ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика как учебная дисциплина прочно заняла место в учебных планах нематематических специальностей высших учебных заведений.

Для специалиста нематематического профиля важно понимать роль и место математики в жизни современного общества. Для этого студент должен усвоить сущность математической науки, познакомиться с ее языком и основными методами. Это поможет ему самостоятельно читать ту литературу по специальности, в которой используются математические методы и модели, а также заниматься повышением своей математической подготовки. После окончания высшего учебного заведения специалист самостоятельно сможет анализировать математические результаты исследований в выбранной им области деятельности.

Данный задачник адресован студентам нематематических специальностей педагогических вузов. В нем сжато излагается необходимый теоретический материал раздела «Неопределенный интеграл», рассматриваются решения типовых примеров, предлагаются упражнения для самостоятельной работы с ответами. Используя пособие, студент сможет овладеть методами интегрирования.

Данный задачник позволит также эффективно организовать управляемую самостоятельную работу студентов по курсу математики, что будет способствовать повышению качества подготовки специалистов нематематического профиля.

§ 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для данной функции $f(x)$ на данном промежутке, если на этом промежутке

$$F'(x) = f(x).$$

Процесс нахождения первообразной функции для заданной функции называется интегрированием.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная величина, также является первообразной функции $f(x)$. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет первообразную, то она имеет их бесконечное множество, причем все они отличаются одна от другой только постоянным слагаемым.

Определение 2. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, знак $\int$ – знаком интеграла.

Таким образом, согласно определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

если $F'(x) = f(x)$.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит и неопределенный интеграл. Этот вопрос решается основной теоремой интегрального исчисления.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке она имеет первообразную.

Из определения 2 непосредственно вытекают следующие свойства неопределенного интеграла.

1°. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал от него равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \qquad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2°. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

3°. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

4°. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Пример 1. Проверить правильность вычисления интеграла

$$\int\left(x^4 - x^3 + 3x + 1\right)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x + C .$$

Решение. Найдем производную полученного выражения, т. е.

$$\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 + x + C\right)' = x^4 - x^3 + 3x + 1,$$

которая представляет подынтегральную функцию. Следовательно, данный интеграл вычислен правильно.

Таблица основных неопределенных интегралов

Во всех формулах под u понимается или независимая переменная, или произвольная функция любой независимой переменной, дифференцируемая в некотором промежутке.

Каждая из формул этой таблицы справедлива в любом промежутке, содержащемся в области определения соответствующей подынтегральной функции. Интегралы, помещенные в таблице, называются табличными.

1. $\int 0 \cdot dx = C$.
2. $\int du = u + C$.
3. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$ (α – произвольная величина, $\alpha \neq -1$).
4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.
5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$.
6. $\int e^u du = e^u + C$.
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$.
8. $\int \cos u du = \sin u + C$.
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$.
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$.
11. $\int \dfrac{du}{1 + u^2} = \mathrm{arctg} u + C$.
12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C$.
13. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C$.
14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$.
15. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u - a}{u + a}\right| + C$.
16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Таблицу основных неопределенных интегралов читатель должен выучить наизусть.

Метод, связанный с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла, называется методом непосредственного интегрирования. Этот метод интегрирования, несмотря на кажущуюся простоту, требует определенных навыков и практики.

Рассмотрим примеры использования метода непосредственного интегрирования.

Пример 2. Найти $\int\left(x^5-3x^4+2x^2+x-3\right)dx$.

Решение. Этот интеграл алгебраической суммы функций. Вынося постоянные множители за знак интеграла и интегрируя, получим

$$\int\left(x^5+3x^4-2x^2+x-3\right)dx=\int x^5dx+3\int x^4dx-2\int x^2dx+\int xdx-3\int dx=$$
$$=\frac{x^6}{6}+3\frac{x^5}{5}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+C=\frac{1}{6}x^6+\frac{3}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int\frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}-7x+6}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Решение. Для вычисления интеграла следует разделить выражение, стоящее в числителе, на знаменатель. Если это выполнить, то получится, что

$$\int\frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}-7x+6}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(x^{\frac{11}{3}}-3x^{\frac{5}{3}}+5-7x^{\frac{2}{3}}+6x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=$$
$$=\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}}+5x-\frac{21}{5}x^{\frac{5}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}+C=\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3}{14}x^4-\frac{9}{8}x^2+5\sqrt[3]{x}-\frac{21}{5}x+9\right)+C.$$

Пример 4. Найти $\int(x-2)^3dx$.

