принадлежащая океану и его образу. Возьмём эту точку вместе с противоположной к ней.

Пример 4. На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5.

Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

Решение. Рассмотрим множество наборов из трёх оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно   или 64 (4 возможности за каждую из трёх контрольных). Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся соответствует один набор оценок.

Задачи

1. В классе 30 учеников. Во время контрольной работы Петя сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что найдутся три ученика, сделавшие одинаковое число ошибок.

2. На Земле больше шести миллиардов жителей, людей старше 150 лет не существует. Докажите, что на Земле есть два человека, родившихся одновременно с точностью до секунды.

3. На плоскости проведено 12 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше 15 .

4. В ящике лежат носки: 10 чёрных, 10 синих, 10 белых. Какое наименьшее количество носков надо вынуть не глядя, чтобы среди вынутых оказалось два носка а) одного цвета; б) разных цветов; в) чёрного цвета?

5. На карьере добыли 36 камней. Их веса составляют арифметическую прогрессию: 490 кг, 495 кг, 500 кг, ..., 665 кг. Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках?

6. Какое наименьшее число карточек спортлото «6 из 49» надо купить, чтобы наверняка хоть на одной из них был угадан хоть один номер?

7. Докажите, что среди любых пяти человек есть двое с одинаковым числом знакомых среди этих пяти человек. (Возможно, эти двое ни с кем не знакомы.)

8. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

9. Квадратная таблица $(2n+1)\times(2n+1)$ заполнена числами от 1 до $2n+1$ так, что в каждой строке и в каждом столбце представлены все эти числа. Докажите, что если это расположение симметрично относительно диагонали таблицы, то на этой диагонали тоже представлены все эти числа.

10. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

11. Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причём на каждом присутствовало ровно 10 членов комиссии. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на её заседаниях по крайней мере дважды.

12. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Докажите, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.

13. Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 1989.

§1.12. Индукция

Метод доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что...» и т. д.

Первое утверждение цепочки называется *базой* (или основанием) индукции. Его обычно легко проверить. Затем доказывается шаг индукции: «*Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером (n+1)*». Шаг индукции также можно рассматривать как цепочку переходов: «Если верно утверждение 1, то верно утверждение 2»,

«Если верно утверждение 2, то верно утверждение 3» и т. д.

Если верна база индукции, и верен шаг индукции, то все утверждения верны (это *принцип математической индукции*).

Иногда для доказательства очередного утверждения цепочки надо опираться на все предыдущие утверждения. Тогда индуктивный переход звучит так: «*Если верны все утверждения с номерами от 1 до n, то верно утверждение с номером (n + 1)*».

Бывает удобен *индуктивный спуск* – если утверждение с номером n ($n > 1$) можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами и первое утверждение верно, то все утверждения верны.

Пример 1. Докажите, что число состоящее из 243 единиц, делится на 243.

Решение. Заметим, что 243 = . Попробуем доказать более общее утверждение, что число, составленное из единиц, делится на . Оказывается, это проще. Для $n = 1$ утверждение верно (111 делится на 3). Заметим, что $111111111 = 111\cdot1001001$, и вообще число из единиц разлагается на множители:

$$\underbrace{1\ldots1}_{3^{n+1}}=\underbrace{1\ldots1}_{3^{n}}\cdot10\ldots010\ldots01$$

причём, второй множитель делится на 3 (по признаку делимости на 3). Итак, в последовательности чисел 111, 111111111, ..., « единиц» каждое следующее равно предыдущему, умноженному на число, кратное трём. Поэтому, если $\underbrace{1\ldots1}_{3^{n-1}}$ делится на

, то $\underbrace{1\ldots1}_{3^{n}}$делится на . Теперь индукция очевидна.

Замечание. Мы специально не произносили слов «база индукции» и «шаг индукции», чтобы не отвлекать внимание от более существенных моментов.

Пример 2. На плоскости провели несколько прямых и окружностей. Докажите, что части на которые разбита плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние части (граничащие по отрезку или дуге) были покрашены в разные цвета.

Решение. Сначала сотрём все прямые и окружности, но запомним где они находились. Покрасим всю плоскость в один цвет, а потом будем восстанавливать границы, перекрашивая при этом части, на которые они делят плоскость. Каждый раз, добавляя прямую, мы перекрашиваем в противоположный цвет все части, лежащие по одну её сторону, и оставляем без изменения части, лежащие по другую сторону. Добавляя окружность, мы перекрашиваем все части, лежащие внутри неё и оставляем без изменения, лежащие снаружи. Таким образом, каждый участок любой из нарисованных линий будет являться границей двух областей разного цвета.

Пример 3. Пятеро разбойников добыли мешок золотого песка. Они хотят поделить его так, чтобы каждый был уверен, что он получил не меньше одной пятой золота. Никаких способов измерения у них нет, однако каждый умеет оценивать на глаз величину кучи песка. Мнения разбойников о величине куч могут расходиться. Как им поделить добычу?

Решение. *Первый способ*. Пусть сначала два разбойника поделят добычу между собой: один поделит песок на две равные, по его мнению, кучи, а второй выберет себе кучу. Затем каждый из них поделит свою кучу на три равные, по его мнению, кучи, а третий возьмёт у каждого по одной куче. Затем эти трое делят свои кучи на четыре равные, по их мнению, части, а четвёртый разбойник возьмёт у каждого по одной куче. Аналогично для пятого разбойника.

Второй способ. Найдём «самого скромного» разбойника и отдадим ему его долю. Для этого попросим первого разбойника отделить 1/5 часть мешка и спросим второго разбойника о размере отделённой части: если он считает, что она больше 1/5, то пусть уменьшит ее до 1/5, а если считает, что она не больше 1/5, то позовём третьего разбойника и повторим процедуру. В итоге отдадим кучу тому, кто последним к ней приложил руку. Среди оставшихся разбойников опять найдём самого скромного и отдадим ему полученную кучу и т. д.

Задачи

1. Докажите, что любое число рублей большее семи можно разменять трёшками и пятёрками. (Трёшками и пятёрками называются купюры в 3 и 5 рублей соответственно, которые находились в обращении в Советском Союзе до 1991 года).

2. Несколько прямых делят плоскость на части. Каждая прямая «заштрихована» с одной стороны. Докажите, что у одной из частей все границы «заштрихованы» изнутри.

3. Из квадрата 128×128 вырезали одну клетку. Докажите, что эту фигуру можно замостить уголками из трёх клеток.

4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

5. Для любого натурального k докажите неравенство .

6. Докажите неравенство Коши:

где - неотрицательные числа.

Указание. Используйте более сложную схему индукции по количеству переменных: сначала по степеням двойки, потом от степени двойки к меньшему числу.

7. Четыре одинаковые банки наполнены красками на три четверти; цвета всех красок различны. Имеется возможность переливать любую часть жидкости из одной банки в другую. Можно ли во всех банках сделать одинаковую смесь? (Другой посуды нет, выливать краску нельзя.)

8. В городе N домов. Какое наибольшее число заборов можно построить в этом городе, если 1) заборы не пересекаются, 2) каждый забор огораживает хотя бы один дом, 3) никакие два забора не огораживают одну и ту же совокупность домов?

9. Докажите, что предпоследняя цифра десятичной записи любой степени тройки чётна.

10. Для любого x −1 и натурального n докажите неравенство Бернулли:

.

§1.13. Делимость и остатки

Если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на число m, то говорят, что *a сравнимо* с b по модулю m и записывают:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$$

Два числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда их разность делится на m.

Сравнения можно складывать и умножать. Если $a \equiv b\ (mod\ m)$ и $c \equiv d(mod\ m)$, n – произвольное целое положительное число, то $a+c \equiv b+d(mod\ m)$, $ac \equiv bd(mod\ m)$ и $an \equiv bn\ (mod\ m)$. Таким образом определяется арифметика остатков или арифметика вычетов.

В случае, если $m = 10$ приведённое утверждение особенно наглядно: чтобы найти последнюю цифру десятичной записи суммы (произведения), достаточно сложить (перемножить) последние цифры слагаемых (сомножителей) и взять последнюю цифру результата. Остаток может выступать в роли инварианта (например, остаток от деления на 9 в задачах про сумму цифр).

Пример 1. Докажите, что число $-$ n делится на 6 при всех целых n.

Решение. Разложим данное выражение на множители: $- n = (n-1)n(n + 1)$. Мы получили произведение трёх последовательных целых чисел. Одно из них делится на 3, поэтому произведение делится на 3. По крайней мере одно из трёх последовательных чисел чётно, поэтому произведение чётно. Число, делящееся на 2 и 3, делится на 6.

Пример 2. Докажите, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов.

Решение. Квадрат целого числа при делении на 8 даёт остаток 0, 1 или 4. Чтобы убедиться в этом достаточно проверить квадраты всевозможных остатков от деления на 8 – числа от 0 до 8. Поэтому сумма трёх квадратов не может иметь остаток 7.

Пример 3. Докажите, что число, в десятичной записи которого участвуют три единицы и несколько нулей, не может быть квадратом.

Решение. Если такое число существует, то оно делится на 3, но не делится на 9 (по признакам делимости на 3 и 9). Но если число делится на 3 и является полным квадратом, то оно делится на 9. Противоречие.

Задачи

1. Какие числа можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел?

2. Если p - простое число, большее трёх, то -1 делится на 24. Докажите.

3. При каких n число -1 делится на 7?

4. Известно, что сумма нескольких натуральных чисел делится на 6. Докажите, что сумма кубов этих чисел тоже делится на 6.

5. Докажите, что если целочисленная арифметическая прогрессия содержит квадрат целого числа, то она содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

6. Три целых числа связаны соотношением $+ =$. Докажите, что x или y делится на 3.

7. Шестизначное число делится на 7. Докажите, что, если последнюю его цифру переставить в начало, то полученное число тоже будет делиться на 7.

8. Найдите три попарно взаимно простых числа таких, что сумма любых двух из них делится на третье.

9. Докажите, что простые числа большие трёх можно записать в одном из двух видов: $6n + 1$ либо $6n-1$, где n – натуральное число.

10. Докажите, что если сумма квадратов двух чисел делится на 3, то и каждое из этих чисел тоже делится на 3.

11. Дано натуральное число N. К нему справа приписывают по одной цифре, кроме девятки. Докажите, что рано или поздно получится составное число.

12. Докажите, что существует бесконечно много целых чисел, которые нельзя представить в виде суммы

а) трёх кубов;

б) семи шестых степеней целых чисел.

§1.14. Покрытия, упаковки и замощения

Если объединение нескольких фигур содержит данную фигуру , то говорят, что эти фигуры образуют *покрытие* фигуры Ф. При этом покрывающие фигуры могут пересекаться.

Упаковка – это размещение внутри данной фигуры нескольких фигур, не имеющих общих точек, кроме, быть может, граничных.

В некоторых задачах фигура разрезается на меньшие части (например, на две одинаковые), или наоборот, из нескольких данных фигур составляется одна большая. Это – задачи на *разрезание* или *замощение.*

Замощение является одновременно покрытием и упаковкой.

Пример 1. Можно ли покрыть равносторонний треугольник двумя равносторонними треугольниками меньшего размера?

Решение. Каждый из меньших треугольников может покрыть только одну вершину большего, но вершин три, а треугольников только два.

Пример 2. На поле 10×10 для игры в «морской бой» нужно расставить один корабль 1×4, два корабля 1×3, три корабля 1×2 и четыре корабля 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин), но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что если расставлять их в указанном порядке (начиная с больших), то каждому кораблю всегда найдётся место (как бы их ни ставили на любое свободное место).

Решение. Корабль 1×4 поставить можно. Докажем, что очередной корабль 1×3 поместится. Для этого нарисуем 8 вспомогательных кораблей 1 × 3, параллельных друг другу, с интервалом две клетки. Поставленные корабли могут задеть (пересечь или коснуться) не больше двух вспомогательных, поэтому останется незадетый вспомогательный корабль, на место которого можно поставить очередной корабль 1×3.

