

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников специальности
«География»



Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка

МАТЕМАТИКА

**Методические указания и контрольные задания
для студентов–заочников специальности
“География”**

Методическое пособие

Минск 2001

УДК 51(07)
ББК 22.1р
Ш575

Печатается по решению редакционно–издательского совета
БГПУ имени М. Танка

Авторы: В. А. Шилинец, С. А. Богданович.

Рецензент: В. В. Шлыков, кандидат физико–математических наук,
доцент

Ш575 Математика. Методические указания и контрольные задания для студентов–
заочников специальности “География” /В. А. Шилинец,
С. А. Богданович. — Мн.: БГПУ имени М. Танка, 2001. — 18 с.

Издание содержит методические указания и контрольные задания по ма-
тематике.

Адресуется студентам–заочникам специальности П.01.05.00 “География”.

ББК 22.1р

© Коллектив авторов, 2001

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради школьного формата. Следует пронумеровать страницы и оставить на них поля не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, вариант контрольной работы, название дисциплины и дату отправки работы в университет.
3. Работа должна быть выполнена чернилами одного цвета, аккуратно и разборчиво.
4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.
5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием. Условия задач обязательно переписываются полностью в контрольную тетрадь.
6. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из этих требований:
 - а) студенты должны соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки;
 - б) важные формулы, равенства, определения лучше выделять в отдельные строки, чтобы сделать их более обозримыми;
 - в) при описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения ставится ответ;
 - г) необходимо правильно употреблять математические символы.
7. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.
8. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.
9. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались, проставить дату выполнения работы и подпись.
10. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.
11. Контрольная работа должна быть выполнена в срок (в соответствии с учебным планом-графиком). В период сессии работа на проверку не принимается.
12. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается студенту без оценки.
13. Студенты, не имеющие зачетов по контрольной работе, к зачету не допускаются.

Программа курса «Математика» для студентов заочного отделения специальности П01.05.00 «География»

Роль математики в естествознании. Метод координат на плоскости (декартовы и полярные координаты). Основные задачи, решаемые методом координат. Уравнение линии на плоскости.

Прямая линия на плоскости, ее различные уравнения. Основные задачи.

Уравнение окружности. Определение и канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

Функции и их графики. Основные элементарные функции.

Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства пределов. Предел отношения синуса к аргументу.

Предел последовательности, существование предела монотонной ограниченной последовательности. Число e , натуральные логарифмы. Эквивалентные бесконечно малые.

Непрерывность функции, свойства непрерывных функций.

Производная, ее геометрическое и физическое истолкование. Производные основных элементарных функций. Теоремы о производных. Сложная функция и ее производная. Техника дифференцирования.

Дифференциал функции, его приложение к приближенным вычислениям.

Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл дифференциала.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Теоремы Ролля и Лагранжа. Условия возрастания и убывания функции. Экстремумы функций, необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума по первой и второй производным.

Асимптоты кривых, построение графиков функций с помощью дифференциального исчисления.

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования.

Определенный интеграл, его геометрическое и физическое истолкование. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Несобственные интегралы.

Приложение определенного интеграла для вычисления геометрических и физических величин.

Функции нескольких переменных, частные производные и дифференциал. График функции двух переменных. Экстремумы функций нескольких переменных, необходимое условие экстремума.

Сложные функции нескольких переменных и их дифференцирование.

Частные производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных. Достаточное условие экстремума функции двух переменных.

Дифференциальные уравнения первого порядка, простейшие методы интегрирования. Общее решение, начальные условия.

Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, фундаментальная система частных решений, начальные условия. Уравнение гармонических колебаний.

Контрольная работа

ЗАДАНИЕ 1

В-1. Из всех точек, находящихся от точки $M(7; 2)$ на расстоянии, равном 5, найти ту, абсцисса которой равна 10.

В-2. На оси абсцисс найти точку, находящуюся на расстоянии $d=10$ от точки $A(2; 6)$.

В-3. На оси Oy найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $M(4; 5)$.

В-4. Вычислить площадь равностороннего треугольника, если заданы две его вершины: $A(-3; 2)$, $C(1; 6)$.

В-5. Составить уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 8 и большая ось равна 10.

В-6. Известно, что прямая $2x-5y-30=0$ касается эллипса $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{24} = 1$. Найти точку их прикосновения.