Решение. Возведя в куб подынтегральную функцию и интегрируя, находим

$$\int(x-2)^3dx=\int\left(x^3-6x^2+12x-8\right)dx=\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2-8x+C.$$

Заметим, что этот интеграл можно найти короче:

$$\int(x-2)^3dx=\int(x-2)^3d(x-2)=\frac{1}{4}(x-2)^4+C.$$

Пример 5. Найти $\int\frac{x^2dx}{x^3+1}$.

Решение. Преобразуем данный интеграл следующим образом: $\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^3+1}$. Числитель подынтегральной дроби является теперь дифференциалом знаменателя; такой интеграл равен логарифму функции знаменателя. Таким образом,

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3+1\right)}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C.$$

Пример 6. Найти $\int\sin^3x\cos xdx$.

Решение. Так как $\cos x dx = d(\sin x)$, то

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

Упражнения

Найти следующие интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x^3}$. Ответ: $-\frac{1}{2x^2} + C$.
2. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$. Ответ: $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$.
3. $\int \frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$. Ответ: $\frac{6}{19}x^3\sqrt[6]{x} + C$.
4. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + C$.
5. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 2\sqrt{x} + C$.
6. $\int (2 - t^2)^2 \sqrt{t}dt$. Ответ: $\frac{8}{3}t\sqrt{t} - \frac{8}{7}t^3\sqrt{t} + \frac{2}{11}t^5\sqrt{t} + C$.
7. $\int \frac{x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$. Ответ: $4\sqrt[4]{x}\left(\frac{x^6}{25} + \frac{x^5}{7} - \frac{7}{14}x^4\right) + \frac{60}{7}\sqrt[12]{x^7} + C$.
8. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx$. Ответ: $2\sqrt{x} + 3x + 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$.
9. $\int \frac{x - 9}{\sqrt{x} + 3}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + C$.
10. $\int 5^x dx$. Ответ: $\frac{5^x}{\ln 5} + C$.
11. $\int 3^x e^x dx$. Ответ: $\frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C$.
12. $\int 5^{x-2} dx$. Ответ: $\frac{5^x}{25\ln 5} + C$.
13. $\int \frac{32^x - 2^x}{4^x}dx$. Ответ: $\frac{16^x + 3}{2^x 3\ln 2} + C$.
14. $\int a^x\left(2 + \frac{a^{-x}}{x^4}\right)dx$. Ответ: $\frac{2a^x}{\ln a} + \frac{1}{3x^3} + C$.
15. $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.
16. $\int \frac{dx}{x^2 - 5}$. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}}\right| + C$.
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Ответ: $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$.
18. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$. Ответ: $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C$.
19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$. Ответ: $\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$.

20. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx.$ Ответ: $2\sin x + C.$

21. $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx.$ Ответ: $x - \cos x + C.$

22. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$ Ответ: $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$

23. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$ Ответ: $-\operatorname{ctg} x - x + C.$

24. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$ Ответ: $2\operatorname{arctg} x - 3\arcsin x + C.$

25. $\int \frac{x^4 dx}{1+x^2}.$ Ответ: $\operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{3} - x + C.$

26. $\int \cos 2x dx.$ Ответ: $\frac{1}{2}\sin 2x + C.$

27. $\int 2x\left(x^2+5\right)^7 dx.$ Ответ: $\frac{\left(x^2+5\right)^8}{8} + C.$

28. $\int 2x\sqrt{x^2+6}dx.$ Ответ: $\frac{2}{3}\left(x^2+6\right)\sqrt{x^2+6} + C.$

