Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 4. С. 9–15.

УДК 517.988

СИСТЕМНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНЫЙ ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Ю. М. Вувуникян,
доктор физико-математических, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы;

И. В. Трифонова,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Поступила в редакцию 23.07.19.

UDC 517.988

SYSTEM ASYMPTOTICALLY INVERSE EVOLUTIONARY OPERATOR

Y. Vuvunikian,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, GrSU named after Ya. Kupala;

I. Trifonova,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, GrSU named after Ya. Kupala

Received on 23.07.19.

Нелинейные эволюционные операторы находят широкое применение при описании состояния нелинейных динамических систем. Рассматривается системный асимптотически обратный оператор определенной степени к системному эволюционному оператору. Объектом исследования является асимптотически обратный эволюционный оператор второй кратности, а предметом исследования – компоненты такого оператора. На основании общей теории системных эволюционных операторов описывается системный асимптотически обратный оператор и, в частности, строятся начальные компоненты асимптотически обратного оператора второй кратности, что является целью данной работы. Во введении описана основная задача исследования. В основной части статьи сформулированы понятия системного асимптотически обратного эволюционного оператора, рассмотрен системный асимптотически обратный эволюционный оператор второй кратности и представлено построение начальных компонент такого оператора для определенного вида динамических систем. Представлена задача построения спектральных характеристик системы с учетом введенных характеристических параметров системы, что существенно расширит класс исследуемых систем. В заключении кратко изложены основные результаты исследования.

Ключевые слова: системные эволюционные операторы, обобщенные импульсные характеристики, обобщенные спектральные характеристики системных эволюционных операторов, асимптотически обратный оператор, характеристический параметр.

Nonlinear evolutionary operators find a wide application in describing the state of nonlinear dynamical systems. A system asymptotically inverse operator of a certain degree to a system evolution operator is considered. The object of the study is the asymptotic inverse evolutionary operator of the second multiplicity, and the subject of the study are the components of such an operator. On the basis of the general theory of system evolutionary operators, a system asymptotically inverse operator is described and, in particular, the initial components of the asymptotically inverse operator of the second multiplicity are constructed, which is the objective of this work. The introduction describes the main task of the study. In the main part of the article, the notions of a system asymptotically inverse evolutionary operator are formulated, a system asymptotically inverse secondorder evolution operator is considered, and the construction of the initial components of such an operator for a certain type of dynamic systems is presented, and the problem of constructing the spectral characteristics of the system taking into account the introduced characteristic parameters of the system, which will expand the class of the studied systems. In conclusion, the main results of the study are summarized.

Keywords: system evolution operators, generalized impulse characteristics, generalized spectral characteristics of system evolution operators, asymptotically inverse operator, characteristic parameter.

Введение. Современные сложные процессы описываются моделями динамических систем. Выходной сигнал системы можно определить на основании переходной импульсной характеристики. Поэтому, зная импульсную характеристику системы, можно получить полную ее характеристику. У нелинейных эволюционных операторов импульсные характеристики определяются обобщенными функциями. Исследования нелинейных эволюционных операторов произвольной кратности представлены в [1–2]. В статье рассмотрен системный асимптотически обратный оператор и представлено построение начальных компонент такого оператора. Полученные результаты имеют приложения для динамических систем дифференциальных уравнений, к которым применимы нелинейные эволюционные операторы.

Основная часть. 1. Системный асимптотически обратный эволюционный оператор. Пусть X – пространство обобщенных функций экспоненциального роста с носителями на замкнутой положительной полуоси. Рассмотрим системные эволюционные операторы произвольной кратности, действующие из пространства X^p в пространство X^q. Пусть $A : X^p \to X^q$ – системный эволюционный оператор: $Ax = \sum_{\alpha \neq 0} S_{|\alpha|}(a_\alpha * x^{\otimes \alpha})$, $(x \in X^{\nu})$. $B : X^p \to X^q$, где B – полиномиальный системный оператор степени r : $Bx = \sum_{|\beta|=1}^{r} S_{|\beta|}(b_\beta * x^{\otimes \beta})$ $(x \in X^{\nu})$. И пусть C – системный оператор, действующий из пространства X^p в пространство X^p и являющийся произведением операторов B и A, то есть $C = B \cdot A$, а F – системный оператор, действующий из пространства X^q в пространство X^q и являющийся произведением системных операторов A и B, то есть $F = B \cdot A$.