В-7. Составить уравнение гиперболы, у которой расстояние между фокусами равно 10, а эксцентриситет равен $\frac{5}{4}$.

В-8. Построить прямую, проходящую через начало координат и точку $A(3; -1)$. Составить ее уравнение.

В-9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $K(-3; 4)$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равной 5. Сделать чертеж.

В-10. Определить, под каким углом пересекаются прямые $x-2y-2=0$ и $y=\frac{1}{2}x+3$.

В-11. Найти точку пересечения прямых: $7x-9y+15=0$ и $19x+12y-20=0$.

В-12. Дан эллипс $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. Найти длину осей, координаты вершин и фокусов.

В-13. Дана прямая $2x+y-3=0$ и точка $M(1; 1)$ на ней. Найти на данной прямой точки, находящиеся от точки M на расстоянии, равном $\sqrt{5}$. Сделать чертеж.

В-14. Даны уравнения высот треугольника $2x-3y+1=0$; $x+y=0$ и координаты одной из его вершин $(1; 2)$. Найти уравнения сторон. Дать схематический чертеж.

В-15. Вычислить периметр треугольника с вершинами $A(1; 3)$, $B(5; 1)$, $C(0; 10)$.

В-16. Доказать, что треугольник с вершинами $M(3; 4)$, $P(7; 7)$, $K(4; 3)$ — равнобедренный.

В-17. Доказать, что диагонали AC и BK четырехугольника $ABCK$ взаимно перпендикулярны, если $A(-5; 11)$, $B(2; -6)$, $C(-1; 4)$, $K(-5; -10)$.

В-18. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, для которой директрисой служит прямая $x=-2$.

В-19. Написать уравнение директрисы и найти координаты фокуса параболы $y^2=4x$.

В-20. Найти эксцентриситет эллипса $4x^2+9y^2=180$.

В-21. Найти эксцентриситет гиперболы $24x^2-25y^2=600$.

В-22. Точка пересечения высот треугольника лежит в начале координат. Уравнения двух сторон: $x+3y-1=0$; $3x+5y-6=0$. Составить уравнение третьей стороны.

В-23. Прямая проходит через точку $(-2; 5)$ и составляет с осью Ox угол 135° . Написать ее уравнение.

В-24. Через точку $(-5; 3)$ провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между координатными осями, делился в этой точке пополам.

В-25. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и параллельной прямой $y=2x+5$.

- В-26. Найти точку пересечения двух прямых: $3x - 2y - 4 = 0$, $x + 3y - 5 = 0$.
- В-27. Даны две смежные вершины квадрата: $A(-4; 3)$ и $B(3, -11)$. Вычислить его площадь.
- В-28. Найти расстояние точек $O(0; 0)$, $A(1; 2)$, $B(-2; 1)$ от прямой $3x - 4y + 10 = 0$.
- В-29. Определить площадь треугольника с вершинами в точках: $A(0; 1)$, $B(3; 4)$ и $C(-1; -1)$.
- В-30. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$.
- В-31. Доказать, что треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(3; 1)$ и $B(1; 7)$ — прямоугольный.
- В-32. Даны вершины треугольника $A(3; 5)$, $B(-3; 3)$, $C(5; -8)$. Вычислить длину медианы, проведенной из вершины C .
- В-33. Найти расстояние от точки $A(-2; 3)$ до прямой $3x - 4y - 32 = 0$. Сделать чертеж.
- В-34. Даны две прямые: $x + y + 3 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$. Найти расстояние между точками, в которых их пересекает прямая $4x + 3y + 7 = 0$. Сделайте чертеж.
- В-35. Вычислить длину хорды, образуемой пересечением прямой $y = 4x$ с параболой $y = 3 + 2x - x^2$.
- В-36. В треугольнике с вершинами $A(2; 5)$, $B(5; -1)$ и $C(8; 3)$ определить расстояние от точки пересечения медиан до стороны BC .
- В-37. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(5; 4)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.
- В-38. Через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $5x - 2y + 11 = 0$ и $7x + 3y - 2 = 0$, проведена прямая параллельно прямой, заданной уравнением $4x + 5y - 8 = 0$. Составить уравнение этой прямой.
- В-39. Найти координаты вершин треугольника по уравнениям сторон треугольника $5x + y - 7 = 0$; $2x - 3y - 13 = 0$; $7x - 2y - 3 = 0$.
- В-40. Составить уравнения сторон квадрата по данным противоположным вершинам $A(1; 4)$ и $C(9; -2)$.