29. $\int \sqrt{a^2-x^2}xdx.$ Ответ: $-\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2} + C.$

30. $\int e^{3x} dx.$ Ответ: $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$

31. $\int (x+5)^3 dx.$ Ответ: $\frac{1}{4}(x+5)^4 + C.$

32. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$ Ответ: $2e^{\sqrt{x}} + C.$

33. $\int \frac{xdx}{x^2+1}.$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$

34. $\int \operatorname{tg} x dx.$ Ответ: $-\ln|\cos x| + C.$

35. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$ Ответ: $\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C.$

36. $\int \frac{\ln x}{x} dx.$ Ответ: $\frac{\ln^2 x}{2} + C.$

37. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$ Ответ: $\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{\arcsin x} + C.$

38. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}} dx.$ Ответ: $-2\sqrt{5+\cos x} + C.$

39. $\int \frac{dx}{a+bx}.$ Ответ: $\frac{1}{b}\ln|a+bx| + C.$

40. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$ Ответ: $-e^{\frac{1}{x}} + C.$

§ 2. Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки). Интегрирование по частям

В основе интегрирования способом подстановки (или замены переменной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где $u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где t – новая переменная, а $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) прибрела более удобный для интегрирования вид;

2) $t = \psi(x)$, где t – новая переменная. В этом случае формула замены переменной

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

Пример 1. Методом подстановки найти $\int x\sqrt{x^2 - 2}dx$.

Решение. Заменим переменную x новой переменной t: $\sqrt{x^2 - 2} = t$ и $x = \sqrt{t^2 + 2}$. Тогда $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}}dt$. Следовательно,

$$\int x\sqrt{x^2 - 2}dx = \int \sqrt{t^2 + 2}t\frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}}dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 2}}{3} + C.$$

Пример 2. Методом подстановки найти $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Решение. Здесь используем подстановку $x = t^3$. Отсюда находим $dx = 3t^2 dt$ и, следовательно, имеем

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{\cos t}{t^2}3t^2 dt = 3\int \cos t dt = 3\sin t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\sin\sqrt[3]{x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + x - x^2}}$.

Решение. Выделим из данного квадратного трехчлена полный квадрат разности

$$3 + x - x^2 = -(x^2 - x - 3) = -\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\right) =$$

$$= -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right) = \frac{13}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Имеем $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{13}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}.$

Пусть $u = x - \frac{1}{2}$, тогда $du = dx$. Данный интеграл принимает вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{13}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{13}{4}-u^2}} = \arcsin\frac{u}{\frac{\sqrt{13}}{2}} + C = \arcsin\frac{2u}{\sqrt{13}} + C = \arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{13}} + C.$$

Метод интегрирования по частям (как и метод подстановки), который мы разобрали, принадлежит к числу основных методов интегрирования.

Формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int vdu$ может быть вычислен легче, чем исходный интеграл.

Так, при нахождении интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin axdx,\ \int P(x)\cos axdx$$

за u следует принять многочлен $P(x)$, а за dv – соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; при отыскании интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

Пример 4. Найти интеграл $\int \mathrm{arctg}\, xdx$.

Решение. Положим $u = \mathrm{arctg}\, x$, $dv = dx$, откуда $du = \frac{dx}{1+x^2}$; $v = x$;

$$\int \mathrm{arctg}\, xdx = x\,\mathrm{arctg}\, x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 5. Найти $\int x^3 \sin xdx$.

Решение. Положим $u = x^3$, $dv = \sin xdx$, откуда $du = 3x^2dx$; $v = -\cos x$. Следовательно,

$$\int x^3\sin xdx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos xdx.$$

Чтобы вычислить интеграл $\int x^2 \cos xdx$ снова применим интегрирование по частям, положив $u = x^2$, $dv = \cos xdx$, тогда $du = 2xdx$; $v = \sin x$.