Оператор B называется левым системным асимптотически обратным оператором степени r к системному оператору A, если

$$C = I_p + \sum_{|\alpha| \geq r+1}^{+\infty} C_\alpha, \tag{1}$$

где I_p – тождественный оператор, действующий в пространстве X^p, то есть

$$\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = I_p \text{ и } C_\alpha = 0 \text{ при } 2 \leq |\alpha| \leq r.$$

Оператор B называется правым системным асимптотически обратным оператором степени r к системному оператору A, если

$$F = I_q + \sum_{|\alpha| \geq r+1}^{+\infty} F_\alpha, \tag{2}$$

где I_q – тождественный оператор, действующий в пространстве X^q, то есть $\sum_{|\alpha|=1} F_\alpha = I_q$, и $F_\alpha = 0$, $2 \leq |\alpha| \leq r$.

Оператор B называется системным асимптотически обратным оператором степени r к системному оператору A, когда он одновременно является левым, правым системным асимптотически обратным оператором степени r к A.

Пусть $\tilde{X}$ – дуальное по Лапласу пространство к пространству X, $(\tilde{a}_\alpha)$, $(\tilde{b}_\beta)_{|\beta|=1}^{r}$, $(\tilde{c}_\alpha)$, $(\tilde{f}_\alpha)$ – системы обобщенных спектральных характеристик (являющихся обобщенными преобразованиями Лапласа импульсных характеристик) системных операторов A, B, C, F соответственно. Из условия $\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = I_p$ получаем: $\alpha = e_k$ $(k = \overline{1;p})$, где e_k – вектор, k-я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0.

Тогда условие $\sum_{|\alpha|=1} C_\alpha = I_p$ равносильно условию $\sum_{k=1}^{p} C_{e_k} = I_p$, то есть

$$\sum_{k=1}^{p} \tilde{c}_{e_k}(\lambda)\tilde{x}(\lambda) = \tilde{x}(\lambda) \quad (x \in X^p) \tag{3}$$

Рассматриваемое условие (3) эквивалентно системе

$$\tilde{c}_{e_k,m}(\lambda) = \delta_{k,m} \quad (m = \overline{1;p}), \tag{4}$$

где $\tilde{c}_{e_k,m}$ – m-я компонента вектора-функции $\tilde{c}_{e_k}$, а $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Таким образом, оператор B является системным левым асимптотически обратным оператором степени r к оператору A, если выполнены условия (4) и условие

$$\tilde{c}_\alpha = 0 \quad (2 \leq |\alpha| \leq r). \tag{5}$$

Полагая в общей формуле композиции системных операторов $\alpha = e_k$, учитывая, что $|\alpha| = |e_k| = 1$, и, значит, $m = 1$ $\vec{\alpha} = \alpha^1 = \alpha = e_k$, получаем следующее равенство:

$$\tilde{c}_{e_k}(\lambda) =$$

$$= \sum_{|\beta|=1} \tilde{b}_\beta(\lambda) \prod_{j=1}^{q} \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{a}_{\alpha^{m_j+k_j},j}(\lambda^{m_j+k_j}) = \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{b}_{e_j}(\lambda)\tilde{a}_{e_k,j}(\lambda). \quad (6)$$

Таким образом, в силу равенства (6) имеем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{p} \tilde{b}_{e_j}(\lambda)\tilde{a}_{e_k,j}(\lambda) = \delta_{k,m} \qquad (k,m = \overline{1;p}). \qquad (7)$$

Введем вспомогательные матрицы

$$\tilde{A}(\lambda) = \left(\tilde{a}_{e_k,j}(\lambda)\right)_{k,j=1}^{p,q},$$

$$\tilde{B}(\lambda) = \left(\tilde{b}_{e_j,m}(\lambda)\right)_{j,m=1}^{q,p},$$

$$\tilde{I}_p = \left(\delta_{k,m}\right)_{k,m=1}^{p}.$$

Тогда систему линейных уравнений (7) можно записать в виде:

$$\tilde{B}(\lambda)\tilde{A}(\lambda) = \tilde{I}. \qquad (8)$$

Из полученного равенства следует, что для любого $\lambda \in \Pi_c$ матрица $\tilde{B}(\lambda)$ является левой обратной к матрице $\tilde{A}(\lambda)$. В этом случае мы будем говорить, что матричная функция $\tilde{A}(\lambda)$ обратима слева. Если матричная функция $\tilde{A}(\lambda)$ обратима слева, то из матричной функции $\tilde{B}(\lambda)$ определяются все компоненты спектральных характеристик $\tilde{b}_\beta$ для любых $|\beta| = 1$. Рассмотрим теперь условие $C_\alpha = 0$ при $2 \le |\alpha| \le r$. Согласно теореме композиции, когда $|\alpha| = \overline{2;r}$ имеем: $\forall\, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Pi_c^n$