Пусть уже расставлены корабли 1×4, два 1×3 и меньше трёх 1 ×2. Докажем, что ещё один корабль 1×2 поместится. Для этого отметим 12 вспомогательных кораблей 1×2 параллельных друг другу с интервалом две клетки. Каждый поставленный корабль может задеть не больше двух вспомогательных, поэтому останется незадетый вспомогательный корабль.

Аналогично поместится очередной одноклеточный корабль. Отметим 16 вспомогательных кораблей 1 × 1 с интервалом две клетки. Поставленные корабли задевают не больше 15 вспомогательных.

Пример 3. Внутри круглого блина радиуса R запекли монету радиуса r. Каким наименьшим числом прямых разрезов можно наверняка задеть монету?

Решение. Если разрезы проводить параллельно, то монету можно задеть за — разрезов, если число — – целое, и за — разрезов, если — – нецелое. Трудность состоит в доказательстве того, что меньшим числом разрезов обойтись нельзя.

Рассмотрим множество возможных положений центра монеты. Каждому прямолинейному разрезу соответствует полоса ширины $2r$, отвечающая множеству возможных центров монеты, задетой этим разрезом. Таким образом, задача переформулируется следующим образом: найти минимальное число полос ширины $2r$, покрывающих круг радиуса R.

Воспользуемся следующим замечательным фактом: если сферу пересечь двумя параллельными плоскостями, то площадь сферы между ними зависит только от расстояния между плоскостями и не зависит от их положения.

Опишем вокруг блина сферу. Через края каждой полосы проведём две перпендикулярные к ней плоскости. Они высекут на сфере кольца одинаковой площади. Осталось покрыть сферу наименьшим числом колец известной площади.

Задачи

1. Квадратный каток надо осветить четырьмя прожекторами, висящими на одной высоте. Каков наименьший радиус освещённых кругов?

2. Можно ли точечный источник света на плоскости заслонить тремя кругами (чтобы любой луч, выходящий из источника, пересекал хотя бы один круг)?

3. Коридор полностью покрыт несколькими ковровыми дорожками. Докажите, что можно убрать несколько дорожек так, чтобы

а) коридор был полностью покрыт, а общая длина оставшихся дорожек была не больше удвоенной длины коридора;

б) оставшиеся дорожки не перекрывались и их суммарная длина была не меньше половины длины коридора.

4. Пол в прямоугольной комнате 6 × 3 кв. м покрыт квадратными коврами разных размеров, края которых параллельны стенам. Докажите, что можно убрать несколько ковров так, чтобы оставшиеся ковры покрывали более 2кв. м.

5. На столе лежат 15 журналов, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся покрывали не менее 8/15 площади стола.

6. Круглый стол покрыт круглыми салфетками разных размеров. Докажите, что можно выбрать несколько салфеток, которые не пересекаются и закрывают не менее 1/9 площади стола.

7. Любые три из четырёх выпуклых фигур на плоскости пересекаются. Докажите, что все фигуры пересекаются.

8. Плоскость покрыта конечным числом полуплоскостей. Докажите, что из них можно выбрать три (или две) полуплоскости, которые покрывают всю плоскость.

9. Прожектор освещает прямой угол. Четыре прожектора поместили в произвольных точках плоскости. Докажите, что прожекторы можно повернуть так, что они осветят всю плоскость.

10. На шахматной доске расставляют королей так, чтобы они били все клетки. Каково наименьшее число королей?

11. Из листа клетчатой бумаги 29×29 клеток вырезали 99 квадратов 2×2. Докажите, что из остатка можно вырезать ещё один такой квадрат.

12. Пусть A – наибольшее число попарно непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника M, B – наименьшее число кругов диаметра 2, которыми можно покрыть многоугольник. Что больше: A или B?

13. На круглом столе радиуса R лежат без наложений n круглых монет радиуса r. Докажите, что

14. Пусть S – площадь выпуклого многоугольника, P – его периметр, R – радиус максимального вписанного круга. Докажите, что

15. Окружность покрыта бесконечным числом открытых дуг. Докажите, что можно выбрать несколько дуг, которые покрывают окружность и имеют суммарную длину не более 720 ?

16. На листе бумаги расположено несколько прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Каждые два прямоугольника имеют общие точки. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам.

17. На клетчатой бумаге даны произвольные n клеток. Докажите, что среди них можно выбрать не меньше $n/4$ клеток, не имеющих общих точек.

18. Квадратная площадь размером 100×100 выложена квадратными плитами 1×1 четырёх цветов: белого, красного, чёрного и серого – так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

19. Двое по очереди ставят на шахматную доску коня, причём его можно ставить на любую незанятую клетку, которая не бьется ни одним из уже стоящих коней. Тот, кто не может поставить коня, проигрывает. Кто победит при правильной игре? Указание. Разбейте доску на пары центрально симметричных клеток.

20. Из шахматной доски вырезаны одна чёрная и одна белая клетки. Докажите, что её можно замостить прямоугольниками из двух клеток.

§1.15. Раскраски

Говорят, что фигура покрашена в несколько цветов, если каждой точке фигуры приписан определённый цвет. Бывают задачи, где раскраска уже дана, например для шахматной доски, бывают задачи, где раскраску с данными свойствами нужно придумать, и бывают задачи, где раскраска используется как идея решения.

Пример 1. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на «домино» из двух клеток

Решение. Каждая фигура «домино» содержит одну белую и одну чёрную клетку. Но в нашей фигуре 32 чёрных и 30 белых клеток (или наоборот).

Пример 2. Можно ли все клетки доски 9 × 9 обойти конем по одному разу и вернуться в исходную клетку?

Решение. Каждым ходом конь меняет цвет клетки, поэтому, если существует обход, то число чёрных клеток равно числу белых, что неверно.

Пример 3. Дан куб 6 × 6 × 6. Найдите максимально возможное число параллелепипедов 4×1×1 (со сторонами параллельными сторонам куба), которые можно поместить в этот куб без пересечений.

Идея решения. Легко поместить 52 параллелепипеда внутрь куба. Докажем, что нельзя больше. Разобьем куб на 27 кубиков 2×2×2. Раскрасим их в шахматном порядке. При этом образуется 104 клетки одного цвета (белого) и 112 другого (чёрного). Осталось заметить, что каждый параллелепипед содержит две чёрных и две белых клетки.

Ответ: 52.

Пример 4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 1. По принципу Дирихле по крайней мере две из его трёх вершин должны быть покрашены в один цвет.

Задачи

1. В каждой клетке доски 5×5 сидел жук. Затем каждый жук переполз на соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что осталась хотя бы одна пустая клетка.

2. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся 3 точки A, B, C одного цвета такие, что $AB = BC$

3. Раскрасьте прямую в три цвета так, чтобы нельзя было найти трёх точек A, B, C разного цвета таких, что $AB = BC$.

4. Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

5. Раскрасьте плоскость а) в 9, б) в 7 цветов так, чтобы не нашлось двух точек одного цвета на расстоянии 1.

6. Можно ли замостить доску 6 × 6 клеток полосками из трёх клеток и одним уголком из трёх клеток?

7. Можно ли замостить доску 10 × 10 прямоугольниками 4×1?

8. Можно ли доску 5×7 покрыть уголками из трёх клеток в несколько слоев (чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым числом уголков)?

Указание. Расставить числа, чтобы общая сумма была положительна, а сумма в каждом уголке – отрицательна.

§1.16. Игры

Под понятием *математической игры* мы понимаем игру двух соперников, обладающую следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется *позицией*, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики-нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада или результата бросания кости.

В математических играх существуют понятия *выигрышной стратегии*, т. е. набора правил (можно сказать, инструкции или алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (не зависимо от того, как играет его соперник), и ничейной стратегии, следуя которой один из игроков обязательно добьётся либо выигрыша, либо ничьей.

В любой математической игре существует либо выигрышная стратегия для одного из игроков, либо *ничейные стратегии* для обоих (если игра допускает ничью). В зависимости от этого игра называется выигрышной для первого или второго игрока, или ничейной.

Например, крестики-нолики (на доске 3 × 3) являются ничейной игрой. К какому из перечисленных случаев относятся шахматы и шашки неизвестно. Хотя стратегия (либо выигрышная, либо ничейная) в этих играх существует, она не найдена, поэтому соревнования по этим играм пока представляют интерес.

Соответствие. Наличие удачного ответного хода (может обеспечиваться симметрией, разбиением на пары, дополнением числа).

Решение с конца. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего. Очередная позиция являются выигрышной, если из неё можно получить ранее определённую проигрышную позицию, и является проигрышной, если любой ход из неё ведёт к попаданию в ранее определённую выигрышную позицию.

Передача хода. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в неё.

Пример 1. Двое кладут по очереди пятаки на круглый стол. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередной пятак. Кто выигрывает?

Решение. Выигрывает первый. Он кладёт пятак в центр стола, после чего на любой ход второго у первого всегда есть симметричный ответ.

Пример 2. В куче 25 камней. Игроки берут по очереди 2, 4 и 7 камней. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто победит?

Идея решения. Случаи 0 и 1 камня проигрышны для начинающего. Поэтому случаи 2, 3, 4, 5, 7, 8 камней для начинающего выигрышны: своим ходом он переводит игру в позицию, проигрышную для противника. Аналогично, 6 и 9 камней проигрышны для начинающего, поскольку из них можно перейти только в позицию, выигрышную для противника. Рассуждая аналогично, легко установить периодичность выигрышных и проигрышных позиций и получить ответ.

Пример 3. Докажите, что в игре «крестики-нолики» на бесконечной доске у ноликов отсутствует выигрышная стратегия.

Решение. Пусть у ноликов есть выигрышная стратегия. Тогда этой стратегией могут с тем же успехом воспользоваться крестики, игнорируя свой начальный знак. (Когда крестикам приходится ходить на поле, где крестик уже стоит, они ходят куда угодно.)

Пример 4. Две компании A и B получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц. Они по очереди ставят на неосвещённый перекресток прожектор, который освещает весь северо-восточный угол города (от нуля до 90). Премию О. Бендера получит та компания, которой на своем ходе нечего будет освещать. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Самый северо-восточный квартал города будет освещён в любом случае после первого хода. Допустим, у В есть выигрышная стратегия. Тогда у неё есть выигрышный ответ на ход А, состоящий в освещении только северо-восточного квартала. Но с этого же хода может начать игру А и затем воспользоваться выигрышной стратегией В! Противоречие. Значит, выигрышная стратегия есть у А.

Задачи

1. Есть куча из n спичек. Разрешается брать от 1 до 10 спичек, выигрывает взявший последнюю спичку. При каких n выигрывает начинающий?

2. В крайних клетках полоски 1×20 стоят белая и чёрная шашки. двое по очереди передвигают свою шашку на одну или две клетки вперед или назад, если это возможно (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку. Как играть начинающему, чтобы выиграть?

3. По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить один отрезок нельзя). Кто победит при правильной игре?

4. В строчку выписаны натуральные числа от 1 до 20. Двое по очереди ставят перед этими числами знак + или − (знак можно ставить перед любым числом, перед которым он ещё не стоит, включая первое). Игра заканчивается после того, как проставлены все 20 знаков, затем вычисляется значение получившегося выражения. Первый хочет добиться, чтобы оно было по абсолютной величине как можно меньше, а второй - как можно больше. Какое наибольшее по абсолютной величине значение может обеспечить в итоге второй игрок?

5. В строчку выписаны 1992 звёздочки. Двое игроков по очереди заменяют их на цифры от 0 до 9. Может ли второй игрок добиться того, чтобы окончательное число делилось бы на 1993?

6. Есть две кучи камней, причём в большей - 8 камней. Два игрока по очереди берут либо несколько камней из одной кучи, либо по равному количеству камней из обеих куч. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

7. На трёх крайних справа полях доски $1\times n$ стоит по фишке. Двое по очереди берут одну из фишек и передвигают её на несколько полей влево. Проигрывает тот, кто не может сделать свой ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. В 50 коробках лежат 100 конфет. Девочка и мальчик берут поочередно по конфете. Может ли мальчик добиться того, чтобы последние две конфеты лежали в одной коробке?

9. В одной куче 18 конфет, а в другой – 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят ещё на две кучи. Тот, кто не сможет поделить кучу (если там одна конфета), проигрывает. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?

10. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое по очереди соединяют узлы соседних клеток по вертикали или горизонтали, один красным отрезком, другой – синим.

Нельзя обводить один отрезок дважды. Может ли первый игрок создать замкнутый контур красного цвета?

11. Пять ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке). Кто победит, если игроки не делают ошибок?

12. На бесконечной плоскости расположены фишка-волк и 50 фишек-овец. Двое ходят по очереди: один игрок передвигает волка, а другой – одну из овец. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу?

§1.17. Процессы и операции

При решении многих олимпиадных задач организуют процессы. Бывают процессы построения нужного объекта, «причесывания задачи», последовательного улучшения некоторой величины и другие. Отметим, что спуск и индукция тоже являются процессами.

Пример 1. В парламенте у каждого не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого парламентария в своей палате будет не более одного врага.

Решение. Нет никакой надежды сразу указать нужное разбиение парламента, но можно построить это разбиение поэтапно с помощью процесса. Самое простое, что можно придумать, – пересаживать парламентариев по одному.

Разобьем парламент произвольным образом на две палаты и организуем процесс пересаживания: выберем парламентария, имеющего не менее двух врагов в своей палате, и пересадим его в другую палату. Общее число пар врагов, сидящих в одной палате, при этом уменьшается. Процесс остановится, поскольку число враждующих пар конечно.

Остановка процесса означает построение нужного разбиения.

Пример 2. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел одного столбца или одной строки. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, были неотрицательны.

Решение. Организуем процесс: если сумма чисел в какой-то строке (или в каком-то столбце) отрицательна, то поменяем знак у чисел этой строки (столбца). Для доказательства остановки этого процесса найдем некоторую характеристику таблицы, которая монотонно возрастает при каждом шаге. Искомая характеристика – сумма всех чисел. На каждом шаге эта сумма увеличивается. Процесс закончится, поскольку количество расстановок знаков при числах конечно.

Пример 3. В некоторой стране из каждого города выходит нечётное число дорог. На центральной площади каждого города поднят чёрный или белый флаг. Каждое утро в одном из городов, у которого число соседей с флагами другого цвета больше половины, меняют цвет флага. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Решение. Рассмотрим число дорог с концами в городах с различным цветом флагов. Это число целое положительное и каждое утро оно уменьшается. Значит, процесс закончится.

Пример 4. На плоскости дано N точек. Некоторые точки соединены отрезками. Если два отрезка пересекаются, то их можно заменить двумя другими с концами в тех же точках. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно.

Идея решения. На каждом шаге сокращается суммарная длина всех проведенных отрезков (это следует из неравенства треугольника), и всего существует лишь конечное число расположений отрезков с вершинами в данных точках. Поэтому данный процесс не может продолжаться бесконечно.

Пример 5. На плоскости расположены N точек. Постройте замкнутую ломаную без самопересечений, проходящую через каждую точку.

Указание. Организуйте процесс как в примере 4. Замечание. Решения, полученные с помощью процессов, часто оформляют с помощью метода крайнего – рассматривая экстремальные объекты. Например, решение этой задачи можно оформить и без понятия процесса, рассмотрев кратчайшую замкнутую ломаную, соединяющую данные N точек.

Пример 6. Вокруг города Зурбагана проходит кольцевая дорога. Все улицы начинаются или кончаются только на этой дороге и никакие две улицы не имеют двух различных пересечений. Части, на которые улицы разбивают город, называются микрорайонами. В городе ввели одностороннее движение на всех улицах и кольцевой дороге. Докажите, что хотя бы один микрорайон можно объехать по правилам.

Решение. Выберем любую улицу, она разбивает город на две части. Эта улица вместе с одной из частей кольцевой дороги образует новое кольцо с односторонним движением. Внутри этого кольца все улицы образуют меньший город аналогичный Зурбагану. Снова выделим одну улицу и т. д. Поскольку число улиц уменьшается, то мы придём к городу, состоящему из одного квартала.

Пример 7. На кольцевой дороге стоят бензоколонки. Общее количество бензина в них достаточно, чтобы объехать круг. Докажите, что автомобиль с пустым баком может стартовать от некоторой бензоколонки и, заправляясь по дороге, объехать весь круг. (Бак достаточно большой.)

Решение. Попробуем упростить задачу – разрешим автомобилю ездить только в одном направлении. Рассмотрим для каждой бензоколонки её «область доезда» – максимальный путь, который может проехать автомобиль с пустым баком, стартовав от этой бензоколонки и заправляясь по дороге. Ясно, что области доезда для попутных бензоколонок содержатся внутри области доезда исходной, поэтому можно считать, что весь их бензин перелит в исходную бензоколонку. К чему приведёт такой процесс переливания? Число бензоколонок будет уменьшаться. Но поскольку суммарная длина областей доезда равна длине круга, то они перекрываются и процесс переливания возможен, пока весь бензин не окажется в одной бензоколонке. С неё-то и можно объехать весь круг. (Это очевидно, поскольку её область доезда после переливаний не менялась.)

Пример 8. Существует ли на координатной плоскости правильный многоугольник, имеющий более шести сторон, все вершины которого – целые точки.

Решение. Заметим, что если стороны многоугольника перенести параллельно в один узел решетки, то их вторые концы образуют правильный n-угольник с вершинами в узлах решетки, но длина его стороны будет меньше, чем у исходного (докажите).

Для решения задачи организуем процесс. Пускай такой n-угольник существует. Тогда построим многоугольник меньшего размера, вершины которого также принадлежат узлам решетки. Повторив эту операцию несколько раз (докажите, что при таком процессе длина стороны nугольника стремится к нулю), получим n-угольник, который может поместиться внутри одной клетки, но, с другой стороны, все его вершины лежат в узлах решетки. Из этого противоречия вытекает невозможность построения исходного n-угольника.

Задачи

1. Есть N прямых общего положения и N точек. Докажите, что их можно занумеровать так, что перпендикуляры, опущенные из этих точек на прямые с теми же номерами, не будут пересекаться.

2. На заседании каждый член парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что парламент можно разбить на три фракции так, что члены одной фракции пощёчин друг другу не давали.

3. Запись числа состоит из нулей и единиц. Любой фрагмент числа «10» заменяют на «0001». Докажите, что наступит момент, когда заменять будет нечего.

4. Докажите, что N точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше N и расстояние между любыми двумя из которых больше 12. (Расстояние между кругами – это расстояние между их ближайшими точками.)

5. Шахматную доску 8×8 покрыли 32 прямоугольниками из двух клеток (доминошками). Докажите, что найдутся две доминошки, образующие квадрат 2×2.

6. N доминошек уложены в виде прямоугольника. Если две доминошки образуют квадрат, то их можно повернуть на 90 . Докажите, что можно все доминошки сориентировать одинаково.

7. Дан произвольный набор из n целых чисел: . Из него получается новый набор: ——; из этого набора – следующий по тому же правилу и т. д. Докажите, что если все получающиеся числа – целые, то первоначальные числа равны между собой.

8. Дан треугольник с разными сторонами. В него вписывают окружность. В точках касания строят новый треугольник. В него снова вписывают окружность и т. д. Докажите, что среди получившихся треугольников нет двух подобных.

9. Докажите, что если последняя цифра числа n не нуль, то существует такое целое k, что в десятичной записи числа kn нет нулей.

10. В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу. Докажите, что найдутся два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

11. Дан ориентированный граф. Из каждой его вершины выходит n стрелок, и в каждую его вершину входит n стрелок. Докажите, что можно убрать часть рёбер так, чтобы он разбился на циклы.

12. Имеется неограниченное число чёрных и белых кубиков. Надо построить из них сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый – с нечётным числом чёрных. При любом ли заданном нижнем слое кубиков такую башню (конечной высоты) можно построить?

13. Две карты Москвы разного масштаба наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обоих картах была проколота одна и та же точка Москвы.

14. а) Внутри квадрата со стороной 1 расположены четыре точки. Докажите, что из них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит 1.

б) Та же задача для куба с восемью точками.

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

§2.1. Занимательные задачи

1. Три охотника устроили привал. Первый насыпал в котелок одну кружку крупы, второй – 2 кружки. Сварили кашу и съели втроем поровну. В благодарность третий предложил первым двум 8 патронов. Как разделить патроны? Какое решение имеет задача, если первый и второй насыпали 3 и 5 кружек соответственно?
2. В одной бутылке литр молока, в другой — литр воды. Из первой бутылки во вторую перелили ложку молока, а затем из второй в первую – ложку получившейся смеси. Чего больше: воды в первой бутылке или молока во второй?
3. Людоеды поймали трех мальчиков, привязали их к столбам так, что каждый видит двух других, и показали им 2 черные и 3 белые шляпы. Затем им повязали на глаза повязки и надели на каждого одну из этих шляп, оставшиеся 2 шляпы выбросили. Отпустят только тех, кто угадает цвет своей шляпы. Повязки сняли. Что делать?
4. Проснувшись утром, Вася обнаружил, что его настенные часы остановились. Других часов у него не было, телевизора, радио, мобильного телефона не было тоже. Вася завел часы и подумал, как же ему узнать точное время. В результате размышлений он отправился к своему другу домой. Пробыв у него некоторое время, он вернулся домой и довольно точно установил стрелки настенных часов. Как ему это удалось?
5. У Васи есть два шнура (фитиля). Каждый шнур, подожженный с конца, полностью сгорает ровно за один час, но при этом горит с неравномерной скоростью. Как при помощи этих шнуров и зажигалки отмерить время в 45 минут?
6. Через 5 минут часовая и минутная стрелки часов совпадут. Через сколько минут угол между стрелками впервые станет таким же, что и 10 минут назад?
7. Вася и Маша договорились встретиться у входа в парк ровно в 8 часов вечера. У Васи часы отстают на 3 минуты, однако он считает, что они спешат на 2 минуты. У Маши часы спешат на 2 минуты, но она считает, что они отстают на 3 минуты. Кто опоздает на свидание?
8. Есть 3 коробки. На первой написано «Апельсины», на второй — «Бананы», на третьей — «Апельсины и бананы». В одной действительно лежат апельсины, в другой — бананы, в оставшейся — апельсины и бананы, но все надписи заведомо ложны. Разрешается достать один фрукт только из одной коробки. Как определить, что в какой коробке лежит?
9. В гостиницу приехал турист. Денег у него не было, но была серебряная цепочка из семи звеньев. Он договорился с хозяином, что за каждый день пребывания в гостинице он будет расплачиваться одним звеном цепочки (ежедневно!), при этом хозяин предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена. Сможет ли турист прожить в гостинице неделю?

10. У Васи нашли смертельную болезнь. Доктор выписал ему 4 таблетки двух видов (по две каждого вида), совершенно неотличимых друг от друга, и предупредил, что, если выпить более одной таблетки одного вида — смерть, не выпить таблеток — смерть, выпить за раз меньше нормы — смерть. Таблетки надо принять за два приема: утром — 2 таблетки (по одной каждого вида) и также вечером — 2 таблетки (по одной каждого вида). К несчастью, Вася смешал таблетки. Как ему гарантированно выжить?

11. Встречаются два математика, не видевшиеся много лет. Идет следующий диалог:
—Привет! Как дела?
— Хорошо. Растут два сына, дошкольника.
— А сколько им лет?
— Произведение их возрастов равно числу голубей около этой скамейки.
— Этой информации мне недостаточно.
— Старший похож на мать.
— Теперь все понятно.
Назовите возраст сыновей.

12. Встречаются два математика, не видевшиеся много лет. Идет следующий диалог:
— Дети есть?
— Да, трое сыновей.
— А сколько им лет?
— Ну ты же математик, попробуй дойти сам. Если перемножить их возрасты, будет 36.
— Но этой информации мне недостаточно!
— Сумма их возрастов равна номеру вон того троллейбуса.
— Все равно недостаточно информации.
— А младший сын у меня рыжий.
— Вот теперь я знаю ответ на свой вопрос!
Назовите возраст детей.