Следовательно,

$$-x^3\cos x + 3\int x^2\cos xdx = -x^3\cos x + 3\left(x^2\sin x - 2\int x\sin xdx\right) =$$

$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x\sin xdx.$$

Для вычисления полученного интеграла третий раз применим интегрирование по частям, положив $u = x$, $dv = \sin xdx$, откуда $dx = du$; $v = -\cos x$.

Окончательно имеем

$$\int x^3\sin xdx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\left(-x\cos x + \int \cos xdx\right) = -x^3\cos x +$$

$$+ 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C = \left(3x^2 - 6\right)\sin x + \left(6 - x^2\right)x\cos x + C.$$

Упражнения

Применяя указанные подстановки, найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}, \quad x=\frac{1}{t}.$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+C$ при $x>\sqrt{2}.$
2. $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx, \quad 5x^2-3=t.$ Ответ: $\frac{1}{80}\left(5x^2-3\right)^8+C.$
3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}, \quad t=\sqrt{x+1}.$ Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C.$
4. $\int x\sqrt{x-5}dx, \quad t=\sqrt{x-5}.$ Ответ: $\frac{2(x-5)^{5/2}}{5}+\frac{10(x-5)^{3/2}}{3}+C.$
5. $\int \frac{dx}{1+e^x}, \quad 1+e^x=t.$ Ответ: $x-\ln\left(1+e^x\right)+C.$

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы.

6. $\int\left(9+7x^2\right)^5 xdx.$ Ответ: $\frac{1}{84}\left(9+7x^2\right)^6+C.$
7. $\int e^{x+x^2}(1+2x)dx.$ Ответ: $e^{x+x^2}+C.$
8. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{6-\sin^2 x}}.$ Ответ: $\arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{6}}\right)+C.$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$ Ответ: $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C.$
10. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ Ответ: $\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C.$
11. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx.$ Ответ: $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)+C.$
12. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx.$

Указание: подстановка $x=a\sin t$. Ответ: $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$

Указание: подстановка $x=a\sin t$. Ответ: $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$ Ответ: $2\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C.$
15. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx.$ Ответ: $-\frac{3}{140}\left(35-40x+14x^2\right)(1-x)^{4/3}+C.$
16. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$ Ответ: $\frac{2}{3}(\ln x-5)\sqrt{1+\ln x}+C.$
17. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx.$ Ответ: $\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C.$

18. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ Ответ: $-\frac{1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}+C.$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы.

19. $\int \ln x dx.$ Ответ: $x\ln x - x + C.$

20. $\int xe^x dx.$ Ответ: $xe^x - e^x + C.$

21. $\int \arcsin x dx.$ Ответ: $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C.$

22. $\int x\ln x dx.$ Ответ: $\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C.$

23. $\int x\arcsin x dx.$ Ответ: $\frac{x^2}{2}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}\arcsin x + C.$

24. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx.$ Ответ: $\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}x+C.$

25. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$ Ответ: $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$

26. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx.$ Ответ: $-x\,\mathrm{ctg}\,x+\ln|\sin x|+C.$

27. $\int x^2e^x dx.$ Ответ: $\left(x^2-2x+2\right)e^x+C.$

28. $\int x\ln\left(x^2-1\right)dx.$ Ответ: $\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\ln\left(x^2-1\right)-\frac{1}{2}x^2+C.$

29. $\int \arccos 2x dx.$ Ответ: $x\arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C.$

30. $\int x^3\ln x dx.$ Ответ: $\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+C.$

31. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ Ответ: $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C.$

32. $\int (\arcsin x)^2 dx.$ Ответ: $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$

33. $\int e^{2x}\sin 2x dx.$ Ответ: $\frac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)+C.$

34. $\int 3^x\cos x dx.$ Ответ: $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}+C.$

35. $\int \sin(\ln x)dx.$ Ответ: $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C.$

§ 3. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены (в дальнейшем предполагается, что коэффициент при наивысшей степени x в многочлене $Q(x)$ равен единице). Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени $Q(x)$; в противном случае дробь называется неправильной.

Простейшими дробями I, II, III и IV типов называются правильные рациональные дроби следующего вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, где $k = 2, 3, 4, \ldots$;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где дискриминант трехчлена $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, т. е. трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где $k = 2, 3, 4, \ldots$.

