Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 4. С. 32–39.

УДК 519.6

ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИНИТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Е. В. Банюкевич,
магистр физико-математических наук, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Поступила в редакцию 5.07.19.

UDC 519.6

WAVELET TRANSFORMATION OF FINITE GENERALIZED FUNCTIONS

Ye. Banyukevich,
Master of Physics and Mathematics, GrSU named after Ya. Kupala

Received on 5.07.19.

Ставится задача определить и изучить вейвлет-преобразование финитных обобщенных функций. Объектом исследования являются финитные обобщенные функции, определенные на числовой оси. Предмет исследования − вейвлет-преобразование финитных обобщенных функций. Целью данной работы является изучение свойств вейвлет-преобразования на пространстве финитных обобщенных функций.
Во введении упоминаются сведения о полученных ранее результатах изучения вейвлет-преобразования в пространстве обобщенных функций. В основной части статьи рассматривается преобразование Фурье финитных обобщенных функций с целью показать справедливость используемых в последующих пунктах статьи свойств и определений такого преобразования. Затем определяется вейвлет-преобразование на пространстве финитных обобщенных функций. Рассматриваются и доказываются некоторые свойства вейвлет-преобразования на пространстве финитных обобщенных функций. Далее доказываются основные его свойства, в частности дифференцируемость вейвлет-преобразования финитных обобщенных функций по обеим переменным. Кроме того, доказываются теоремы об асимптотике роста вейвлет-преобразования на пространстве финитных обобщенных функции для случая, когда параметр растяжения стремится к нулю, и для случая, когда параметр смещения стремится к бесконечности. В заключении кратко приведены полученные результаты.

Ключевые слова: вейвлет, вейвлет-преобразование, обобщенная функция, финитная обобщенная функция, преобразование Фурье, асимптотика.

Our task is to determine and study the wavelet transformation for finite generalized functions. The object of the research are finite generalized functions defined on the real axis. The subject of the research is the wavelet transformation of finite generalized functions. The purpose of this article is to study the properties of the wavelet transformation on the space of finite generalized functions.
In the introduction, we note information about the results of the study of wavelet transformations in the space of generalized functions obtained earlier. In the main part of the article, the Fourier transformation of finite generalized functions is considered to show the validity of the properties and definitions of such a transformation used in the subsequent paragraphs of the article. Then, the wavelet transformation is defined on the space of finite generalized functions. Some properties of the wavelet transformation on the space of finite generalized functions are considered and proved. Next, we prove its main properties, in particular, the differentiability of the wavelet – transformation of finite generalized functions with respect to both variables. In addition, the following theorems are proved: on the asymptotic growth of the wavelet transformation on the space of finite generalized functions for the case when the expansion parameter tends to zero, and for the case when the displacement parameter tends to infinity. In conclusion the results of the done work are summarized.

Keywords: wavelet, wavelet transformation, generalized function, finite generalized function, Fourier transform, asymptotic.

Введение. Традиционно вейвлет-преобразование определялось и рассматривалось в пространстве квадратично интегрируемых функций $L_2(\mathbb{R})$. Ранее автором было введено вейвлет-преобразование на пространстве обобщенных функций медленного роста (см. [1]). Так как пространство финитных обобщенных функций содержится в пространстве обобщенных функций медленного роста [2], то полученные результаты могут быть перенесены на финитные обобщенные функции. Целью работы является определить и изучить вейвлет-преобразование на пространстве финитных обобщенных функций, то есть уточнить результаты для более узкого пространства.

1. Преобразование Фурье финитных обобщенных функций. Согласно определению [3, с. 116]: «Обобщенная функция с компактным носителем называется финитной обобщенной функцией». Пространство финитных обобщенных функций будем обо-

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

значать через $(\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}))'$. Для дальнейших рассуждений заметим, что преобразование Фурье финитных обобщенных функций определялось автором в [4] и было доказано равенство, определяющее преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста, в данном случае – это финитные обобщенные функции. Как известно, пространство финитных обобщенных функций содержится в пространстве обобщенных функций медленного роста, то есть полученное определение является частным случаем, и все свойства, характерные для преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста, будут выполняться и для финитных обобщенных функций. В [4] показано, что преобразование Фуре обобщенных функций определяется так же, как преобразованием Фурье обычных функций.