13. Боря и Вася познакомились с Аней. Они хотят знать, когда у неё день рождения. Аня предложила им десять возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа. Затем Аня сказала Боре месяц своего рождения, а Васе — день. После этого состоялся диалог.
Боря: Я не знаю, когда у Ани день рождения, но я знаю, что Вася тоже не знает.
Вася: Поначалу я не знал, когда у Ани день рождения, но знаю теперь.
Боря: Теперь я тоже знаю, когда у Ани день рождения.
Когда у Ани день рождения?

14. Муж вернулся с работы домой, жена ему приготовила ужин, но решила ему дать задачку. Она написала 4 записки с указанием, где находится ужин. Эти записки она прикрепила : к холодильнику, к кухонному шкафчику, к хлебнице, к газовой плите. На двери в кухню была еще записка: "ужин находится в кухне, но правда написана только в одной записке". Четыре записки имели содержание:
На шкафчике: "ужин либо в холодильнике, либо в хлебнице".
На холодильнике: "ужин либо в шкафчике, либо в духовке".
На хлебнице: "ужина здесь нет".

На плите: "ужин здесь, в духовке".
Где находится ужин?

15. Есть несколько вагонов, сцепленных между собой по кругу. Внутри ходит Вася, он должен посчитать количество вагонов. Вася может только включать или выключать свет в вагонах. Как ему это сделать? Вначале свет горит случайным образом. Количество вагонов может быть очень большим.

16. Из городов А и Б, расстояние между которыми 300 км, выезжают два поезда со скоростями 70 км/ч и 80 км/ч. Вместе с первым поездом навстречу второму со скоростью 100 км/ч вылетает муха. Долетев до второго поезда, муха разворачивается и летит обратно к первому поезду. Достигнув его, она опять разворачивается, летит навстречу второму поезду и т.д., пока поезда не встретятся. Какое расстояние пролетит муха?

17. Из порта А в порт Б и из порта Б в порт А каждый день отправляются корабли в одно и то же время (часовые пояса не учитывать). Корабль от выхода из порта отправления до входа в порт назначения идет ровно 7 суток. Сколько кораблей встречает на своем пути каждый?

18. Василий решил навестить племянников и подарить им конфет на Новый год. Пока он собирался, жена давала ему наставления: «Сначала зайди в магазин и купи конфет. Да смотри — бери не абы какие, а получше и повкуснее. И не забудь сосчитать, сколько конфет берешь. Если число конфет будет не кратно 4, то оно должно быть непременно между 60 и 69. Если число конфет будет кратно 3, то оно должно быть от 50 до 59. А если число конфет не кратно 6, то оно должно быть между 70 и 79». Сколько конфет нужно купить Василию?

19. У Васи есть два одинаковых стеклянных шарика. За какое минимальное число бросков можно гарантированно определить, начиная с какого этажа 100-этажного здания шарики разбиваются?

20. Однажды Васю в гости пригласил Боря, который во время беседы решил проверить его сообразительность. Он отвел Васю в абсолютно темную комнату и дал ему следующее задание. В комнате на столе лежит 50 монет. 10 из них лежат орлом вверх. Монеты абсолютно одинаковые. Наощупь орел и решка неотличимы. Необходимо разделить монеты на две группы так, чтобы в каждой группе было одинаковое количество монет, лежащих орлом вверх.

21. В тюрьме сидят 10 заключенных, каждый — в одиночной камере. Общаться между собой они не могут. В один прекрасный день начальник тюрьмы объявил им, что предоставляет всем шанс выйти на свободу, и предложил следующие условия: «В подвале тюрьмы есть комната с лампочкой (изначально лампочка выключена). Вас будут в произвольном порядке по одному приводить в эту комнату и через несколько минут уводить. Находясь в комнате, вы можете включать/выключать лампочку или ничего с ней не делать. Персонал тюрьмы трогать лампочку не будет. В какой-то момент один из вас (любой) должен сказать, что в комнате побывали все заключенные. Если он окажется прав — всех отпустят, если ошибется — вы навсегда останетесь в тюрьме. Я обещаю, что в комнате побывают все заключенные и что каждого из вас будут приводить туда снова и снова». После этого заключенным разрешили собраться и обсудить стратегию, потом развели по камерам. Что им нужно делать, чтобы гарантированно выйти на свободу?

22. Зачет в группе из N студентов происходит так: преподаватель выстраивает студентов в колонну по одному и надевает каждому шапку белого или чёрного цвета. Все студенты видят, какого цвета шапки каждого из стоящих впереди, а цвет своей и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из студентов должен назвать цвет, дальше он молчит. Так продолжается, пока не выскажется каждый студент. После этого преподаватель поставит зачет каждому правильно назвавшему цвет своей шапки. Накануне студенты каким-то образом проведали о правилах зачета и договорились, как минимизировать число заваливших. Скольким из них гарантированно удастся получить зачет?

23. Патриций решил устроить праздник и для этого приготовил 240 бочек вина. Однако к нему пробрался недоброжелатель, который подсыпал яд в одну из бочек. Злодея тут же поймали и казнили. Про яд известно, что человек, его выпивший, умирает в течение часа (не обязательно ровно через час, может и через минуту). До праздника осталось всего два часа. У патриция есть пять рабов, которыми он готов пожертвовать, чтобы узнать в какой именно бочке яд. Как вычислить отравленную бочку?

24. У Васи есть куча кирпичей и линейка. Можно ли одним замером измерить диагональ кирпича?

25. Вася и Маша решили сыграть в игру: по очереди кладут на круглый стол монеты. Тот, кому некуда положить монету, проигрывает. Монеты могут соприкасаться и краями выходить за границы стола (но чтоб не падали), но не могут лежать друг на друге. Все монеты одного размера, идеально ровные и круглые. Стол тоже идеально ровный и круглый. Есть ли выигрышная стратегия У Васи или Маши?

26. Пришел в магазин покупатель и спрашивает: «Сколько стоит кровать?» Один из продавцов ему отвечает: «600 фунтов». Покупатель удивляется, что очень дорого, но тут другой продавец ему говорит: «Знаете, у первого продавца есть особенность — он все числа называет в 12 раз больше, чем они есть на самом деле, а в остальном он совершенно прав». Покупатель снова обращается к первому продавцу: «Ну хорошо, значит, я понял, что кровать стоит 50 фунтов, поскольку вы всё увеличиваете в 12 раз». Тот отвечает: «Кто вам такое сказал, мой напарник? Знаете, у него есть одна особенность — он все числа преуменьшает в 3 раза, а так, в остальном он совершенно прав». Сколько стоит кровать на самом деле и сколько за нее попросил бы второй продавец?

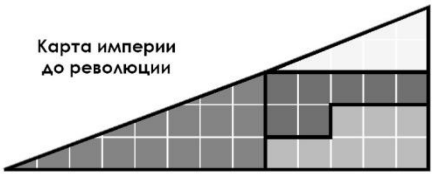
27. В вершинах квадрата со стороной 100 метров сидит по собаке. По команде «Старт!» каждая из них начинает гнаться за своей соседкой слева со скоростью 10 метров в секунду. Каждая собака бежит точно в направлении текущего положения своей (тоже, разумеется, бегущей) цели. Поэтому их траектории представляют некие сходящиеся спирали. Через какое время все собаки сойдутся в центре? Как изменится ответ, если квадрат заменить на равносторонний треугольник? Правильный шестиугольник?

28. Вася задумал десятизначное число. Первая его цифра указывает количество нулей в этом числе, вторая - количество единиц, ... , десятая – количество девяток. Какое число задумал Вася?

29. Чтобы от театра доехать до цирка, можно сесть на остановке на автобус №1 или на автобус №2. Они ходят с постоянными интервалами, причем автобус №1 в 2 раза реже, чем №2. За последние 20 минут автобус прошёл 16 минут назад, 10 минут назад и 2 минуты назад. Через сколько минут придёт следующий автобус?

30. У Васи есть куча кирпичей и линейка. Можно ли одним замером измерить диагональ кирпича?

31. У Васи есть бутылка с водой и угольная линейка. Бутылка не фигурная, ровная, с плоским дном, без этикетки. Как найти ее объем (толщиной стенок можно пренебречь)?



32. Великая Треугольная Империя была разделена на четыре княжества. Однако после революции новый император переместил территории княжеств в другие места Империи, не меняя их формы, да еще и выделил себе землю под личный замок. Но если форма (и площадь) княжеств не менялась, откуда взялась земля под замок?

33. Три человека должны добраться как можно быстрее из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 30 км. У них есть два велосипеда (на каждом велосипеде может ехать только один человек). Скорость на велосипеде 15 км/ч, а пешком – 5 км/ч. За какое наименьшее время можно это сделать?

§2.2. Задачи школьных математических олимпиад

Логические задачи

34. Путешествуя по острову, Вася попал в плен к местным туземцам-аборигенам. Аборигены были жестоким племенем и сообщили ему, что его казнят, но каким способом – зависит от него. Если он скажет неправду, то его сбросят со скалы, а если правду – съедят. Что должен сказать Вася?

35. На ступеньках дома сидят рядышком мальчик и девочка.
– Я мальчик, – говорит ребёнок с чёрными волосами.
– А я девочка, – говорит ребёнок с рыжими волосами.
Если по крайней мере один из детей говорит неправду, то кто из них мальчик, а кто девочка?

36. На острове живут правдивцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые постоянно лгут. Остров посетил турист. В аэропорте к нему подошел местный житель и предложил услуги экскурсовода. Турист попросил его спросить у случайного прохожего, является тот правдивцем или лжецом. Вернувшись, местный сообщил: «Прохожий сказал, что он лжец». После этого турист отказался от его услуг. Почему?

37. В парламент одной страны избраны две партии: «Партия лжецов» и «Партия правдивцев». Всего — 101 депутат. В целях сокращения бюджета на парламент руководство страны решило уменьшить состав парламента на одного человека. Но каждый из депутатов высказался, что если его исключат из парламента, то среди оставшихся депутатов большинство будут лжецами. Сколько лжецов и правдивцев было изначально в парламенте?

38. В комнате 10 ребят, какие-то из них — правдивцы, а какие-то — лжецы. Первый сказал: «Здесь нет ни одного правдивца», второй: «Здесь не более одного правдивца», третий: «Здесь не более двух правдивцев», ..., десятый «Здесь не более 9 правдивцев». Сколько правдивцев в комнате?

39. Есть несколько вагонов, сцепленных между собой по кругу. Внутри ходит Вася, он должен посчитать количество вагонов. Вася может только включать или выключать свет в вагонах. Как ему это сделать? Вначале свет горит случайным образом. Количество вагонов может быть очень большим.

40. Из порта А в порт Б и из порта Б в порт А каждый день отправляются корабли в одно и то же время (часовые пояса не учитывать). Корабль от выхода из порта отправления до входа в порт назначения идет ровно 7 суток. Сколько кораблей встречает на своем пути каждый?

41. Василий решил навестить племянников и подарить им конфет на Новый год. Пока он собирался, жена давала ему наставления: «Сначала зайди в магазин и купи конфет. Да смотри — бери не абы какие, а получше и повкуснее. И не забудь сосчитать, сколько конфет берешь. Если число конфет будет не кратно 4, то оно должно быть непременно между 60 и 69. Если число конфет будет кратно 3, то оно должно быть от 50 до 59. А если число конфет не кратно 6, то оно должно быть между 70 и 79». Сколько конфет нужно купить Василию?

42. Однажды Васю в гости пригласил Боря, который во время беседы решил проверить его сообразительность. Он отвел Васю в абсолютно темную комнату и дал ему следующее задание. В комнате на столе лежит 50 монет. 10 из них лежат орлом вверх. Монеты абсолютно одинаковые. Наощупь орел и решка неотличимы. Необходимо разделить монеты на две группы так, чтобы в каждой группе было одинаковое количество монет, лежащих орлом вверх.

Задачи на взвешивания

43. Из 9 монет одна фальшивая, она легче остальных. За какое минимальное число взвешиваний на чашечных весах гарантированно можно найти фальшивую?

44. В куче из m монет одна фальшивая, она легче остальных. Чему может равняться m, чтобы за три взвешивания на чашечных весах гарантированно можно было найти фальшивую? А если взвешиваний 4, 5,…, n? Сколько взвешиваний понадобится, если m=10000000000000000?