ЗАДАНИЕ 2. Найти область определения функции

- В-1. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}$.
- В-2. $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{3-x}$.
- В-3. $y = 2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$.
- В-4. $y = \sqrt{\cos 4x}$.
- В-5. $y = \lg\left(\frac{5}{1-x} - 3\right)$.
- В-6. $y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}$.
- В-7. $y = \sqrt{3^x - 7^x}$.
- В-8. $y = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}}$.
- В-9. $y = \log_x \cos x$.
- В-10. $y = \arcsin \frac{1+x^2}{2x}$.
- В-11. $y = \sqrt[8]{2+x-x^2}$.
- В-12. $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{x-2}{3}$.
- В-13. $y = \sqrt{\sin 3x}$.
- В-14. $y = \frac{1}{\sqrt{x^4 - 81}}$.

$$\text{B-15. } y = \sqrt[4]{6x - x^2 - 5}.$$

$$\text{B-17. } y = \arccos \frac{x-3}{3x}.$$

$$\text{B-19. } y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-3}} - \lg(3x-2).$$

$$\text{B-21. } y = \sqrt{2-3x} + \lg x.$$

$$\text{B-23. } y = \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}} + \lg(x-1).$$

$$\text{B-25. } y = \arccos(\lg x).$$

$$\text{B-27. } y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3) + \log_{\frac{1}{2}}(13 - x).$$

$$\text{B-29. } y = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}.$$

$$\text{B-31. } y = \sqrt{3 \sin x - 1}.$$

$$\text{B-33. } y = \frac{\log_3(x^2 + 1)}{\sin^2 x - \sin x + 0,25}.$$

$$\text{B-35. } y = \sqrt{4x - x^2} + \lg(x^2 - 1).$$

$$\text{B-37. } y = \sqrt{x^2 - x - 20} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x - 14}}.$$

$$\text{B-39. } y = \sqrt{x^2 + 4x - 5} - \lg(x + 5).$$

$$\text{B-16. } y = \frac{x}{x^2 - 3x - 4}.$$

$$\text{B-18. } y = \log_2(5x^2 - x - 1).$$

$$\text{B-20. } y = \ln(x^2 + 6x + 9) + \sqrt{x^2 - 2x - 8}.$$

$$\text{B-22. } y = \log_2 \log_3 \log_4 x.$$

$$\text{B-24. } y = \arcsin \frac{2x}{1+x}.$$

$$\text{B-26. } y = \frac{1}{\log_5(1-3x)}.$$

$$\text{B-28. } y = \sqrt{\log_{0,3}(x^2 - 5x + 7)}.$$

$$\text{B-30. } y = \log_{2x-5}(x^2 - 3x - 10).$$

$$\text{B-32. } y = \frac{\sqrt{6x - x^2 - 5}}{5^{x-2} - 1}.$$

$$\text{B-34. } y = \sqrt{\frac{1-5^x}{7^{-x}-7}}.$$

$$\text{B-36. } y = \arcsin 3^x.$$

$$\text{B-38. } y = \lg \frac{x}{x-2} - \sqrt{x-3}.$$

$$\text{B-40. } y = \sqrt[6]{x + x^2 - 2x^3}.$$

ЗАДАНИЕ 3. Вычислить указанные пределы

$$\text{B-1. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4};$$

$$\text{B-2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x};$$

$$\text{B-3. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3 \cdot x + 2}{x^2 - 4 \cdot x + 3};$$

$$\text{B-4. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$$

$$\text{B-4. } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49};$$

$$\text{B-4. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1};$$

$$\text{B-5. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{3 \cdot x^2 + x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2 \cdot x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 5 \cdot x - 5 \cdot x^3}{x - 4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{5 \cdot x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x+2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot x + 1}{2 \cdot x + 3} \right)^{x+2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot x^4 + x^2 - 1}{7 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 + x + 1}.$$