Пусть f – финитная обобщенная функция, тогда преобразование $\hat{f}(\omega) = f(e^{-2\pi i\omega t}) = f(e_{\omega})$ есть прямое преобразование Фурье, то есть действие линейного непрерывного функционала на функцию $e_{\omega}(t) = e^{-2\pi i\omega t}$.

Обозначим прямое преобразование Фурье через F, тогда, согласно [5, с.161], можно говорить, что F линейно и непрерывно отображает пространство финитных обобщенных функций в пространство аналитических функций [5, с. 106].

Пространство финитных обобщенных функций замкнуто относительно операции свертки, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. (О свертке финитных обобщенных функций). Пусть $f,g \in C^{\infty})'$ – финитные обобщенные функции, тогда их свертка $f * g$ является финитной обобщенной функцией.

Доказательство. Согласно [6, с. 105] свертка $f * g$ существует и является обобщенной функцией. Осталось доказать, что $f * g$ будет принадлежать пространству финитных обобщенных функций.

Согласно определению [3, с. 116], каждая финитная обобщенная функция имеет компактный носитель, другими словами, носитель такой функции представляет собой такое замкнутое ограниченное множество K точек числовой прямой, вне которого функция обращается в нуль.

Обозначим a = min K, b = max K. Тогда K содержится в отрезке [a; b].

Пусть носители финитных обобщенных функций f и g содержатся в соответствующих отрезках: $\operatorname{supp} f \subset [a;b]$ и $\operatorname{supp} g \subset [c;d]$.

Прямое произведение $f \times g$ по определению [7, с. 99] является обобщенной функцией двух переменных, определяемое равенством $(f \times g)(\varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y)))$. Тогда свертка является обобщенной функцией одной переменной и определяется согласно [2, с.135] равенством

$$(f * g,\varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x + y)).$$

Согласно свойству [7, с. 107] свертки двух функций $f * g$ с компактным носителем получаем включение

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g = \\ = \{x + y : x \in [a;b], y \in [c;d]\}.$$

То есть носитель свертки компактен. Сумма двух замкнутых ограниченных множеств также является ограниченным множеством. Предположим, что это множество является отрезком, а значит, имеет наибольшее

$$\max(\operatorname{supp}(f * g)) = \\ = \max_{\substack{x\in[a;b],\\ y\in[c;d]}} \{x + y\} = b + d$$

и наименьшее

$$\min(\operatorname{supp}(f * g)) = \\ = \min_{\substack{x\in[a;b],\\ y\in[c;d]}} \{x + y\} = a + c$$

значения.

В этом случае найденное наибольшее значение удовлетворяет определению верхней грани: sup(supp(f * g)) = b+d, так как x+y ≤ b+d, где x ∈ ([a; b] и y ∈ [c;d]. Соответственно наименьшее значение удовлетворяет определению нижней грани: inf(supp(f * g)) = = a + c, так как x+y ≤ b+d , где x ∈ [a; b] и y ∈ [c;d]. Подставим и получим

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g = \\ = \{x + y : x \in [a;b], y \in [c;d]\} = \\ = [a + c; b + d].$$

Таким образом, установили, что в результате свертки двух финитных обобщенных функций получаем обобщенную функцию, чей носитель компактен. Значит, свертка двух финитных обобщенных функций является финитной обобщенной функцией. Теорема доказана.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Далее докажем лишь те свойства преобразования Фурье финитных обобщенных функций, которые будут использоваться в статье.

Теорема 2. Для преобразования Фурье финитной обобщенной функции справедливы следующие свойства:

1) преобразования Фурье для растяжения $\widehat{f(\lambda x)}(\xi) = \lambda^{-1}\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)$, где λ – const (коэффициент растяжения);

2) преобразования Фурье для сдвига $\widehat{f(x+h)}(\xi) = e^{2\pi i\xi h}\hat{f}(\xi)$, где h – const (коэффициент смещения);

3) преобразования Фурье для дифференциала функции f

$$\widehat{Df}(\xi) = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi);$$

4) для оператора дифференцирования степени α преобразования Фурье финитной обобщенной функции f

$$D^{\alpha}\left(\hat{f},\varphi\right) = (2\pi ix)^{\alpha}\left(\hat{f},\varphi\right);$$

5) преобразования Фурье для свертки функций

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}.$$

Доказательство теоремы аналогично [8, с. 133].