45. Имеется 101 монета. Среди них 100 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как это сделать при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

46. Имеется 10 монет, различных по весу. За 13 взвешиваний найдите самую тяжелую и самую легкую монеты.

47. Есть 10 мешков с монетами. Один из них целиком заполнен фальшивыми монетами, которые на один грамм легче настоящих. За одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, определите «фальшивый» мешок.

48. Есть 10 мешков, некоторые из которых целиком заполнены фальшивыми монетами, а все остальные – настоящими. Фальшивая монета на один грамм легче настоящей. Про один из мешков точно известно, что он наполнен настоящими монетами. За одно взвешивание на весах со стрелкой определите все «фальшивые» мешки.

49. Есть 6 монет, из которых две – фальшивые, весящие меньше настоящих. За 3 взвешивания определите обе фальшивые монеты.

50. Есть 5 монет, из которых три настоящих, одна – фальшивая, которая весит больше настоящей, и одна – фальшивая, которая весит меньше настоящей. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

51. Имеется 6 гирь: по паре зеленых, красных и белых. В каждой паре одна гиря тяжелая, а другая – легкая, причем все тяжелые гири весят одинаково и все легкие гири весят одинаково. За 2 взвешивания определите все 3 тяжелые гири.

52. Неточные весы показывают вес, который может отличаться от настоящего, но не больше, чем на 0,5 кг (при разных взвешиваниях отклонения показаний весов от истинного веса могут быть разными). Петя взвесил на них свой портфель. Весы показали 5 кг. Портфель Васи потянул на 4 кг. А когда Петя с Васей положили на весы оба портфеля, они показали 10,5 кг.

53. Продавец для взвешивания товара пользуется чашечными весами и четырьмя гирями общим весом 40 кг. Причем, используя различные комбинации гирь, можно взвесить любой груз, масса которого выражается целым числом килограммов (от 1 до 40 кг). Какой вес каждой из гирь?

Принцип Дирихле

54. В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы.

55. В группе 25 человек. Докажите, что хотя бы у трех студентов день рождения приходится на одинаковый месяц.

56. Родители 25 учеников 5 класса купили своим детям мобильные телефоны восьми разных моделей. Найдутся ли четыре ученика, имеющие телефоны одной модели?

57. В классе 30 учеников. На контрольной работе по математике Вася решил 13 примеров, а остальные ученики – меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика решили одинаковое количество примеров на контрольной.

58. В стране m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m пассажиров. Еще один футболист прилетел к месту предстоящего матча на вертолете. Докажите, что хотя бы одна команда была целиком доставлена в другую страну.

59. На клетчатой плоскости дано 5 произвольных узлов сетки. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих какие-то две из этих точек, также является узлом сетки.

60. Доказать, что среди шести целых чисел найдутся два числа, разность которых делится на 5.

61. На доске записаны 52 произвольных натуральных числа. Докажите, что среди этих чисел можно выбрать два таких, что либо их сумма, либо разность заканчивается на 00.

62. Провожая Васю домой, бабушка приготовила внуку ящик с фруктами. Там были яблоки, груши и сливы. Если вытащить из ящика любые 100 фруктов, среди них обязательно будут яблоки и груши. Какое наибольшее количество фруктов могла положить в ящик бабушка?

63. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

64. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдется несколько чисел, сумма которых делится на 10.

65. На плоскости проведены 10 прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что среди этих прямых найдутся две, угол между которыми не больше 18^{o}.

66. В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка — точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.

67. Докажите, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более 5 точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

68. В комнате 8х8 метров 15 колонн. Доказать, что в комнате можно разместить стол 2х2 метра (толщиной колонн можно пренебречь).

69. Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

70. В коробке лежат 10 красных карандашей, 8 синих, 8 зеленых и 4 желтых. Наугад (произвольно) из коробки вынимают n карандашей. Определить наименьшее число карандашей, которые необходимо вынуть, чтобы среди них было:

1) не менее 4 карандашей одного цвета;
2) по одному карандашу каждого цвета;
3) хотя бы 6 карандашей синего цвета.

71. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

72. Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Четность

73. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки « + » и « – » так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

74. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2010?

75. На доске написаны числа 1, 2,3, …,2017. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

76. Можно ли покрыть шахматную доску доминошками 1x2 так, чтобы свободными остались только клетки al и h8?

77. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка АВ. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки А не равна сумме расстояний от этих точек до точки В.

78. По кругу расставлено 9 чисел - 4 единицы и 5 нулей. Каждую секунду над числами проделывают следующую операцию: между соседними числами ставят ноль, если они различны, и единицу, если они равны; после этого старые числа стирают. Могут ли через некоторое время все числа стать одинаковыми?

79. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.

80. Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Делимость и остатки

81. В некотором государстве было 10 банков. С момента перестройки общества все захотели стать банкирами. Но по закону открыть банк можно только путем деления уже существующего банка на 4 новых. Через некоторое время министр финансов сообщил президенту, что в стране действует 2000 банков, после чего был немедленно уволен за некомпетентность. Что не понравилось президенту?

82. На сколько нулей оканчивается число 100! ?

83. Может ли n! оканчиваться ровно на 5 нулей?

84. Известно, что 15! =13076*4368000. Найдите цифру, заменённую звездочкой.

85. Найдите последнюю цифру числа 1! + 2! + … + 99!.

86. Докажите, что число, имеющее нечетное число делителей, – точный квадрат.

87. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6.

88. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причем одинаковые цифры - на одинаковые буквы, а разные - на разные. В итоге у него получилось АБ*ВГ=ДДЕЕ. Докажите, что он где-то ошибся.

89. Найти все натуральные числа, каждое из которых равно квадрату числа всех своих делителей.

90. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

91. $56a = 65b$. Докажите, что $a+b$ – составное число.

92. Найдите остатки от деления

1) 9^{100} на 8;
2) 2^{1000} на 3;
3) 2016^{2016} на 3,5,7,9,11;
4) $2222^{5555} - 5555^{2222}$ на 7;
5) 1000…0 (2017 нулей) на 15;
6) 20172017…2017 (число 2017 записано 2017 раз) на 45;
7) 2017^{2016} на 45.

93. Какое наименьшее число, записанное только нулями и единицами, делится на 225?

94. Вася утверждает, что из 8 различных цифр он составил число, делящееся на любую из этих цифр. Не ошибся ли он?

95. Вася выбрал три разные цифры и записал все возможные трехзначные натуральные числа, десятичная запись каждого из которых содержит все три выбранные цифры, но не может начинаться с нуля. Выяснилось, что сумма всех записанных чисел равна 3376. Найдите, какие цифры выбрал Вася, и докажите, что других вариантов нет.

96. Доказать, что сумма положительных делителей квадрата натурального числа является нечетным числом.

97. При каком наибольшем натуральном n модуль выражения $n^2 - 4n - 21$ является простым числом?

98. Докажите, что если x^2+y^2 делится на 3 и числа x, y целые, то x и y делятся на 3.

99. Докажите, что если сумма трёх целых чисел делится на 6, то и сумма кубов этих чисел делится на 6.

100. Докажите, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

101. Докажите, что если p и q простые числа и $p>3$, $q>3$, то $p^2–q^2$ делится на 24;

102. Докажите, что если $n>2$ и нечетно, то $n^5–n$ делится на 120. При каких четных n число $n^5–n$ делится на 120?

103. p, $p + 10$, $p +14$ - простые числа. Найдите p.

104. p, $2p + 1$, $4p +1$ - простые числа. Найдите p.

105. Докажите, что сумма двух последовательных простых чисел, начиная с числа 3, раскладывается не меньше чем на три простых множителя (возможно, одинаковых).

106. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

107. Докажите, что сумма n последовательных нечетных натуральных чисел при $n>1$ является составным числом.

108. Сколько раз использована цифра 1 при записи всех чисел от 1 до миллиарда?

109. Какова сумма всех цифр, используемых при записи всех чисел, первое из которых единица, а последнее миллион?

110. Докажите, что число 11…1, записанное 2016 единицами, делится на 37.

111. Сколько существует натуральных чисел, наибольший делитель которых (не считая самого числа) равен 91?

112. Какая последняя цифра числа $1^2+2^2+3^2+...+1000^2$?

113. На какую цифру оканчивается число 2017^{2017}?

114. Найдите последнюю цифру числа $7^{7\wedge 7}$.

115. Переписывая с доски числовое выражение a^5b^2, Вася допустил ошибку и был очень удивлен, что записанное им число $a5b2$ является значением данного выражения. Какими могут быть цифры a и b?

116. Учитель написал на доске некое натуральное число. После этого первый ученик сказал: «Это число делится на 1». Второй сказал: «Это число делится на 2», ..., 50-й сказал: «Это число делится на 50». И что интересно, только двое из них были неправы. Более того, два неверных утверждения были сделаны подряд одно за другим. Какое наименьшее число мог написать на доске учитель?

117. Докажите, что число $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2004}\right)\cdot 2004!$ делится на 2005.

118. Какой множитель нужно вычеркнуть из произведения $1!\cdot 2!\cdot ...\cdot 20!$, чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого числа?

119. Чему равен старший делитель числа $3^{2017}+6$?

120. Сколько существует чисел, старший делитель которых больше младшего в 25 раз?

121. Найдите первые 10 цифр после запятой в числе $\left(1+\sqrt{3}\right)^{1000}$.

Геометрические задачи

122. На сковородке лежат два блина одинаковой формы и ориентации. Можно ли одним прямолинейным разрезом разделить их пополам?

123. У Андрея и Бориса есть прямоугольный торт, из которого кто-то вырезал прямоугольный кусок. Всегда ли можно разделить оставшуюся часть торта пополам одним прямолинейным разрезом, и если да, то как?

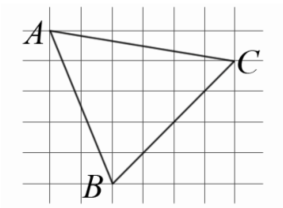
124. Вася хочет оградить гибкой проволокой длиной 100 метров прямоугольный участок, используя уже имеющийся двадцатиметровый забор в качестве части одной из сторон. Какой наибольшей может оказаться площадь участка?

125. Плоскость раскрашена в черный и белый цвета. Доказать, что существуют две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1 метр.

126. Плоскость раскрашена в черный и белый цвета. Доказать, что существует правильный треугольник, вершины которого имеют один цвет.

127. Окружность раскрашена в черный и белый цвета. Доказать, что найдутся три точки одного цвета, чтобы треугольник с вершинами в этих точках был равнобедренным.

128. Участок под клубнику прямоугольной формы, длина которого в 3 раза больше ширины, окружен оградой, отстоящей от сторон участка на 2 м. Площадь, ограниченная оградой, на 128 $м^2$ больше площади самого участка. Чему равна длина участка?



129. Если площадь каждой клетки равна 1, то чему равна площадь треугольника?

130. Населенные пункты А и Б находятся по одну сторону от прямолинейной реки. Вася выходит из А, подходит к реке, а затем идет в Б. Как ему минимизировать путь?

131. Населенные пункты А и Б находятся по разные стороны от прямолинейной реки (река достаточно широкая). Где надо построить мост через реку, чтобы путь из А в Б был минимален?

132. Населенные пункты А и Б находятся по одну сторону от дороги на одинаковом расстоянии от нее. Для какой В точки на дороге произведение расстояний от АВ*БВ минимально?

133. Маленькие арбузы стоят 2 рубля, а большие – 15 рублей за штуку. Какие арбузы покупать выгоднее, если известно, что большой арбуз в обхвате вдвое больше маленького?

134. На окраску куба размерами 2x2x2 требуется 2 грамма краски. Сколько краски потребуется на покраску куба размером 6x6x6?

135. После 7 стирок кусок мыла уменьшился вдвое по длине, ширине, высоте. На сколько стирок хватит оставшегося куска?

136. На окраску (снаружи) ящика с крышкой объемом 25 литров потратили 150 граммов краски. Сколько краски потребуется на покраску ящика объемом 200 литров?

2	4
6	

137. Прямоугольник разделен двумя отрезками на четыре прямоугольника, периметры трех из которых равны 2, 4, 6. Чему равны площадь и периметр всего прямоугольника?