B-6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{7x^2}.$
B-7.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 + 4x - 5};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \right)^{x+1}.$
B-8.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4}{x^2 + 5x^3}.$
B-9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x^3}{x^2 - 2x^3};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x} \right)^{3x-5}.$
B-10.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^{x+1}.$
B-11.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)^{3x^2}.$
B-12.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^3 + 5x^5}{4x^5 - x^2 + x}.$
B-13.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+4} \right)^{2x-5}.$
B-14.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 + 2} \right)^{x^2+5}.$
B-15.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x + 1}{x + 5x^2 - 1};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x}.$
B-16.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+4} \right)^{3x-2}.$
B-17.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + x^3 + 2x}{5x^4 + x + 5};$
B-18.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - 3}{\sqrt{8+x} - 3};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{5x^2 - 1} \right)^{x^2}.$
B-19.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}.$
B-20.	$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x}{2+x} \right)^x;$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{x - 8}.$
B-21.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{3x-1}.$
B-22.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 2x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}.$
B-23.	$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x};$
B-24.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x}{2x} \right)^{2+x}.$
B-25.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x - 1}{4x^3 + 2x^2 + x}.$

B-26.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x+1} \right)^{2+x}.$
B-27.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1-x}-3}{x+8};$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}.$
B-28.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)^{x^2}.$
B-29.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^{2/(x+2)}.$
B-30.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1} \right)^{2x^2}.$
B-31.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3+3}{3x^3+1} \right)^{2x^3+1}.$
B-32.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x}};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+5}.$
B-33.	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{2x-16};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-5x}{\sin 3x}.$
B-34.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \operatorname{tg} x}{1-\cos 2x}.$
B-35.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+3x-1}{2x^2+5x+3}.$
B-36.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x};$	$\lim_{x \rightarrow 1} (8-7x)^{\frac{2x}{x-1}}.$
B-37.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5+6x^4+3x^2+1}{6x^3-3x^5+x-1};$	$\lim_{x \rightarrow 2} (7-3x)^{\frac{x}{x-2}}.$
B-38.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{2x-2};$	$\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{x-1}}.$
B-39.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^2}{1-\cos 4x};$	$\lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{1}{2x-6}}.$
B-40.	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+5};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{\sin^2 2x}.$

ЗАДАНИЕ 4. Найти производную функции

B-1. $y = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + e^{x^2}.$

B-2. $y = \ln^3(1 + \cos x).$

B-3. $y = \frac{x}{1+x^2} + \ln(\sin 2x).$

B-4. $y = x^2 e^{5x}.$

B-5. $y = \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}.$

B-6. $y = \operatorname{tg} \ln 3x.$

B-7. $y = \ln(e^x + 1).$

B-8. $y = (x^2 + 1)e^{x^2}.$

$$\text{B-9. } y = \sqrt[3]{x^2 + x + 2}.$$

$$\text{B-11. } y = \sqrt{(\arctg e^x)^3}.$$

$$\text{B-13. } y = \text{tg}^2 3x - \text{ctg}^3 2x.$$

$$\text{B-15. } y = \frac{x^4 - 8x^2}{x^2 - 4}.$$

$$\text{B-17. } y = \ln \text{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\text{B-19. } y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}.$$

$$\text{B-21. } y = \frac{\cos 3x}{4} + \ln(\cos x).$$

$$\text{B-23. } y = \sin^4 x \cdot \cos 4x.$$

$$\text{B-25. } y = \sqrt[3]{2x - x^2}.$$

$$\text{B-27. } y = \text{atctg} \frac{1}{x}.$$

$$\text{B-29. } y = e^{\text{tg} \frac{1}{x}}.$$

$$\text{B-31. } y = \sin^5(2x^3 + 1).$$

$$\text{B-33. } y = 2^{\sqrt{x^3+2x}}.$$

$$\text{B-35. } y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x+1}}}.$$

$$\text{B-37. } y = 2^{\ln \frac{1}{x}}.$$

$$\text{B-39. } y = \frac{e^{5x}}{x^2 + 3x + 1}.$$

$$\text{B-10. } y = \frac{2x}{x^3 + 1} + \frac{1}{x}.$$

$$\text{B-12. } y = \sqrt{1 + \sin^2 x}.$$

$$\text{B-14. } y = \arccos(2^x).$$

$$\text{B-16. } y = \ln \frac{x^3 - 9}{x^3 - 1}.$$

$$\text{B-18. } y = \text{ctg}^5(x^2 + 1).$$

$$\text{B-20. } y = (x^2 - 4x + 8)e^{\frac{x}{4}}.$$

$$\text{B-22. } y = \text{ctg}^2 3x.$$

$$\text{B-24. } y = 2^{\arctg 5x}.$$

$$\text{B-26. } y = e^{2x} \cdot \ln \sin x.$$

$$\text{B-28. } y = \ln \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{B-30. } y = e^{6x}(x^2 - 2x + 2).$$