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{|\beta|=m} \sum_{\vec{\alpha} \in \Xi_{\alpha,m}} \tilde{b}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, ..., |\lambda^m|) \prod_{j=1}^{\nu} \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{a}_{\alpha^{m_j+k_j},j}(\lambda^{m_j+k_j}) =$$

$$= 0.$$

Отделим в рассматриваемой сумме слагаемое, когда $m = n$. В силу того, что

$$|\alpha^1|, |\alpha^2|, ... |\alpha^n| \ge 1, \quad |\alpha^1| + |\alpha^2| + ... + |\alpha^n| = n,$$

$$|\beta| = n, \ \vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n), \ \vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n),$$

$$|\alpha^1| = |\alpha^2| = ... = |\alpha^n| = 1,$$

получим следующее:

$$\sum_{|\beta|=n} \sum_{\substack{\alpha=\alpha^1+...+\alpha^n \\ |\alpha^1|=...=|\alpha^n|=1}} \tilde{b}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, ..., |\lambda^n|) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p} \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{a}_{\alpha^{m_j+k_j},j}(\lambda^{m_j+k_j}) = \qquad 9)$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{|\beta|=m} \sum_{\vec{\alpha} \in \Xi_{\alpha,m}} \tilde{b}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, ..., |\lambda^m|) \prod_{j=1}^{p} \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{a}_{\alpha^{m_j+k_j},j}(\lambda^{m_j+k_j}).$$

Аналогично, если B – правый системный квазиобратный степени r к оператору A, то выполнены следующие условия:

$$\tilde{f}_{e_k,m}(\lambda) = \delta_{k,m} \quad (k,m = \overline{1;q}), \qquad (10)$$

$$\tilde{f}_\alpha = 0 \quad (2 \le |\alpha| \le r). \qquad (11)$$

Полагая в общей формуле композиции, $\alpha = e_k$, учитывая, что $|\alpha| = |e_k| = 1$, и, следовательно, $m = 1$, $\vec{\alpha} = \alpha^1 = \alpha = e_k$, имеем:

$$\tilde{f}_{e_k}(\lambda) = \sum_{|\beta|=1} \tilde{a}_\beta(\lambda) \prod_{j=1}^{q} \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{b}_{\alpha^{m_j+k_j},j}(\lambda^{m_j+k_j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \tilde{a}_{e_j}(\lambda)\tilde{b}_{e_k,j}(\lambda).$$

Тогда в силу условия (10) получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{q} \tilde{a}_{e_j,m}(\lambda)\tilde{b}_{e_k,j}(\lambda) = \delta_{k,m}$$

$$(k,m = \overline{1;q}). \qquad (12)$$

С помощью матриц

$$\tilde{A}(\lambda) = \left(\tilde{a}_{e_k,j}(\lambda)\right)_{k,j=1}^{p,q},$$

$$\tilde{B}(\lambda) = \left(\tilde{b}_{e_j,m}(\lambda)\right)_{j,m=1}^{q,p},$$

$$\tilde{I}_q = \left(\delta_{k,m}\right)_{k,m=1}^{q}$$

система уравнений (12) запишется в следующем виде: $\tilde{A}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) = \tilde{I}_q$, откуда следует, что матрица $\tilde{B}(\lambda)$ является правой обратной к матрице $\tilde{A}(\lambda)$. Из полученных соотношений следует, что, когда оператор B является асимптотически обратным системным оператором, матрица $\tilde{B}(\lambda)$ является обратной к матрице $\tilde{A}(\lambda)$.

Таким образом, если матричная функция $\tilde{A}(\lambda)$ обратима, то из системы (11) определяются все компоненты спектральных характеристик $\tilde{b}_\beta$ для любых $|\beta| = 1$.

Рассмотрим условие (11), когда $|\alpha| = n$, где $2 \le n \le r$. Тогда для любых $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Pi_c^n$ справедливо следующее равенство:

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{|\beta|=m} \sum_{\vec{\alpha} \in \Xi_{\alpha,m}} \tilde{a}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, \ldots, |\lambda^m|) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{q} \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{b}_{\alpha^{m_j+k_j},j}(\lambda^{m_j+k_j}) = 0.$$

Выделяя первое слагаемое и учитывая, что $\vec{\alpha} = \alpha^1 = \alpha$, имеем:

$$\sum_{|\beta|=1} \tilde{a}_\beta(\lambda_1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \prod_{j=1}^{q} \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{b}_{\alpha,j}(\lambda^{m_j+k_j}) =$$
$$= -\sum_{m=2}^{n} \sum_{|\beta|=m} \sum_{\vec{\alpha} \in \Xi_{\alpha,m}} \tilde{a}_\beta(|\lambda^1|, |\lambda^2|, \ldots, |\lambda^m|) \times \qquad (13)$$
$$\times \prod_{j=1}^{q} \prod_{k_j=1}^{\beta_j} \tilde{b}_{\alpha^{m_j+k_j},j}(\lambda^{m_j+k_j}).$$