138. От середин сторон квадрата к некоторой его внутренней точке проведены четыре отрезка, разбивающие квадрат на четыре части площадью 2, 3, 4 и S. Найдите S – площадь самой большой части.

139. У Васи есть бутылка с водой и угольная линейка. Бутылка не фигурная, ровная, с плоским дном, без этикетки. Как найти ее объем (толщиной стенок можно пренебречь)?

140. Паук сидит в центре грани AA_1B_1B кубической комнаты $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 м, а муха – на ребре CC_1 на высоте 1 м от пола. Какую длину имеет кратчайший путь паука к мухе?

141. Чему равна наибольшая площадь треугольника, ни одна высота которого не превышает 1 см?

142. Вася стоит в центре круглого поля радиуса 100 метров, за ним наблюдает Маша. Вася последовательно делает шаги по 1 м., но после каждого шага Маша может, если захочет, потребовать от Васи сделать 2 шага в направлении, противоположном последнему шагу. Может ли Вася гарантированно (в независимости от действий Маши) покинуть поле?

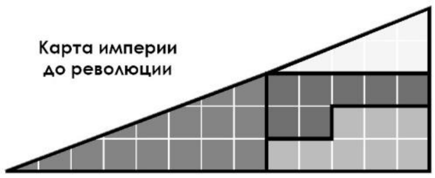
143. Площадь треугольника со сторонами a и b равна $(a^2+b^2)/4$. Чему равны углы треугольника?

144. Из трех точек, находящихся на расстояниях 20, 40 и 60 метров от основания водонапорной башни, башня видна под углами, сумма которых равна 90°. Чему равна высота башни?

145. Как построить квадрат с помощью очень длинной односторонней линейки с 2 метками? (Примечания: Такая линейка позволяет проводить только прямые и откладывать заданный отрезок. Сторона построенного квадрата может быть произвольной.)

146. Вася находится в лодке в центре круглого озера радиуса R. На берегу — Маша, она может двигаться только по суше со скоростью в 4 раза большей, чем скорость лодки Васи. Васе нужно убежать от Маши, для этого достаточно приплыть к берегу в некоторой точке раньше Маши. Сможет ли он это сделать?

147. Вася находится в дремучем лесу, который по площади занимает ровно 100 км^2. Форма леса неизвестна, но лес сплошной, без полян. Вася хочет выбраться из леса, пройдя минимально возможное расстояние. Какова длина и форма минимального маршрута?



148. Великая Треугольная Империя была разделена на четыре княжества. Однако после революции новый император переместил территории княжеств в другие места Империи, не меняя их формы, да еще и выделил себе землю под личный замок. Но если форма (и площадь) княжеств не менялась, откуда взялась земля под замок?

Доказательство неравенств

149. Докажите, что при любых $x,y,z > 0$

1) $x+y\ /2 \ge \sqrt{xy}$;

2) $x + 1/x \geq 2$;

3) $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$;

4) $1/x + 1/y \geq 4/(x + y)$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

6) $(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8xyz$;

7) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$;

8) $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

150. Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, удовлетворяющих условию $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n = 1$, докажите, что $1 + a_1 \quad 1 + a_2 \ \ldots\ 1 + a_n \quad > 2^n$.

151. Для любых $a, b > 0$, удовлетворяющих условию $ab = 1$, докажите, что $\dfrac{a}{a^2+3} + \dfrac{b}{b^2+3} \leq \dfrac{1}{2}$.

152. Сумма трех положительных чисел равна шести. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.

Проценты

153. Некоторый товар стоил 500 рублей. Цену на него увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Какой стала цена в итоге?

154. Цены снизили на 20%. На сколько процентов больше можно купить товаров на те же деньги?

155. Цена билета выросла на 40%, а выручка упала на 16%. На сколько процентов уменьшилось число зрителей?

156. Длину прямоугольника увеличили на 20%, а ширину — на 10% ? На сколько процентов увеличилась площадь прямоугольника?

157. Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

158. За два года предприятие снизило объем выпускаемой продукции на 51%, при этом каждый год объем продукции снижался на k процентов. Чему равно k?

159. В коробке лежит 10 кг огурцов, их влажность 99%. Через некоторое время влажность стала составять 98%. Сколько стали весить огурцы?

160. Площади круга и квадрата составляют соответственно 70% и 60% площади их объединения. Сколько процентов площади квадрата находится вне круга?

Уравнения в целых числах

161. Решите в целых числах уравнения

1) $x+y=xy$;

2) $x-y=xy$;

3) $x^2-y^2=69$;

4) $2x^2-1=2xy$;

5) $x^2-3xy+2y^2=7$;

6) $x^2+4y=2222$;

7) $2xy+3y^2=24$;

8) $12x+20y=2017$.

9) $xy+x-5y=-6$;

10) $x+y=(x+y)^2-3xy$;

11) $2^x+1=y^2$;

12) $x^2 + 1 = 3y$;

13) $x^3+y^3=3333333$;

14) $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$;

15) $x+y=x^2-xy+y^2$;

16) $1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2$

Задачи на движение

162. Мимо столба поезд проходит за 6 с, а мимо здания длиной 60 метров за 9 с. Чему равна скорость поезда?

163. Пассажир поезда, идущего со скоростью 70 км/ч, видит проходящий встречный поезд в течение 5 с. Чему равна скорость встречного поезда , если его длина равна 200 м?

164. Автомобиль первую половину пути двигался со скоростью 100 км/ч, а вторую — 60 км/ч. Чему равна средняя скорость движения автомобиля?

165. Васе нужно 50 секунд, чтобы спуститься по неподвижному эскалатору. Движущийся эскалатор поднимает его за 60 секунд. Сколько времени нужно Васе, чтобы спуститься по движущемуся эскалатору?

166. Из города выходят три пешехода – второй через 2 минуты после первого, третий – через пять минут после первого. Через 5 минут после своего выхода третий пешеход догнал второго, а еще через 2 минуты он догнал первого. Через сколько минут после своего выхода второй догонит первого?

167. Каждый день за Васей в школу заезжает машина. Она подъезжает ровно к окончанию занятий. Однажды занятия в школе закончились на час раньше и Вася решил пойти навстречу машине. Он встретил ее и вернулся домой на 10 минут раньше, чем обычно. Во сколько раз скорость Васи меньше скорости машины?

168. Катер и плот вышли вниз по течению из пункта А в пункт Б. Добравшись до Б, катер развернулся и встретил плот спустя 4 часа после отправления из А. Сколько времени катер шел из А в Б?

169. Два парома отчаливают одновременно от противоположных берегов реки и встречаются на расстоянии 900 метров от левого берега. Прибыв к месту назначения, каждый паром сразу же отправляется обратно. Во второй раз паромы вновь встречаются в 300 метрах от правого берега. Чему равна ширина реки?

Метод математической индукции

170. Докажите равенства

1) $1+q+q^2+...q^n=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$;

2) $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

3) $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

4) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

171. Докажите что при любом натуральном n

1) $5^n+11^{3n+1}\,\vdots\,17$;

2) $11^{n+2}+12^{2n+1}\,\vdots\,133$;

3) $2n^3+3n^2+7n\,\vdots\,6$;

4) $10^n+18n-28\,\vdots\,27$;

5) $n^5-n\,\vdots\,30$.

172. Доказать, что при любом натуральном n число 2^{3n+1} делится на 3^{n+1} и не делится на 3^{n+2}.

173. Известно, что $x+1/x$ – целое число. Доказать, что x^n+1/x^n – так же целое число при любом целом n.

174. Доказать, что при любом натуральном n большем 1 справедливо двойное неравенство $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

175. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

176. Докажите, что для всех натуральных n число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.

177. $x\geq -1$, n – натуральное число. Докажите, что $(1+x)^n\geq 1+nx$.

178. Доказать, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13,…, где $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

179. Доказать неравенство $|\sin nx|<n|\sin x|$ для любого натурального $n>1$.

180. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.

181. В клетчатом квадрате $2^n\times 2^n$ вырезали одну из клеток. Докажите, что оставшуюся часть квадрата можно разрезать на уголки из трех клеток.

182. Докажите, что любые n прямых, расположенных на одной плоскости, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в $n(n–1)/2$ точках.

183. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения, то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

184. Пусть даны n произвольных квадратов. Доказать, что эти квадраты могут быть разрезаны так, чтобы из получившихся частей можно было образовать квадрат.

185. Какое из двух чисел больше:

1) $2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ (100 двоек) или $3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ (99 троек);

2) $3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ (100 троек) или $4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}$ (99 четверок)?

186. Имеется два стакана, в первом стакане налито некоторое количество воды, а во втором – такое же количество кислоты. Разрешается переливать некоторое количество жидкости из одного стакана в другой (при этом раствор равномерно перемешивается). Можно ли с помощью таких операций получить в первом стакане раствор, в котором процентное содержание кислоты больше, чем во втором?

187. В автобусе n мест, и все билеты проданы n пассажирам. Первым в автобус заходит Рассеянный Учёный и, не посмотрев на билет, занимает первое попавшееся место. Далее пассажиры входят по одному. Если вошедший видит, что его место свободно, он занимает свое место. Если же место занято, то вошедший занимает первое попавшееся свободное место. Найдите вероятность того, что пассажир, вошедший последним, займет место согласно своему билету?

Разные задачи

188. Найти все целые значения x, такие, что $2x^2 - x - 36$ является квадратом простого числа.

189. В шахматном турнире участвовало два преподавателя и несколько студентов. Каждый играл с каждым ровно один раз. За победу даётся 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за проигрыш — 0 очков. Два преподавателя набрали вместе восемь очков, а все студенты набрали очков поровну. Сколько студентов участвовало в турнире, если число студентов больше, чем число очков, набранных преподавателями?

190. 50 студентов сдавали геометрию и матан. 10 из них не сдало ни одного экзамена. Матан сдало 34, геометрию — 25. Сколько человек сдало оба экзамена?

191. Два пастуха год пасли в горах овец, и вот пришло время продавать свою отару. За каждую овцу они просили столько долларов, сколько изначально было овец в отаре. Когда всех овец продали, стали делить деньги по-ковбойски: 10$ — первому, 10$ — второму и так по очереди. Но тому, кто брал вторым, последняя десятка досталась неполной (т.е. ему осталось меньше 10$). Желая быть честным, тот, кто брал первым, отдал ему свой нож. Сколько стоил нож?

192. В вершинах квадрата со стороной 100 метров сидит по собаке. По команде «Старт!» каждая из них начинает гнаться за своей соседкой слева со скоростью 10 метров в секунду. Каждая собака бежит точно в направлении текущего положения своей (тоже, разумеется, бегущей) цели. Поэтому их траектории представляют некие сходящиеся спирали. Через какое время все собаки сойдутся в центре? Как изменится ответ, если квадрат заменить на равносторонний треугольник? Правильный шестиугольник?

193. Чему равно количество диагоналей выпуклого n-угольника?

194. В чемпионате по футболу участвует 12 команд. Каждая играет с каждой по одному разу. Сколько игр будет сыграно?

195. Чему равно значение выражения $1^2-2^2+3^2-4^2+...+99^2-100^2$?

196. Чему равна сумма коэффициентов многочлена $(x^2-3x+1)^{999}$ после раскрытия скобок и приведения подобных?

197. Найдите все такие квадратные уравнения $x^2+bx+c=0$, у которых оба коэффициента b и c являются решениями того же уравнения.

198. Чему равно значение суммы $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$?

199. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-a)x-a-3=0$ наименьшая?

200. Пусть $n=999...9$ (100 девяток). Сколько девяток в десятичной записи числа n^2?

201. Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут? В 12 часов 50 минут?

202. В 3 часа Вася заметил, что стрелки образуют прямой угол. Через какое время это произойдет снова?

203. Вася задумал десятизначное число. Первая его цифра указывает количество нулей в этом числе, вторая - количество единиц, ... , десятая – количество девяток. Какое число задумал Вася?

204. Можно ли составить квадрат из равных прямоугольных треугольников с острым углом 30^o?

205. Вася не заметил знака умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число. Результат получился в три раза больше. Найдите эти числа.