$$\text{B-32. } y = \sqrt[3]{\sin(3x - 1)}.$$

$$\text{B-34. } y = \sin \ln \frac{1}{x}.$$

$$\text{B-36. } y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$\text{B-38. } y = \arcsin^2 5x.$$

$$\text{B-40. } y = (x^5 + 2x^3 + 1) \cdot \text{tg}^2 x.$$

ЗАДАНИЕ 5

В-1. Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих периметр 32 см, наибольшую площадь имеет квадрат.

В-2. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2$ и построить ее график.

В-3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $2 \leq x \leq 5$.

В-4. Какой из цилиндров с объемом $128\pi \text{ см}^3$ имеет наименьшую полную поверхность?

В-5. Доказать, что из всех прямоугольников с площадью 400 см^2 квадрат имеет наименьший периметр.

В-6. Исследовать функцию $y = x^3 - 2x^2 + x$ и построить ее график.

В-7. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 8 см. Найти длину каждого катета, если площадь прямоугольника должна быть наибольшей.

В-8. Каковы должны быть размеры цилиндрического сосуда емкостью 8π литров, открытого сверху, чтобы на его изготовление потребовалось наименьшее количество материала?

В-9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $-2 \leq x \leq 2$.

В-10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 1$ на отрезке $-1 \leq x \leq 2$.

В-11. Построить график функции $y = 2 - 3x^2 - x^3$ с помощью производной первого порядка.

В-12. Построить график функции $y = 6x - 8x^3$ с помощью производной первого порядка.

В-13. Построить график функции $y = 3x^2 - 2 - x^3$ с помощью производной первого порядка.

В-14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ на отрезке $[1; 4]$.

В-15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$ на отрезке $[1; 4]$.

В-16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$ на отрезке $[-4; -1]$.

В-17. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого равен 288 см^3 , а стороны основания относятся как 1:3. Каковы должны быть размеры ящика, чтобы его полная поверхность была наименьшей?

В-18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sqrt{x} - x$ на отрезке $[0; 4]$.

В-19. Исследовать функцию $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1$ и построить ее график.

В-20. Резервуар емкостью 108 м^3 с квадратным основанием, открытый сверху, нужно покрыть эмалью. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы израсходовать для этого минимальное количество эмали?

В-21. Какие размеры должен иметь цилиндр, площадь полной поверхности которого $96\pi \text{ см}^2$, чтобы его объем был наибольшим?

В-22. Определить точки максимума и минимума и промежутки монотонности функции $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3$.

В-23. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$.

В-24. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x$ на отрезке $[0; 2]$.

В-25. Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда с площадью поверхности $2S$. Каковы должны быть длина и ширина кузова, чтобы его объем был наибольшим, а отношение длины к ширине равнялось $5/2$.

В-26. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

В-27. Найти промежутки монотонности и экстремума функции $f(x) = (x^4 - 2x^2)/4$ с помощью производной и построить ее график.

В-28. Исследовать функцию $y = x - \sqrt[3]{x^2}$ на промежутки монотонности и точки экстремума.

В-29. Дана функция $y = x^3 - 9x + 1$. Исследовать функцию с помощью производной и построить график.

В-30. Консервная банка должна иметь форму цилиндра емкостью 1 дм³. Рассчитать, каким должен быть радиус ее оснований, чтобы площадь жестиного листа, израсходованного на изготовление банки, была минимальной.

В-31. По углам квадратного листа жести со стороной, равной 12, вырезаны одинаковые квадраты и оставшиеся края загнуты под прямым углом так, чтобы образовывалась открытая сверху коробка. Каковы должны быть размеры вырезанных квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

В-32. Найти без помощи таблиц приближенное значение $\sqrt[3]{1,1}$.

В-33. Найти без помощи таблиц приближенное значение $\ln 1,007$.

В-34. Найти без помощи таблиц приближенное значение $\sqrt[5]{1,02}$.

В-35. Найти без помощи таблиц приближенное значение $\sqrt[3]{26,19}$.

В-36. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5$.