Теорема 3. Для любой финитной обобщенной функции f ее преобразование Фурье принадлежит пространству аналитических функций с условием роста и справедлива формула обращения $f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi$.

Доказательство. Докажем формулу обращения. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx. \qquad (1)$$

Пусть $g = \varphi_{\omega}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, где $\varphi_{\omega}(x)$ – финитная функция, полученная в результате свертки функций Гаусса – Вейерштрасса $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ и функции $\omega(x) = e^{\frac{-2}{1-x^2}}$. Применив свойство преобразования Фурье для растяжения, получим $\widehat{\varphi_{\omega}\left(\frac{x}{\lambda}\right)}(\xi) = \lambda\widehat{\varphi_{\omega}}(\lambda\xi)$, подставим в (1).

В правом интеграле введем замену $y_1 = \lambda x$, $x = y_1/\lambda$, $dx = \lambda^{-}\,dy_1$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\varphi_{\omega}(x/\lambda)dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(y_1/\lambda)\hat{\varphi}_{\omega}(y_1)dy_1.$$

Перейдя к пределу при $\lambda \to \infty$ и применив теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получим

$$\varphi_{\omega}(0)\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)dx = f(0)\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_{\omega}(y_1)dy_1, \qquad (2)$$

где $\varphi_{\omega}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi|y|^2}e^{\frac{-2}{1-y^2}}dy = \int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^{-\pi|y|^2}e^{\frac{-2}{1-y^2}}dy$.

Рассмотрим

$$\hat{\varphi}_{\omega}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi|y|^2}e^{\frac{-2}{1-(x-y)^2}}dy\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x}e^{-\pi|y|^2}e^{\frac{-2}{1-(x-y)^2}}dy\,dx =$$
$$= \varphi(\xi)\hat{\omega}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\omega(\xi) = \varphi(\xi)\omega(\xi) = \varphi_{\omega}(\xi).$$

Доказано, что преобразование Фурье функции $\varphi_{\omega}(\xi)$ совпадает с самой функцией. Теперь рассмотрим $\varphi_{\omega}(0)$, воспользуемся свойствами преобразования Фурье и получим следующую цепочку равенств

$$\varphi_{\omega}(0) = F^{-1}\left(\widehat{\varphi_{\omega}(0)}(\xi)\right) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\cdot 0\cdot\xi}\hat{\varphi}_{\omega}(\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}_{\omega}(\xi)d\xi.$$

Таким образом, с учетом последнего равенства получим, что равенство (2) примет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)dx = f(0).$$

То есть, получили формулу обращения для $x = 0$. Для получения общего результата воспользуемся свойством преобразования Фурье для сдвига, имеем:

$$f(x) = f(x+0) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f(x+0)}(\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixy}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Теорема доказана.

Введем оператор F^{-1} и докажем, что он будет обратным оператору F

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$FF^{-1}(f) = F\left(F^{-1}f(t), \varphi(t)\right) =$$

$$= F\left(\int_{\mathbb{R}} f(e^{2\pi i\omega t})\varphi(t)dt\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega t}\left(\int_{\mathbb{R}} f(e^{2\pi i\omega t})\varphi(t)dt\right)d\omega =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega t}\left(\int_{\mathbb{R}} f(e^{2\pi i\omega t}\varphi(t))dt\right)d\omega =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(e^{2\pi i\omega t-2\pi i\omega t}\varphi(t))dt\right)d\omega =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(t))dt\right)d\omega = C\left(f(t), \varphi(t)\right) = Cf.$$

И наоборот

$$F^{-1}F(f) = F^{-1}\left(Ff(\omega), \varphi(\omega)\right) =$$

$$= F^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} f(e^{2\pi i\omega t})\varphi(\omega)d\omega\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\omega t}\left(\int_{\mathbb{R}} f(e^{-2\pi i\omega t})\varphi(\omega)d\omega\right)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\omega t}\left(\int_{\mathbb{R}} f(e^{-2\pi i\omega t}\varphi(\omega))d\omega\right)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(e^{2\pi i\omega t-2\pi i\omega t}\varphi(\omega))d\omega\right)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(\varphi(\omega))d\omega\right)dt = C\left(f(\omega), \varphi(\omega)\right) = Cf$$

Доказано равенство $F^{-1}F(f) = FF^{-1}(f)$, следовательно, операторы F и F^{-1} взаимно обратны.