206. У Эрудита есть 1000 мешочков с 1, 2, 3,..., 1000 монетами. Каждый день ему разрешается взять из одного или нескольких мешочков по одинаковому числу монет. За какое минимальное число дней Эрудит сможет взять все монеты?

207. Эрудит задумал некоторое число, оканчивающееся на 2. Если последнюю цифру этого числа переставить на первое место, то число удвоится. Какое число задумал Эрудит?

КОНТРОЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Задачи для зачета

1. На числовой прямой отмечены две точки. Где расположено их среднее арифметическое?

2. Можно ли в клетках таблицы 5 х 5 записать числа так, чтобы в каждой строке сумма чисел была положительной, а в каждом столбце — отрицательной.

3. Есть две кучи камней. Два игрока по очереди берут любое количество камней, но только из одной кучи. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Может ли кто-то из них гарантированно выиграть?

4. Докажите, что произведение цифр любого числа не больше его самого.

5. Постройте треугольник, если известны все его углы и периметр.

6. Существует ли такая бесконечная последовательность из двух букв, что никакая комбинация из нескольких букв не повторится два раза подряд?

7. Каждую грань кубика разбили на четыре равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета. Докажите, что в каждый цвет покрашено 8 квадратов.

8. Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?

9. Можно ли какой-нибудь треугольник поместить внутрь круга, радиус которого меньше радиуса описанной около этого треугольника окружности?

10. Президент акционерного общества «Не обманешь — не продашь» объявил на собрании акционеров, что за каждые пять последовательных месяцев расход фирмы превышал доход, а за весь год доход превысил расход. Должны ли акционеры подать на него в суд?

11. Путешественник выходит из гостиницы в 3 часа дня и возвращается в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он идёт со скоростью 4 км/час, в гору – 3 км/час, под гору – 6 км/час. Найдите расстояние, которое прошёл путешественник, если он шёл без отдыха.

12. Докажите, что любые 100 точек на плоскости можно разбить на две группы так, чтобы никакая прямая не отделяла одну группу от другой.

13. Верен ли следующий признак равенства треугольников: по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

14. Когда я сбегаю по эскалатору станции метро «Октябрьская», то успеваю насчитать 100 ступенек, а когда бегу вниз по эскалатору, идущему вверх, насчитываю 300 ступенек. Сколько ступенек на неподвижном эскалаторе?

15. Волк и волчонок, медведь и медвежонок, лис и лисенок решили переправиться с левого берега реки на правый. У них была лодка, в которую помещались любые двое из них. Как им переправиться на другой берег, если нельзя оставлять детёнышей с чужими папами без своего?

16. В легенде об изобретателе шахматной игры говорится, что на первую клетку доски он просил положить одно рисовое зёрнышко, на вторую – два, на третью – четыре и так далее, каждый раз удваивая количество зёрен. Выразите общее количество зёрен на доске простой формулой.

17. Вася считает пальцы от большого до мизинца, затем в обратном порядке (каждый счет приходится на другой палец), затем обратно и т. д. На какой палец придется счет 1990?

18. Докажите неравенство , если

19. Докажите, что x или y делится на 3.

20. Три целых числа связаны соотношением . Докажите, что x или y делится на 3.

21. Катер, плывя вверх по реке, потерял под мостом бутылку. Обнаружив потерю через 10 минут, он повернул обратно и нагнал бутылку на расстоянии 1 км от моста. Определите скорость реки.

22. Найдите множество середин всех отрезков, концы которых лежат

а) на данной полуокружности;

б) на фигуре, являющейся объединением диагоналей квадрата.

23. Если напечатать все числа от 1 до 1000, то сколько раз встретится цифра 3?

24. Сколько чисел среди 1, 2, 3, . . . , 1000 содержат в своей записи хотя бы одну тройку?

25. На шахматной доске расставляют королей так, чтобы они били все клетки. Каково наименьшее число королей? (Клетка, на которой стоит король, считается битой.)

26. Шестизначное число делится на 7. Докажите, что, если последнюю его цифру переставить в начало, то полученное число тоже будет делиться на 7.

27. Построить четырёхугольник, зная все его стороны и угол между двумя противоположными сторонами.

28. Представьте число 100 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

29. На прямой в точке с координатой ноль сидит бактерия. Каждую минуту бактерия делится (если бактерия находилась в точке J, то через минуту две бактерии находятся в точках с координатами J − 1 и J + 1). Если в одну точку попадают две бактерии, то они обе погибают. Как будут расположены бактерии на прямой через 2 часа и 8 минут?

30. Удвоить отрезок с помощью одного циркуля.

31. Имеется 10 мешков монет. В девяти мешках монеты настоящие, каждая весит 10 г, а в одном – фальшивые, каждая весит 11 г. Как одним взвешиванием с помощью рычажных весов без гирь определить этот мешок? Тот же вопрос для случая, когда мешков с фальшивыми монетами несколько.

32. Построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.

33. Хромой слон ходит только на одну клетку по диагонали. Какое количество ходов требуется хромому слону, чтобы обойти все белые клетки доски 10 × 10?

34. В каплю воды, где находились 1000 бактерий, посадили один вирус. После этого каждую минуту стало происходить следующее: каждый вирус уничтожал по одной бактерии, после чего каждая бактерия делилась на две бактерии, а каждый вирус – на два вируса. Верно ли, что через некоторое время не останется ни одной бактерии?

35. Каждый из четырёх гномов – Беня, Веня, Женя, Сеня – либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Мы услышали такой разговор. Веня – Бене: «Ты врун». Женя – Вене: «Сам ты врун». Сеня – Жене: «Да оба они вруны, (подумав) впрочем, и ты тоже». Кто из них говорит правду?

36. Внутри выпуклого 10-угольника отметили 10 точек и разбили его на треугольники с вершинами в этих точках и вершинах 10-угольника. Может ли при этом получиться 30 треугольников?

37. По кругу стоят числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Разрешается взять любые два соседних числа и вместо них записать на их места среднее арифметическое этих чисел. Можно ли, повторив много раз эту операцию, получить 8 одинаковых чисел?

38. Последовательные нечётные числа сгруппированы следующим образом: (1) (3,5) (7,9,11) (13,15,17,19) ... Найдите сумму чисел в сотой группе.

39. Ваня, Андрей и Алёша играли в настольный теннис. Проигравший партию всякий раз уступал место тому, кто в ней не участвовал. За день Ваня сыграл 10 партий, Андрей – 21 партию. Сколько партий сыграл Алёша?

40. Каждые двое из 17 ученых переписываются по одной из трёх тем. Докажите, что есть трое ученых, пишущих друг другу по одной и той же теме.

41. При данной сумме положительных чисел произведение максимально тогда, когда они равны. При данном произведении положительных чисел сумма минимальна тогда, когда эти числа равны. Докажите.

42. Вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого, причём разные вершины – на разных сторонах. Докажите, что центры этих параллелограммов совпадают.

43. Сумма 10 различных натуральных чисел равна 1994. Какое наибольшее значение может принимать сумма трёх наименьших из них?

44. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 100 членов – целые числа, а все остальные члены не являются целыми?

45. Даны четыре точки *A, B, C* и *D*. Известно, что *C* ближе к *A*, чем к *B*, и *D* ближе к *A*, чем к *B*. Докажите, что любая точка на отрезке *CD* ближе к *A*, чем к *B*.

46. Может ли случиться так, что

а) длины всех высот треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 100 см^2?

б) длины всех высот треугольника больше 2 см, а его площадь меньше 2 см^2?

47. Два поезда едут по перпендикулярным путям к точке пересечения. Один поезд находится на расстоянии 80 км от точки пересечения, и его скорость 30 км/ч. Другой поезд — на расстоянии 40 км, и его скорость 40 км/ч.

Через какое время поезда будут на наименьшем расстоянии друг от друга и чему равно это расстояние?
48. Из бумаги вырезан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, а из картона — $PQRS$. Картонный положили на бумажный так, что по одной его вершине попало на каждую сторону бумажного и перегнули оставшиеся части бумажного, при этом картонный оказался закрыт в один слой. Докажите, что у бумажного четырёхугольника либо есть параллельные стороны, либо перпендикулярные диагонали.
49. Найдите две обыкновенные дроби – одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13 такие, что они не равны нулю и разность между большей и меньшей из них наименьшая.
50. Через данную точку на плоскости проводятся всевозможные прямые, пересекающие данную окружность. Найдите геометрическое место середин получившихся хорд.
51. В круге проведены два радиуса. Постройте хорду, которая делится ими на три равные части.
52. Докажите, что оси симметрии многоугольника пересекаются в одной точке.
53. Дана единичная окружность с центром в начале координат. Рассматриваются прямые, заданные уравнениями $ax+by = c$, с рациональными коэффициентами, проходящие через точку (1;0). Докажите, что точки пересечения этих прямых с окружностью имеют рациональные координаты.
54. С помощью циркуля и линейки провести из данной точки A прямую, перпендикулярную данной прямой l, проведя не более трёх линий (третья линия есть искомый перпендикуляр). Рассмотрите случаи, когда A лежит на l, и когда A не лежит на l.
55. Пусть $P(x)$ – многочлен, дающий остаток A при делении на $x-a$, остаток B при делении на $x-b$, остаток C при делении на $x-c$. Найдите остаток $P(x)$ при делении на $(x-a)(x-b)(x-c)$.
56. В государстве 1990 городов. Докажите, что их можно соединить дорогами с односторонним движением так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый либо по одной, либо по двум дорогам.
57. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?
58. Дана таблица 8×8, в одной из клеток которой стоит знак «–», а в остальных – «+». Разрешается за один ход менять все знаки на противоположные в клетках произвольного квадрата 2×2. Можно ли добиться того, чтобы во всех клетках стояли знаки «+»?
59. Три окружности равного радиуса с центрами в точках A, B, C пересекаются в одной точке O. Докажите, что площади трёх множеств точек, принадлежащих только одной из окружностей, равны удвоенной площади треугольника ABC.
60. На плоскости отметили два миллиона различных точек. Существует ли прямая, по каждую сторону от которой находится ровно по миллиону точек?
61. На каждой стороне прямоугольника взяли по точке. Докажите, что периметр полученного четырёхугольника не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.
62. Можно ли разрезать квадрат на конечное число а) остроугольных, б) тупоугольных треугольников?
63. Назовём ядром n-угольника множество точек, из которых целиком видны все его стороны. Докажите, что ядро n-угольника – выпуклый многоугольник, имеющий не более n сторон. Сколько сторон может иметь ядро n-угольника?
64. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой. *В* каждой точке записано число, причём сумма чисел в точках, лежащих на одной прямой, равна 0. Докажите, что все числа равны 0.
65. По правилам турнира, если два рыцаря A и B дрались с C, то они не дерутся между собой. Найдите минимальное число поединков, если в турнире участвуют $2n$ рыцарей.
66. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи выбрасывают камень, а затем одну из куч делят на две. (Выброшенный камень исчезает.) Можно ли добиться того, чтобы через несколько ходов на столе остались только кучи, состоящие из трёх камней?
67. На плоскости n точек попарно соединены отрезками. Самый длинный из них назовём диаметром. Докажите, что диаметров не больше n.
68. При $n > 3$ вписанный четырёхугольник можно разрезать на n вписанных четырёхугольников. Докажите.
69. Брат и сестра делят треугольный торт. Брат указывает точку на торте, а сестра проводит через неё прямой разрез и берет одну часть. Каждый хочет получить побольше. Где брату следует указать точку и какую часть торта он при этом получит?
70. Докажите, что существует число, сумма цифр квадрата которого более чем в 1000 раз превышает сумму