В-37. Число 12 разбить на две части так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

В-38. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 72 м², одна сторона которого примыкает к стене дома. Выбрать размеры участка так, чтобы длина забора была наименьшей.

В-39. Исследовать на экстремумы функцию $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

В-40. Разбить число 100 на два числа так, чтобы их произведение было наибольшим из возможных.

ЗАДАНИЕ 6. Найти неопределенные интегралы

В-1. $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

В-2. $\int \frac{x^2 + \ln^2 x}{x} dx$.

В-3. $\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$.

В-4. $\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx$.

В-5. $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$.

В-6. $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx$.

В-7. $\int x e^{x^2} dx$.

В-8. $\int \frac{(\arcsin x)^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

В-9. $\int \frac{x^2}{5 - 2x^3} dx$.

В-10. $\int \frac{\cos x}{(3 \sin x + 1)^3} dx$.

В-11. $\int \frac{\sin t}{(2 \cos t + 3)} dt$

В-12. $\int x 3^{2+x^2} dx$.

В-13. $\int \sqrt[3]{(3x^2 - 1)^2} dx$.

В-14. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

В-15. $\int \frac{\cos x}{4 + 3 \sin x} dx$.

В-16. $\int x^2 5^{x^3} dx$.

В-17. $\int \operatorname{tg} x dx$.

В-18. $\int \sqrt{x^4 + 16} \cdot x^3 dx$.

В-19. $\int \frac{x}{(x^2 + 5)^5} dx$.

В-20. $\int \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x dx$.

В-21. $\int (3 - 2 \sin x)^3 \cos x dx$.

В-22. $\int \sqrt{x-1} dx$.

В-23. $\int \sqrt{4 + 5 \sin x} \cos x dx$.

В-24. $\int x(x^2 + 1)^4 dx$.

$$B-25. \int \sqrt{\sin x} \cos x dx .$$

$$B-27. \int \frac{x^2}{\sqrt{9+2x^3}} dx .$$

$$B-29. \int e^{3x+5} dx .$$

$$B-31. \int \frac{e^x}{x^2} dx .$$

$$B-33. \int \frac{\ln^5 x}{x} dx .$$

$$B-35. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx .$$

$$B-37. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx .$$

$$B-39. \int e^{x^5} \cdot x^4 dx .$$

$$B-26. \int \frac{x}{\sin^2 x^2} dx .$$

$$B-28. \int \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2} .$$

$$B-30. \int (5+6x)^{17} dx .$$

$$B-32. \int e^x \sqrt{e^x + 5} dx .$$

$$B-34. \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} .$$

$$B-36. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx .$$

$$B-38. \int \sqrt[3]{(4-5x)^2} dx .$$

$$B-40. \int \sqrt[5]{(6x+5)^4} dx .$$

ЗАДАНИЕ 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$B-1. y = 8x - x^2 - 7, y = 0 .$$