2. Определение и свойства вейвлет-преобразования финитных обобщенных функций. Дадим определение понятия вейвлет-преобразования финитной обобщенной функции и докажем некоторые его свойства. Напомним, что такое вейвлет.

Функция Ψ называется *вейвлетом*, если она удовлетворяет условию допустимости [9, с. 33]

$$C_{\psi} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2}{|\xi|} d\xi < +\infty,$$

где $\hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx$,

где $\hat{\psi}(\xi)$ – преобразование Фурье функции Ψ.

Пусть f – финитная обобщенная функция. Определим вейвлет-преобразование для финитной обобщенной функции f и вейвлета $\Psi \in D$ как свертку функций f и Ψ:

$$W_{\psi}f(a,b) = \left(f * \psi_{-a}\right)(b), \qquad (3)$$

где с помощью $\Psi_{-\alpha} \in D$ обозначили вейвлет $a^{-1}\psi\left(\frac{t}{-a}\right) \in D$ [10, стр. 5], $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, a – параметр растяжения, b – параметр смещения.

С помощью свойств преобразования Фурье можно привести равенство (3) к виду (4), тогда вейвлет-преобразование финитной обобщенной функции определяется следующим образом.

Вейвлет-преобразованием финитной обобщенной функции f называется функция $W_{\psi f}(a,b)$, определяемая равенством

$$W_{\psi}f(a,b) = \left(\hat{f}(\omega), e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right), \qquad (4)$$

где $\hat{f}$, $\hat{\psi}$ – преобразование Фурье соответственно функции $\Psi \in D$ и функции $f \in (\mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}))'$.

Остановимся подробнее на доказательстве равенства (4). Вычислим преобразование Фурье функции $a^{-1}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi_a(t-b)$.

В соответствии со свойством преобразования Фурье для растяжения получаем

$$\widehat{\psi_a(t)} = a^{-1}\widehat{\psi\left(\frac{t}{a}\right)} = a^{-1}\hat{\psi}\left(t \cdot a^{-1}\right) =$$

$$= a^{-1}(a^{-1})^{-1}\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a^{-1}}\right) =$$

$$= a^{-1}a\,\hat{\psi}(a\omega) = \hat{\psi}(a\omega) = \hat{\psi}_a(\omega).$$

Так как $a^{-1}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi_a(t-b)$, то по свойству преобразования Фурье для сдвига и с учетом предыдущего имеем

$$\widehat{\psi_a(t-b)} = e^{-2\pi i\omega b}\hat{\psi}_a(\omega) = e^{-2\pi i\omega b}\hat{\psi}(a\omega).$$

Преобразование Фурье функции $\Psi \in D$ определим следующим образом $\hat{\psi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega b}\psi(b)db$ и заметим

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$\overline{\hat{\psi}}(\omega)=\overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega b}\psi(b)db}=\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\omega b}\psi(b)db=\check{\psi}(\omega),$$

где $\check{\psi}$ – обратное преобразование Фурье функции Ψ. Теперь согласно определению прямого и обратного преобразования Фурье имеем

$$(\hat{f}*\overline{\hat{\psi}_{-a}})(\omega)=(\hat{f}*\check{\psi}_{-a})(\omega)=\check{(\hat{f}*\hat{\psi}_{-a})}(b)=$$
$$=(f*\psi_{-a})(b)=Wf(a,b).$$

Доказанное равенство можно записать следующим образом

$$W_\psi f(a,b)=\left(\hat{f}(\omega),\overline{e^{-2\pi i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)}\right)=$$
$$=\left(\hat{f}(\omega),e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right).$$

Таким образом, доказана справедливость равенства (4).