цифр самого числа.
71. Две касательные к кругу неподвижны, а третья движется. Докажите, что отрезок подвижной касательной, заключенный между двумя неподвижными, виден из центра круга под постоянным углом.
72. Найдите сумму – — — —.
73. Докажите, что если n пробегает все натуральные значения, то пробегает все натуральные значения за исключением точных квадратов.
74. Докажите, что если четырёхугольник вписан и описан, то его площадь равна корню из произведения сторон.
75. На окружности проведено 100 хорд, из которых любые две пересекаются. Всегда ли можно провести еще одну хорду так, чтобы она пересекала их все?
76. Какова максимальная длина последовательности чисел, сумма любых семи последовательных членов которой положительна, а сумма любых одиннадцати – отрицательна?
77. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединен авиалиниями ровно с 10 городами (если A соединен с B, то B соединен с A). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (быть может, с пересадками). Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.
78. Дан неравносторонний треугольник. В него вписывают окружность. В точках касания строят новый треугольник. В него снова вписывают окружность и т.д. Докажите, что среди получившихся треугольников нет двух подобных.
79. 50 клеток шахматной доски и 50 шашек занумерованы числами от 1 до 50. Шашки поставили на доску произвольным образом. За один ход любую шашку можно поставить на любое свободное место. Докажите, что для расстановки шашек на свои места требуется не больше 75 ходов.
80. Многоугольник, вырезанный из бумаги, перегибается по некоторой прямой и обе половинки склеиваются. Может ли периметр полученного прямоугольника быть больше периметра первоначального?
81. Десять пятаков расположены в виде замкнутой цепочки (т.е. первый касается второго, второй – третьего и т.д., десятый – первого). Одиннадцатый пятак катится без скольжения по внешней стороне цепочки, касаясь по очереди каждого из этих пятаков. Сколько оборотов он сделает, вернувшись в исходное положение?
82. Груз весом 13.5 т упакован в ящики. Вес каждого ящика не больше 350 кг. Какое наибольшее число полуторатонных грузовиков может понадобиться для перевозки груза?
83. а) Докажите, что для некоторого p в десятичной записи числа $2^{100}p$ нет ни одного нуля. б) Докажите, что если последняя цифра числа k не нуль, то для некоторого p в десятичной записи числа kp нет нулей.
84. Через данную точку M провести прямую, отсекающую от сторон угла треугольник заданного периметра.
85. Назовём натуральные числа m и n родственными если, во-первых, они имеют одни и те же простые делители, и, во-вторых, числа $m-1$ и $n-1$ обладают тем же свойством. Докажите, что существует бесконечно много пар различных родственных чисел.
86. Докажите, что две замкнутые кривые имеют чётное число точек пересечения (касание пересечением не считается).
87. Пять ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке). Кто победит, если игроки не делают ошибок?
88. Если 17-угольник переходит в себя при некотором повороте, то он – правильный. Докажите.
89. Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле ровно один раз и сделать наименьшее число поворотов? (Если ладья пронеслась над клеткой, то она там побывала.)
90. Имеется 100 монет на общую сумму 2 рубля. Докажите, что из них всегда можно выбрать несколько на сумму 1 рубль.
91. В компании 18 человек. Докажите, что среди них есть 4 попарно незнакомых человека или 4 попарно знакомых.
92. Докажите, что в выпуклом многоугольнике с чётным числом сторон есть диагональ, которая не параллельна ни одной из сторон.
93. Найдите геометрическое место ортоцентров (точек пересечения высот) всевозможных треугольников, вписанных в данную окружность.
94. Правильный шестиугольник разрезан на N равновеликих параллелограммов. Докажите, что N делится на 3.

95. На плоскости дано n точек, соединенных непересекающимися отрезками. Может ли оказаться так, что каждая точка будет соединена ровно с шестью другими?

96. Двое играют та клетчатом листе бумаги 30 х 30. Начинающий делает разрез вдоль одной стороны квадратика от края листа, второй продолжает этот разрез вдоль одной стороны квадратика и т. д. Выигрывает тот, после чьего хода от листа отвалится кусок. Кто выиграет при правильной игре?

97. В окружность вписан $2n$-угольник, стороны которого занумерованы по часовой стрелке. Докажите, что для любой точки окружности произведение расстояний до сторон с чётными номерами равно произведению расстояний до сторон с нечётными номерами.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Учреждение образования
“Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка”

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной и информационно-аналитической работе
В.М. Зеленкевич
23.12. 2015 г.

Регистрационный № УД 27-1п2-2015 / уч

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ И ОЛИМПИАДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине (по выбору студента) для специальности:
1-02 05 01 Математика и информатика

2015 г.

Учебная программа составлена на основе Образовательного стандарта высшего образования первая ступень специальность 1-02 05 01 Математика и информатика (ОСВО 1-02 05 01 – 2013) и Учебного плана специальности 1-02 05 01 Математика и информатика (регистрационный № 152 – 2013/у от 25. 07. 2013 г.)

СОСТАВИТЕЛЬ:

М.В. Милованов, доцент кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования "Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка", кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор В.И. Янчевский)
А.А. Шаромет, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математики и методики преподавания математики
(протокол № 4 от 15. 12. 2015 г.),

Заведующий кафедрой ________ С.И. Василец

Советом факультета
(протокол № 5 от 23 . 12. 2015 г.)

Оформление учебной программы и сопровождающих её материалов действующим требованиям Министерства образования Республики Беларусь соответствует

Методист учебно-методического
управления БГПУ

____________ С.А. Стародуб

Ответственный за редакцию: М.В. Милованов
Ответственный за выпуск: М.В. Милованов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа дисциплины по выбору «Занимательные и олимпиадные математические задачи» составлена для студентов-математиков 3 курса физико-математического факультета в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования специальности 1-02 05 01 Математика и информатика.

В курсе математики средней школы учащиеся изучают разнообразные алгоритмы решения математических задач и учатся применять их на практике. Этого, однако, недостаточно, чтобы решить задачу олимпиадного типа. Ее решение требует, кроме твердого знания стандартных алгоритмов, проявления смекалки, творческой фантазии и настойчивости в достижении цели. Все эти качества человеческой личности представляют большую ценность и за пределами математики. Их необходимо воспитывать и развивать уже в школе. Лучше всего делать это, решая соответствующие задачи под руководством учителя и самостоятельно. Понятно, что учитель математики должен иметь необходимую подготовку и интерес к подобной работе.

Изучение дисциплины по выбору «Занимательные и олимпиадные математические задачи» должно обеспечить формирование у студентов академических, социально-личностных и профессиональных компетенций.

Требования к академическим компетенциям

Студент должен:

АК – 1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач

АК – 2. Владеть методами научно-педагогического исследования

АК – 3. Владеть исследовательскими навыками

АК – 4. Уметь работать самостоятельно

АК – 6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем

Требования к социально-личностным компетенциям

Студент должен:

СЛК – 1. Обладать качествами гражданственности

СЛК – 2. Быть способным к социальному взаимодействию

СЛК – 3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям

СЛК – 7. Быть способным к осуществлению самообразования и сомосовершенствования профессиональной деятельности

Требования к профессиональным компетенциям

Студент должен быть способен:

ПК – 1. Управлять учебно-познавательной и учебно-исследовательской деятельностью обучающихся

ПК – 2. Использовать оптимальные методы, формы и средства обучения

ПК – 3. Организовывать и проводить учебные занятия различных видов и форм

ПК – 4. Организовывать самостоятельную работу обучающихся

Цели и задачи

Основной **целью** дисциплины является развитие математического мышления обучающихся.

Основной **задачей** дисциплины является формирование у студентов-старшекурсников достаточно большого запаса математических задач «на сообразительность» и навыков их решения для использования в практике работы учителя средней школы.

В результате изучения дисциплины по выбору студент должен:

- **знать** достаточно много конкретных олимпиадных задач различных типов, которые можно было бы использовать на уроках математики в школе;
- **уметь** пользоваться методами поиска решения нестандартных задач и приемами составления таких задач.
- **владеть** практическими умениями применять полученные математические знания в нестандартных ситуациях науки и жизни.

В соответствии с учебным планом на изучение дисциплины по выбору «Занимательные и олимпиадные математические задачи» отводится 82 часа, из них аудиторных 52 часа (лекций – 28 часов, практических занятий – 24 часа), на самостоятельную работу студентов – 30 часов. Форма контроля – зачет. Дисциплина читается на 3 курсе в 6 семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел I. Занимательные задачи

Знакомство с задачами олимпиадного типа лучше начинать с «занимательных» задач. Как правило, такая задача имеет практический смысл, решается с привлечением минимальных сведений из алгебры и геометрии, но требует сообразительности и умения логически мыслить.

В этом разделе предлагаются избранные задачи из книг классиков научно-популярной математической литературы Е.А. Игнатьева, Б.А. Кордемского и М. Гарднера.

Раздел II. Задачи школьных математических олимпиад

При подборе задач этого раздела использована книга Н.В.Горбачева «Сборник олимпиадных задач по математике», носящая энциклопедический характер. Книга содержит задачи российских и международных олимпиад, которые сгруппированы по темам и уровню сложности. К ним приведены краткие решения.

Раздел III. Задачи факультетских математических олимпиад

Ежегодная математическая олимпиада проводится на факультете уже более 20 лет. В ее архиве имеется много интересных задач. Часть этих задач планируется разобрать в разделе III.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов				Материальное обеспечение занятия	Литература	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа студента			
	2						8	
	6 семестр							
1.	**Занимательные задачи**	**0**	**0**		**0**			
1.1.	Переправы и разъезды						[1] § 4	
1.2.	Деление при затруднительных обстоятельствах						[1] § 5, [2] часть 1	
1.3	Угадывание чисел						[1] § 9, [2] часть 3	
1.4	Задачи о фальшивой монете						[3] Гл.9	
1.5	Избранные задачи М.Гарднера						[4]	

							Гл.3,20,29,44 [5] Гл.2,6,8 [6] Гл.1	
2.	**Задачи школьных математических олимпиад**	**0**			**0**			
2.1	Логические задачи						[7] Гл.1, §§1,2,7	
2.2	Принцип Дирихле						[7] Гл.1, §5	
2.3	Математическая индукция						[7]	
2.4	Четность						[7] Гл.2, §8	
2.5	Остатки						[7] Гл.3, §11	
2.6	Задачи международного конкурса “Кенгуру“						[9]	
3	**Задачи факультетских математических олимпиад**				**0**		Архив олимпиады,	

							[8]	
3.1	Текстовые задачи							
3.2	Задачи по алгебре							
3.3	Задачи по геометрии							
3.4.	Задачи по математическому анализу							
	Итого:	**8**	**4**		**0**			а ет

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Игнатьев Е.А. «В царстве смекалки», Москва, Наука, 1979.
2. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. «Старинные занимательные задачи», Москва, Наука, 1988.
3. Кордемский Б.А. «Математическая смекалка», Москва, Юнисам: МДС, 1994.
4. Гарднер М. «Математические головоломки и развлечения», Москва, Мир, 1999.
5. Гарднер М. «Математические досуги», Москва, Мир, 2000.
6. Гарднер М. «Математические новеллы», Москва, Мир, 2000.
7. Горбачев Н.В. «Сборник олимпиадных задач по математике», Москва, МЦНМО, 2005.
8. Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. «Задачи студенческих математических олимпиад», Москва, Наука, 1987.
9. Барабанов Е.А., Воронович И.И. и др. «Международный математический конкурс “Кенгуру–2015” в Беларуси: условия и решения заданий для 5–11-х кл.», 2015.

Дополнительная

1. Штейнгауз Г. «Задачи и размышления», Москва, Мир, 1974.
2. Дьюдени Г. «Пятьсот двадцать головоломок», Москва, Мир, 1975
3. Барр С. «Россыпи головоломок», Москва, Мир, 1978.
4. Лойд С. «Математическая мозаика», Москва, Мир, 1980.
5. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. «Московские математические олимпиады», Москва, Просвещение, 1986.
6. «Зарубежные математические олимпиады», Москва, Наука, 1987.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

пп	Название разделов	Количество часов		
		Всего	Лекции	Практические занятия
	Занимательные задачи	20	10	10
	Задачи школьных математических олимпиад	18	10	8
	Задачи факультетских математических олимпиад	14	8	6
	ВСЕГО:	**52**	**28**	**24**

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ

Для оценки достижений и уровня знаний студента при изучении дисциплины целесообразно применить инструментарий, который включает

– самостоятельное решение задачи у доски

– блиц-опрос при обсуждении плана решения задачи и отдельных пунктов плана

– организацию соревнования студентов при самостоятельном решении предложенной задачи

– контроль ведения рабочих тетрадей