$$B-3. y = x^2 + 2, y = 2x + 2 .$$

$$B-5. y = \frac{1}{x}, x = 2, x = 3, y = 0 .$$

$$B-7. y = x^3, y = x^2, x = -1, x = 0 .$$

$$B-9. y^2 - 3x = 0, x - 3 = 0 .$$

$$B-11. y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x .$$

$$B-13. y = (x+1)^2, y^2 = x+1 .$$

$$B-15. x = 4 - (y-1)^2, x = y^2 - 4y + 3 .$$

$$B-17. x = \sqrt{4-y^2}, x = 0, y = 0, y = 1 .$$

$$B-19. y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1 .$$

$$B-21. y = \frac{x^2}{2} - x + 2, y = x, x = 0 .$$

$$B-23. y = e^x, y = 0, x = 2, x = 0 .$$

$$B-25. y = \frac{5}{x}, y = 6 - x .$$

$$B-27. xy = 2, x + 2y - 5 = 0 .$$

$$B-29. y = x^2, y = \sqrt[3]{x} .$$

$$B-31. y = x^2, y = 2\sqrt{2x} .$$

$$B-33. y = 0, y = -x + 2, y = \sqrt{x} .$$

$$B-35. y = \frac{5}{x}, y = 6 - x .$$

$$B-37. y = \cos x, y = 1 + \frac{2}{\pi} x, x = \frac{\pi}{2} .$$

$$B-2. y = 6x - 3x^2, y = 0 .$$

$$B-4. y = x^2 - 4x - 5, y = 0 .$$

$$B-6. y = x^3, y = 0, x = 0, x = 2 .$$

$$B-8. y^2 = 4x, x^2 = 4y .$$

$$B-10. y = x^2, y = x + 2 .$$

$$B-12. y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3 .$$

$$B-14. x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y .$$

$$B-16. y = (x-1)^2, y^2 x - 1 .$$

$$B-18. y = \arccos x, y = 0, x = 0 .$$

$$B-20. y = 1 + x^2, y = 2 .$$

$$B-22. y = \frac{1}{3} x^2 - 2x + 4, y = 10 - x .$$

$$B-24. y = x^3, y = \sqrt{x} .$$

$$B-26. y = 0, y = -x + 2, y = \sqrt{x} .$$

$$B-28. y = \frac{9}{x}, y = x, x = 9, y = 0 .$$

$$B-30. xy = 3, x + y = 4 .$$

$$B-32. y = x^4 - 2x^2 + 5, y = 1, x = 0, x = 1 .$$

$$B-34. y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = \frac{1}{2}, x = 2,5 .$$

$$B-36. y = \frac{4}{x^2}, x = 1, y = x - 1 .$$

$$B-38. y = \sin 6x, x = 0, x = \pi, y = 0 .$$

B-39. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4-3x}$, $y = 0$.

B-40. $y = -x^2$, $y = 2e^x$, $x = 0$, $x = 1$.

ЗАДАНИЕ 8. Решить дифференциальные уравнения

B-1. $y' = 1 + y^2$.

B-2. $y dx + \operatorname{ctg} x dy = 0$.

B-3. $\sqrt{4-y^2} \cdot x dx + y(1+x^2) dy = 0$.

B-4. $(1+y^2 dx) = x \cdot y dy$.

B-5. $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$.

B-6. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$.

B-7. $(xy+x) dx - (x^2 y + y) dy = 0$

B-8. $(1-x^2) y' + xy = 0$.

B-9. $\sqrt{1-x^2} dy - x \sqrt{1-y^2} dx = 0$.

B-10. $e^x(1+e^y) dx + e^y(1+e^x) dy = 0$.

B-11. $y'' + 2y' + y = 0$.

B-12. $y'' + 9y = 0$.

B-13. $y'' + 8y' = 0$.

B-14. $y'' - 5y = 0$.

B-15. $7y'' - y' = 0$.

B-16. $y'' - 20y' + 19 = 0$.

B-17. $y'' - y' = 0$.

B-18. $xy' = 3$.

B-19. $y' - 2(x+1)\sqrt{1-y^2} = 0$.

B-20. $y'x + \sqrt{4-y^2} = 0$.

B-21. $y' - 2xy - y = 0$.

B-22. $y'(4+x^2) + y^2 = 0$.

B-23. $\sqrt{9-x^2} dy - y dx = 0$.

B-24. $dy - 2y dx = dx$.

B-25. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

B-26. $(e^{2x} + 5) dy + ye^{2x} dx = 0$.

B-27. $y'' - 17y' + 70y = 0$.

B-28. $(1+e^x) yy' = e^x$.

B-29. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

B-30. $\sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

B-31. $y'' + 5y' + 4y = 0$.

B-32. $(1+x^2) y^3 dx - (y^2-1) x^3 dy = 0$.

B-33. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

B-34. $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$.

B-35. $y'x + \sqrt{4-y^2} = 0$.

B-36. $y'' - 9y' = 0$.

B-37. $yx - y' = 0$.

B-38. $y'' - 2\sqrt{3}y' + 7y = 0$.

B-39. $20x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 5xy^2 dx$.

B-40. $y'' + 9y' - 10y = 0$.

Решение типовых задач

1. Найти точку пересечения прямых $2x+3y-8=0$ и $x-2y+3=0$.

Решение. Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y-8=0, \\ x-2y+3=0, \end{cases}$$

получаем $x=1, y=2$. Следовательно, данные прямые пересекаются в точке $M(1; 2)$.

2. Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение. Для данного эллипса $a=5, b=4$, и поэтому $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Следовательно, фокусы имеют координаты $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}.$$

Решение. Функция определена при тех значениях x , для которых

$$\lg \frac{5x - x^2}{4} \geq 0.$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$\frac{5x - x^2}{4} \geq 1, \text{ или } x^2 - 5x + 4 \leq 0.$$

Решая последнее неравенство, находим $1 \leq x \leq 4$, то есть $D(y) = [1; 4]$.