Здесь A, B, a, p, q – действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. не разлагается на действительные линейные множители.

Интегрирование простейших дробей I и II типов производится непосредственно:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = \frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x-3}$.

Решение. $\int \dfrac{dx}{x-3} = \int \dfrac{d(x-3)}{x-3} = \ln|x-3| + C$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{(4-3x)^3}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{(4-3x)^3} = -\frac{1}{3}\int (4-3x)^{-3}\,d(4-3x) = -\frac{1}{3}\frac{(4-3x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{6(4-3x)^2} + C.$$

Для интегрирования простейших дробей III типа

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ \frac{p^2}{4} - q < 0,$$

в знаменателе подынтегральной функции выделяют полный квадрат

$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

а затем подстановкой $x + \dfrac{p}{2} = t$ сводят интеграл к табличным интегралам.

Пример 3. Найти интеграл $\int \dfrac{3x-1}{x^2-x+1}dx$.

Решение. В знаменателе подынтегральной функции

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{(-1)^2}{4} - 1 < 0,$$

следовательно, интегрируется простейшая дробь третьего типа.

Поскольку

$$x^2-x+1=x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

то

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Делаем подстановку

$$x-\frac{1}{2}=t,\ x=t+\frac{1}{2},\ dx=dt,$$

тогда

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{3\left(t+\frac{1}{2}\right)-1}{t^2+\frac{3}{4}}dt=3\int\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Интегрирование простейших дробей четвертого типа

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx,\ \frac{p^2}{4}-q<0,\ k>1,$$

начинается с выделения полного квадрата

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

с последующей подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$, приводящей интеграл к виду

$$\int\frac{Mt+N}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=M\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}+N\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$$

(здесь M, N – некоторые числа, $q-\frac{p^2}{4}=a^2$).

Первый интеграл правой части легко приводится к табличному, а второй интеграл находится с помощью рекуррентной формулы

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=\frac{1}{2a^2(k-1)}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}. \qquad (1)$$

Детали изложенного плана проследим на примере.

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$.

Решение. В знаменателе подынтегральной функции

$$\frac{p^2}{4}-q=1-3<0,$$

следовательно, интегрируется простейшая дробь четвертого типа.

Учитывая, что $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, делаем подстановку $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$, тогда

$$\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=\int\frac{t}{\left(t^2+2\right)^2}dt-2\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(t^2+2\right)^{-2}d\left(t^2+2\right)-2\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=-\frac{1}{2\left(t^2+2\right)^2}-2\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}.$$

В силу рекуррентной формулы (1), при $k=2$ имеем

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C,$$

поэтому

$$\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=-\frac{1}{2\left(t^2+2\right)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть единственным образом представлена в виде суммы простейших рациональных дробей. Для этого, прежде всего, знаменатель $Q(x)$ записывают в виде произведения сомножителей, каждый из которых является либо степенью линейных функций $x-a$, либо степенью квадратичной функции x^2+px+q, не имеющей действительных корней. После этого приступают к нахождению простейших дробей, составляющих в сумме данную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Каждому сомножителю $(x-a)^k$ разложения $Q(x)$ отвечает в разложении дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ выражение вида

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

а каждому сомножителю $\left(x^2+px+q\right)^l$ – выражение вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{\left(x^2+px+q\right)^l},$$

где A_1, A_2, ..., B_1, C_1, ... – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Для вычисления коэффициентов A_1, A_2, ..., B_1, C_1, ..., B_l, C_l все простейшие дроби в правой части равенства

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\ldots+$$
$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{\left(x^2+px+q\right)^l} \qquad (2)$$

приводят к общему знаменателю $Q(x)$ и приравнивают числители обеих частей равенства (2). Затем сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x (*первый способ*).

Можно также определять эти коэффициенты, полагая в равенстве (2), или ему эквивалентном, x равным подходяще подобранным числам (*второй способ*).