Теперь рассмотрим свойства, которыми обладает вейвлет-преобразование финитной обобщенной функции. Отметим, что доказательства этих свойств следуют из определения вейвлет-преобразования финитной обобщенной функции и свойств преобразования Фурье финитной обобщенной функции.

Теорема 4. Вейвлет-преобразование сдвига равно сдвигу вейвлет-преобразования, то есть справедливо следующее равенство:

$$W_\psi\left(f(t-t_0)\right)(a,b)=W_\psi f(a,b-t_0).$$

Доказательство. Действительность данного равенства следует из определения вейвлет-преобразования финитной обобщенной функции и свойства преобразования Фурье для сдвига:

$$\left(W_\psi\left(f(t-t_0)\right)(a,b)\right)=$$
$$=\left(\widehat{f(t-t_0)}(\omega),e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right)=$$
$$=\left(e^{-2\pi i t_0\omega}\hat{f}(\omega),e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right)=$$
$$=\left(\hat{f}(\omega),e^{-2\pi i t_0\omega}e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right)=$$
$$=\left(\hat{f}(\omega),e^{2\pi i\omega(b-t_0)}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right)=W_\psi f(a,b-t_0).$$

Теорема доказана.

Теорема 5. Для вейвлет-преобразования подобия справедливо следующее равенство:

$$W_\psi f(t/c)(a,b)=W_\psi f(a/c,b/c).$$

Доказательство. В силу справедливости равенства (4) для доказательства свойства подобия рассмотрим вейвлет-преобразование как свертку

$$W_\psi f(t/c)(a,b)=\left(f*\psi_{-a}\right)(b)=$$
$$=a^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(t/c)\psi_{-a}\left(b-t\right)dt.$$

Вводится замена $y=t/c$, $cy=t$, $dt=cdy$, тогда получаем следующий вид вейвлет-преобразования:

$$W_\psi f(t/c)(a,b)=$$
$$=c/a\int_{\mathbb{R}} f(y)\psi\left(-c(b/c-y)/a\right)dy=$$
$$=\left(a/c\right)^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(y)\psi\left(-(b/c-y)/(a/c)\right)dy=$$
$$=W_\psi f(a/c,b/c).$$

Таким образом, получено требуемое равенство.

3. Теорема о дифференцируемости. Далее докажем дифференцируемость вейвлет-преобразования финитной обобщенной функции по параметрам смещения и растяжения.

Теорема 6. Функция $W_\psi f(a,b)$ бесконечно дифференцируема и для любого $l,j\in\mathbb{N}_0$, выполняется равенство

$$\frac{\partial^{l+j}}{\partial a^l\partial b^j}W_\psi f(a,b)=$$
$$=\left\langle\hat{f}(\omega),(2\pi i\omega)^j e^{2\pi i\omega b}\frac{\partial^l}{\partial a^l}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right\rangle,$$

где $\hat{f}$, $\hat{\psi}$ – преобразование Фурье функций f, Ψ соответственно.

Доказательство. Докажем дифференцируемость $W_\psi f(a,b)$ по $a>0$. Для $h>0$ имеем

$$\frac{1}{h}\left(W_\psi f(a+h,b)-W_\psi f(a,b)\right)-$$
$$-\left\langle\hat{f}(\omega),\frac{\partial}{\partial a}e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right\rangle=$$
$$=\left\langle\hat{f}(\omega),e^{2\pi i\omega b}\left(\frac{1}{h}\left(\overline{\hat{\psi}((a+h)\omega)}-\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right)-\frac{\partial}{\partial a}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right)\right\rangle.$$

Для доказательства необходимо показать, что

$$e^{2\pi i\omega b}\left(\frac{1}{h}\left(\overline{\psi((a+h)\omega)}-\overline{\psi(a\omega)}\right)-\frac{\partial}{\partial a}\overline{\psi(a\omega)}\right)\to 0$$

при $h\to 0$.