4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю. После этого можно будет сократить на x^2 и воспользоваться теоремой о пределе дроби.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - 1}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

5. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{4x^2 + x + 1}$.

Решение. Мы имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как здесь $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 5x + 6) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^2 + x + 1) = \infty$. Для ее раскрытия предварительно числитель и знаменатель дроби $\frac{3x^2 + 5x + 6}{4x^2 + x + 1}$ почленно разделим на x^2 . Следовательно, получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{4x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Но $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$. В результате имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{4x^2 + x + 1} = \frac{3}{4}.$$

6. Найти производную функции

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. $y' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = (1-x^2) \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 \ln x$ на отрезке $[1; e]$.

Решение. Ищем критические точки: $f'(x) = x(1+2\ln x)$. Производная $f'(x)$ не обращается в нуль внутри заданного отрезка $[1; e]$. Поэтому внутри заданного отрезка нет критических точек, остается вычислить значения функции на концах отрезка:

$$f(1)=0, f(e)=e^2.$$

Таким образом, $f(1)=0$ есть наименьшее значение функции; $f(e)=e^2$ — наибольшее значение.

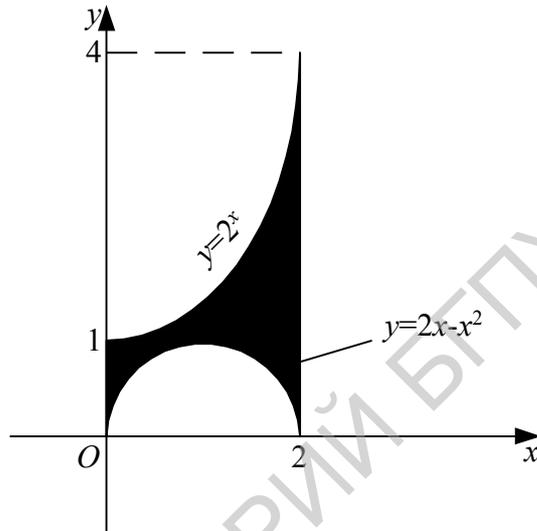
8. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx.$$

Решение. $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \cos \ln d(\ln x) = \sin \ln x + C.$

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=0$, $x=2$ и кривыми $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Решение.



$$S = \int_0^2 (2^x - (2x - x^2)) dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} - \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^2 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

10. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}.$$

Решение. Положим $y=uv$. Тогда $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$. Подставим u и y' в данное уравнение:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + 2xuv = 2e^2 e^{-x^2};$$

$$v \left(\frac{du}{dx} + 2xu \right) + u \frac{dv}{dx} = 2x^2 e^{-x^2}. \quad (1)$$

Положим $\frac{du}{dx} + 2xu = 0$, то есть $\frac{du}{u} = -2xdx$. Проинтегрировав, получим частное решение ($c=0$)

$\ln u = -x^2$, или $u = e^{-x^2}$. При $u = e^{-x^2}$ равенство (1) обратиться в уравнение

$$e^{-x^2} \frac{dv}{dx} = 2x^2 e^{-x^2}; \quad dv = 2x^2 dx.$$

Откуда $v = \frac{2}{3}x^3 + C$. Общим решением данного уравнения будет

$$y = uv = e^{-x^2} \left(\frac{2}{3}x^3 + C \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баврин И. И.* Высшая математика. М.: Высшая школа, 1980.
2. *Бермант А. Ф., Арманович И. Г.* Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1973.
3. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1975.
4. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1978.
5. *Самнер Г.* Математика для географов. М.: Прогресс, 1981.

Учебное издание

Шилинец Владимир Адамович
Богданович Сергей Адамович

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов–заочников специальности
“География”

Методическое пособие

Редактор А. В. Сидоренко

Подписано в печать . . . 2001. Формат 60x84 1/16. Бум. писчая.
Офсетная печать. Усл. печ. л. Уч.–изд. л.
Тираж 100 экз. Заказ Цена

Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка
Лицензия ЛВ № 196 от 04.02.98 г.

Ротап rint БГПУ имени М. Танка. 220050, Минск, ул. Советская, 18