Для нахождения интеграла от рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ следует, прежде всего, выделить из нее целую часть (если дробь неправильная), т. е. представить ее в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. После этого полученную дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ следует разложить на простейшие дроби и проинтегрировать в отдельности каждое слагаемое.

Пример 5. Найти интеграл $I = \int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Отсюда

$$x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1). \qquad (3)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим:

$$0 = A + B,\ 1 = 2A + C,\ 0 = A - B - C.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2}.$$

Коэффициенты *A*, *B*, *C* можно найти и вторым способом.

Полагая $x = 1$ в тождестве (3), будем иметь: $1 = A \cdot 4$, т. е. $A = \frac{1}{4}$. Полагая $x = -1$, получим: $C = \frac{1}{2}$. Далее, полагая $x = 0$, будем иметь: $0 = A - B - C$, т. е. $B = A - C = -\frac{1}{4}$.

Следовательно,

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Решение. Здесь под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Разложение данной дроби имеет вид

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4},$$

отсюда

$$1 = (Ax+B)(x^2+4) + (Dx+E)(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим:

$$A=0,\ B=\frac{1}{3},\ D=0,\ E=-\frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Упражнения

Вычислить интегралы от рациональных дробей.

1. $\int\frac{dx}{x-7}$. Ответ: $\ln|x-7|+C$.
2. $\int\frac{dx}{1+5x}$. Ответ: $\frac{1}{5}\ln|1+5x|+C$.
3. $\int\frac{dx}{(3x+2)^2}$. Ответ: $-\frac{1}{3(3x+2)}+C$.
4. $\int\frac{dx}{(4-5x)^3}$. Ответ: $\frac{1}{10(4-5x)^2}+C$.
5. $\int\frac{xdx}{x^2+7x+13}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x^2+7x+13|-\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}}+C$.
6. $\int\frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}\ln|3x^2+2x+5|+\frac{20}{3\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C$.
7. $\int\frac{5x-7}{8x^2+x+1}dx$. Ответ: $\frac{5}{16}\ln|8x^2+x+1|-\frac{117}{8\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{16x+1}{\sqrt{31}}+C$.
8. $\int\frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}dx$. Ответ: $\frac{13x-24}{3(x^2-3x+3)}+\frac{26}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C$.
9. $\int\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx$. Ответ: $-3\ln|x+1|-\ln|x-2|+C$.
10. $\int\frac{4x+11}{(x-1)(2x+3)}dx$. Ответ: $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{2x+3}\right|+C$.
11. $\int\frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x-3|-\frac{5}{x-3}+C$.
12. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$. Ответ: $4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C$.
13. $\int\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}dx$.

Ответ: $\frac{17}{6}\ln|x+1|+\frac{9}{10}\ln|x+2|-\frac{119}{10}\ln|x-3|+\frac{67}{6}\ln|x-2|+C$.

14. $\int\frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}dx$. Ответ: $\frac{3x^2}{2}+5x-\ln|x-1|+3\ln|x-4|+C$.
15. $\int\frac{30x^5+90x^4+165x^3+341x^2+271x+30}{x^3+3x^2+2x}dx$.

Ответ: $10x^3+105x+15\ln|x|+5\ln|x+1|+6\ln|x+2|+C$.

16. $\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}dx$. Ответ: $-\frac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)}+\frac{13}{27}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C$.

17. $\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx.$

Ответ: $-2\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+5|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$

18. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^3}.$ Ответ: $\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$

19. $\int \frac{dx}{1-x^4}.$ Ответ: $\ln\left|\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}\right|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C.$

20. $\int \frac{dx}{1-x^3}.$ Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

21. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$ Ответ: $-\frac{1}{x-2}-\mathrm{arctg}(x-2)+C.$

22. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}dx.$ Ответ: $\frac{x+2}{2(x^2+1)}+2\mathrm{arctg}x+\ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}+C.$

§ 4. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

I. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция. Интегралы указанного вида могут быть сведены к интегралам от рациональной функции аргумента t подстановкой $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Эта подстановка называется универсальной.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, откуда $\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Решение. Пусть $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда $\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}t$ и $x=2\mathrm{arctg}t$, откуда $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{5-3\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{4t^2+1}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2t+C=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Иногда универсальная тригонометрическая подстановка приводит к сложным вычислениям, поэтому используются другие подстановки, которые в частных случаях быстрее приводят к цели.