Репозиторий БГПУ

Имеем

$$\left|\omega^k \frac{\partial^m}{\partial\omega^m} e^{2\pi i\omega b} \times \times\left(\frac{1}{h}\left(\overline{\hat\psi((a+h)\omega)}-\overline{\hat\psi(a\omega)}\right)-\frac{\partial}{\partial a}\overline{\hat\psi(a\omega)}\right)\right|.$$

Применяется формула Лейбница, и получается следующее выражение

$$\left|\omega^k \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(2\pi ib)^{m-r} e^{2\pi i\omega b} \times \times\frac{\partial^r}{\partial\omega^r}\left(\frac{1}{h}\left(\overline{\hat\psi((a+h)\omega)}-\overline{\hat\psi(a\omega)}\right)-\frac{\partial}{\partial a}\overline{\hat\psi(a\omega)}\right)\right|$$

Вводится обозначение

$$\hat\psi_r(a\omega)=\frac{\partial^r}{\partial\omega^r}\overline{\hat\psi(a\omega)}.$$

Тогда последнее выражение примет вид

$$\left|\omega^k \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(2\pi ib)^{m-r} e^{2\pi i\omega b}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{h}\left(\hat\psi_r((a+h)\omega)-\hat\psi_r(a\omega)\right)-\\ -\frac{\partial}{\partial a}\hat\psi_r(a\omega)\end{array}\right)\right|=$$

$$=\left|\omega^k \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(2\pi ib)^{m-r} e^{2\pi i\omega b}\frac{1}{h}\int_a^{a+h}\int_t^a\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat\psi_r(y\omega)\,dy\,dt\right|\le$$

$$\le\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}|2\pi b|^{m-r}\frac{h}{2}\sup_{\substack{a\le y\le a+h\\ \omega\in\mathbb{R}}}\times$$

$$\times\left|\omega^k\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^r}{\partial\omega^r}\overline{\hat\psi(y\omega)}\right|.$$

Вводится замена $z=y\omega$, и последнее выражение принимает вид

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}|b|^{m-r}\frac{h}{2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\times$$

$$\times\left|z^{k+2}\frac{\partial^{r+2}}{\partial z^{r+2}}\hat\psi(z)\right|\sup_{a\le y\le a+h}|y|^{r-k-2}.$$

Обозначим

$$\gamma_{k+2,r+2}(\hat\psi(z))=\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|z^{k+2}\frac{\partial^{r+2}}{\partial z^{r+2}}\hat\psi(z)\right|$$

и имеем

$$\frac{h}{2}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}|b|^{m-r}\gamma_{k+2,r+2}(\hat\psi(z))\sup_{a\le y\le a+h}|y|^{r-k-2}.$$

Очевидно, что полученное выражение стремится к нулю при $h\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{W_\psi f(a+h,b)-W_\psi f(a,b)}{h}=$$

$$=\left\langle\hat f(\omega),\frac{\partial}{\partial a}e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat\psi(a\omega)}\right\rangle.$$

Докажем дифференцируемость $W_\psi f(a,b)$ по b. Для $h>0$ имеем

$$\frac{1}{h}\left(W_\psi f(a,b+h)-W_\psi f(a,b)\right)-$$

$$-\left\langle\hat f(\omega),\frac{\partial}{\partial b}e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat\psi(a\omega)}\right\rangle=$$

$$=\left(\frac{1}{h}\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)-2\pi i\omega\right)W_\psi f(a,b).$$

Предположим, что $W_\psi f(a,b)\neq 0$. Для доказательства необходимо показать, что

$$\left(\frac{1}{h}\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)-2\pi i\omega\right)\to 0 \text{ при } h\to 0.$$

Рассмотрим выражение $\frac{1}{h}\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)-2\pi i\omega$. Домножим его на h и получим

$$e^{2\pi i\omega h}-1-2\pi i\omega h.$$

Найдем его предел при $h\to 0$.

$$\lim_{h\to 0}e^{2\pi i\omega h}-1-2\pi i\omega h=e^0-1-0=1-1=0.$$

Таким образом, показали, что

$$\left(\frac{1}{h}\left(e^{2\pi i\omega h}-1\right)-2\pi i\omega\right)\to 0 \text{ при } h\to 0.$$

В результате получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

4. Асимптотические свойства вейвлет-преобразования финитных обобщенных функций. В данном пункте рассмотрим асимптотические свойства вейвлет-преобразования финитных обобщенных функций.

Теорема 7. Пусть $W_\psi f(a,b)$ вейвлет-преобразование функции $f\in(\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}))'$ определенное равенством (4). Тогда существуют такие $k,m\in\mathbb{N}_0$, что

$$W_\psi f(a,b)=O((|b|+a)^k), \text{ при } a\to 0.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой, которую будем называть свойством ограниченности финитных обобщенных функций.

Для каждой финитной обобщенной функции $f\in(\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}))'$ существует постоянная C и число $k\in\mathbb{N}_0$ такие, что для любой функции $\Psi\in D$ выполняется неравенство [11]:

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$\left|\langle f,\psi\rangle\right| \le C \sup_t |\psi^{(k)}(t)|,$$

где $0 < C < \infty$ и $k \in \mathbb{N}_0$ зависят от f.

Следовательно, существует константа $C > 0$ и числа $k \in \mathbb{N}_0$ зависящие от f, такие, что

$$|W_\psi f(a,b)| \le C \sup_\omega \left| \frac{\partial^k}{\partial \omega^k}\left(e^{2\pi i \omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right)\right|.$$

Применяется формула Лейбница к выражению, стоящему в правой части последнего неравенства, и получается следующее выражение

$$|W_\psi f(a,b)| \le$$

$$\le C \sup_\omega \left| \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (2\pi i b)^{k-s} e^{2\pi i \omega b} \frac{\partial^s}{\partial \omega^s}\hat{\psi}(a\omega)\right| \le$$

$$\le C' \sup_\omega \left| \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} b^{k-s} \frac{\partial^s}{\partial \omega^s}\hat{\psi}(a\omega)\right|.$$

Вводится замена $z = a\omega$, тогда последнее выражение примет вид

$$|W_\psi f(a,b)| \le C' \sup_z \left| \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} b^{k-s} a^s \frac{\partial^s}{\partial z^s}\hat{\psi}(z)\right|.$$

Теперь вводится обозначение:

$$\gamma_s\left(\hat{\psi}(z)\right) = \sup_z \left| \frac{\partial^s}{\partial z^s}\hat{\psi}(z)\right| < +\infty.$$

И имеем

$$|W_\psi f(a,b)| \le C' \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} |b|^{k-s} a^s \gamma_s\left(\hat{\psi}(z)\right) \le$$

$$\le C'' \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} |b|^{k-s} a^s.$$

Далее применяется формула бинома Ньютона, и полученное выражение преобразуется с учетом того, что $a \to 0$

$$|W_\psi f(a,b)| \le C''(|b|+a)^k = O(|b|+a)^k.$$

Следовательно, при $a \to 0$ получаем следующую оценку для вейвлет-преобразования финитной обобщенной функции

$$W_\psi f(a,b) = O((|b|+a)^k), \text{ при } a \to 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 8. Пусть $W_\psi f(a, b)$ вейвлет-преобразование функции $f \in (\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}))'$ определенное равенством (4). Тогда существуют такие $m, k \in \mathbb{N}_0$, что

$$W_\psi f(a,b) = O\left(|b|^k\right), \text{ при } |b| \to \infty.$$

Доказательство. Для доказательства необходимо действовать аналогично доказательству предыдущей теоремы. Применить свойство ограниченности финитных обобщенных функций, затем формулу Лейбница, ввести замену, применить формулу бинома Ньютона. В результате этих действий получается следующее неравенство:

$$|W_\psi f(a,b)| \le C''(|b|+a)^k.$$

Правая часть неравенства преобразуется с учетом того, что теперь $|b| \to \infty$. При $|b| \to \infty$ очевидно, что $a << |b|$, и последнее выражение может быть записано следующим образом

$$|W_\psi f(a,b)| \le C''|b|^k.$$

Следовательно, при $|b| \to \infty$ получена следующая оценка для вейвлет-преобразования финитной обобщенной функции

$$W_\psi f(a,b) = O(|b|^k).$$

Теорема доказана.