1. Если выполняется равенство

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

или

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то выгоднее применять подстановку $\cos x = t$ в первом случае и $\sin x = t$ – во втором.

2. Если выполняется равенство

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то выгоднее применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

II. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n – целые числа. Рассмотрим следующие случаи.

1. Один из показателей m или n – нечетное положительное число. В этом случае применяется подстановка $\cos x = t$ (если m – нечетное) или $\sin x = t$ (если n – нечетное).

2. Оба показателя m и n – четные неотрицательные числа. Тогда следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью тригонометрических формул.

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

3. Показатели m и n – числа одинаковой четности, причем хотя бы один из них отрицателен. Здесь следует применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$ (или $\operatorname{ctg} x = t$)

Пример 3. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Решение. Используя формулы понижения степени, получим

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x dx + \int \sin^2 2x \cos 2x dx\right) = \frac{1}{8}\left(\int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)\right) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение. Следует применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$ и использовать формулу $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Тогда,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

III. Интегралы вида $\int \sin mx\cos nx dx$, $\int \cos mx\cos nx dx$, $\int \sin mx\sin nx dx$. Для нахождения интегралов указанного вида применяются тригонометрические формулы

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x).$$

Упражнения

Найти следующие неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. Ответ: $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$

2. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. Ответ: $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.$

3. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$. Ответ: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C.$

4. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C.$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx$. Ответ: $\frac{\cos^2 x}{2}+3\cos x+8\ln|\cos x-3|+C.$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$. Ответ: $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$. Ответ: $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x-2)+C.$

8. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$. Ответ: $\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C.$

9. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$. Ответ: $\frac{1}{2}\cos^2 x-\cos x+C.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$. Ответ: $\mathrm{tg}x-2\mathrm{ctg}x-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x+C.$

11. $\int \cos^5 x dx$. Ответ: $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$

12. $\int \sin^7 x dx$. Ответ: $-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C.$

13. $\int \sin^2 x dx$. Ответ: $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

14. $\int \cos^4 x dx$. Ответ: $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

15. $\int \sin^6 x dx.$ Ответ: $\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$

16. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx.$ Ответ: $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}.$ Ответ: $\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\mathrm{tg}x| + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}.$ Ответ: $-\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x} + 2\ln|\mathrm{tg}x| + C.$

19. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx.$ Ответ: $\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x + \frac{1}{6}\mathrm{tg}^6 x + C.$

20. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}.$ Ответ: $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x + 3\ln|\mathrm{tg}x| + \frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x + C.$

21. $\int \sin 4x\sin 6x dx.$ Ответ: $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$

22. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}dx.$ Ответ: $-6\cos\frac{x}{12} - \frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12} + C.$

23. $\int \cos 3x\cos 9x dx.$ Ответ: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{12}\sin 12x\right) + C.$

24. $\int \sin x\cos 2x\cos 3x dx.$ Ответ: $-\frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 6x}{24} + C.$

25. $\int \cos x\cos 2x\cos 5x dx.$ Ответ: $\frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{\sin 8x}{32} + C.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин И. И. Высшая математика. М., 1980.
2. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. М., 1983.
3. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. М., 1986.
4. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М., 1978.
5. Гильдерман Ю. И. Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск, 1974.
6. Шипачев В. С. Высшая математика. М., 1985.
7. Самнер Г. Математика для географов. М., 1981.
8. Лобоцкая Н. Л. Основы высшей математики. Минск, 1978.
9. Гусак А. А. Высшая математика: В 2 т. Минск, 1984.
10. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б. П. Демидовича. М., 1974.
11. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. П. Е. Дюбюка и Г. И. Кручковича. М., 1965.

СОДЕРЖАНИЕ