Заключение. В статье введено вейвлет-преобразование финитных обобщенных функций и доказаны основные его свойства, в частности, доказаны теоремы: об асимптотике роста вейвлет-преобразования на пространстве финитных обобщенных функций для случая, когда параметр растяжения стремится к нулю, и для случая, когда параметр смещения стремится к бесконечности, дифференцируемость по обеим переменным.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Литература

1. *Банюкевич, Е. В.* Асимптотические свойства вейвлет-преобразований медленно растущих обобщенных функций / Е. В. Банюкевич, Ю. М. Вувуникян // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2017. – Т. 7, № 2. – С. 15–23.
2. *Гельфанд, И. М.* Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов // Выпуск 1. 2-е изд. – М., 1959. – 470 с.
3. *Вувуникян, Ю. М.* Полиномиальные эволюционные операторы: монография / Ю. М. Вувуникян, Д. С. Шпак. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2015. – 277 с.
4. *Банюкевич, Е. В.* Преобразование Фурье финитных обобщенных функций / Е. В. Банюкевич // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 2018 г. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2018 – С. 5–6.
5. *Гельфанд, И. М.* Обобщенные функции: пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – Выпуск 2. – М., 1958. – 307 с.
6. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики: учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В Жаринов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
7. *Шубин, М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. / Шубин М. А. – 2-е изд., испр. – М. : МЦНМО, 2003. – 303 с.
8. *Дрожжинов, Ю. Н.* Введение в теорию обобщенных функций / Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов. – М. : МИАН, 2006. – 164 с.
9. *Добеши, И.* Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
10. *Holschneider, M.* Oxford mathematical monographs: Wavelets: an analysis tools / M. Holschneider. – Oxford : University Press, 1999. – 448 p.
11. *Zemanian, A. H.* Distribution theory and transform analysis: an introduction to generalized function, with applications / A. H. Zemanian. – New York: Dover Publications, 2011. – 400 p.

References

1. *Banyukevich, E. V.* Asimptoticheskie svojstva vejvlet-preobrazovanij medlenno rastushchih obobshchennyh funkcij / E. V. Banyukevich, Yu. M. Vuvunikyan // Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaўnaga ўniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne. – 2017. – T. 7, № 2. – S. 15–23.
2. *Gel'fand, I. M.* Obobshchennye funkcii i dejstviya nad nimi / I. M. Gel'fand, G. E. Shilov // Vypusk 1. 2-e izd. – M., 1959. – 470 s.
3. *Vuvunikyan, Yu. M.* Polinomial'nye evolyucionnye operatory: monografiya / Yu. M. Vuvunikyan, D. S. Shpak. – Grodno : GrGU im. Ya. Kupaly, 2015. – 277 s.
4. *Banyukevich, E. V.* Preobrazovanie Fur'e finitnyh obobshchennyh funkcij / E. V. Banyukevich // Novye matematicheskie metody i komp'yuternye tekhnologii v proektirovanii, proizvodstve i nauchnyh issledovaniyah : materialy XXI Respublikanskoj nauchnoj konferencii studentov i aspirantov, Gomel', 2018 g. – Gomel' : GGU im. F. Skoriny, 2018 – S. 5–6.
5. *Gel'fand, I. M.* Obobshchennye funkcii: prostranstva osnovnyh i obobshchennyh funkcij / I. M. Gel'fand, G. E. Shilov. – Vypusk 2. – M., 1958. – 307 s.
6. *Vladimirov, V. S.* Uravneniya matematicheskoj fiziki: uchebnik dlya vuzov / V. S. Vladimirov, V. V Zharinov. – M. : FIZMATLIT, 2004. – 400 s.
7. *Shubin, M. A.* Lekcii ob uravneniyah matematicheskoj fiziki. / Shubin M. A. – 2-e izd., ispr. – M. : MCNMO, 2003. – 303 s.
8. *Drozhzhinov, Yu. N.* Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkcij / Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav'yalov. – M. : MIAN, 2006. – 164 s.
9. *Dobeshi, I.* Desyat' lekcij po vejvletam / I. Dobeshi. – Izhevsk : NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», 2001. – 464 s.
10. *Holschneider, M.* Oxford mathematical monographs: Wavelets: an analysis tools / M. Holschneider. – Oxford : University Press, 1999. – 448 p.
11. *Zemanian, A. H.* Distribution theory and transform analysis: an introduction to generalized function, with applications / A. H. Zemanian. – New York: Dover Publications, 2011. – 400 p.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