Отметим то, что $m \ge 2$, $|\alpha^1|, |\alpha^2|, \ldots |\alpha^m| \ge 1$ и $|\alpha^1| + |\alpha^2| + \ldots + |\alpha^m| = n$, $|\alpha^1|, |\alpha^2|, \ldots |\alpha^m| \le n - 1$. Значит, правая часть равенства (13) не содержит $\tilde{b}_{\alpha,j}$, если $|\alpha| = n$.

Кроме того, так как $|\beta| = 1$, то $\beta = e_j$, и, значит, равенство (13) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{q} \tilde{a}_{e_j}(\lambda_1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \tilde{b}_{\alpha,j}(\lambda) = f(\lambda), \qquad (14)$$

где $f(\lambda)$ – правая часть равенства (13).

Обозначим $\lambda_1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ как $\hat{\lambda}$, а матрица $\tilde{A}(\hat{\lambda})$ состоит из векторов $\tilde{a}_{ej}(\hat{\lambda})$, $(j = \overline{1;q})$.

Тогда запишем систему линейных уравнений (13) в следующем виде:

$$\tilde{A}(\hat{\lambda})\, \tilde{b}_\beta(\lambda) = f(\lambda). \qquad (15)$$

Если матричная функция $\tilde{A}(\lambda)$ обратима справа, то обобщенные спектральные характеристики $\tilde{b}_\alpha$ системного асимптотически обратного справа оператора $2 \le |\alpha| \le r$ определяются из уравнения (15).

Таким образом, мы получили следующее утверждение:

Пусть $(\tilde{a}_\alpha)$ – система обобщенных спектральных характеристик системного эволюционного оператора A произвольной кратности.

1. Если матричная функция $\tilde{A}(\lambda)$ обратима слева, причем каждый элемент обратной слева матрицы принадлежит пространству $\tilde{X}^q$, то оператор A имеет системный левый асимптотически обратный оператор B степени r для любого натурального числа r. При этом все компоненты обобщенных спектральных характеристик $\tilde{b}_\alpha$ оператора B определяются из системы уравнений (7) где $|\alpha| = 1$ и системы уравнений (9), где $2 \le |\alpha| \le r$.

2. Если матричная функция $\tilde{A}(\lambda)$ обратима справа, причем каждый элемент обратной справа матрицы принадлежит пространству $\tilde{X}^q$, то оператор A имеет правый асимптотически обратный оператор B степени r для любого натурального числа r. При этом все компоненты обобщенных спектральных характеристик $\tilde{b}_\alpha$ оператора B определяются из системы уравнений (12) системы уравнений (15), где $2 \le |\alpha| \le r$, $|\alpha| = 1$.

3. Если матричная функция $\tilde{A}(\lambda)$ обратима, причем каждый элемент обратной матрицы принадлежит пространству $\tilde{X}^p$, то оператор A имеет системный асимптотически обратный оператор B степени r для любого натурального числа r. При этом все компоненты обобщенных спектральных характеристик первого порядка оператора B определяются из соответствующих систем линейных уравнений, а компоненты обобщенных спектральных характеристик порядка выше

первого определяются из соответствующих рекурсивных соотношений.

2. *Системный асимптотически обратный эволюционный оператор второй кратности.* Пусть X_a – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на всей числовой оси с носителем на луче [a; ∞). Пространство X является объединением пространств X_a ($a \in R$). Это пространство всех финитных слева бесконечно дифференцируемых на числовой оси, которое снабжено топологией индуктивного предела. Оператор второй кратности A действует из пространства X^2 в пространство X^2 так, что, если носитель $x(t)$ содержится на $[t_0; \infty)^2$, то и носитель $Ax(t)$ содержится на $[t_0; \infty)^2$ [3].

Нелинейным эволюционным оператором второй кратности, например, можно описать следующую систему двух дифференциальных уравнений второго порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_1^2 - \alpha_4 x_1 x_2 - \alpha_5 x_2^2 = f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_1^2 - \beta_4 x_1 x_2 - \beta_5 x_2^2 = f_2(t). \end{cases} \quad (16)$$

Операторный вид системы (16) может быть записан $Ax = f$, где

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 + A_2^1 \\ A_1^2 + A_2^2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1^1(x_1,x_2) = (\delta' - \alpha_1\delta) * x_1 - \alpha_2\delta * x_2,$$
$$A_2^1(x_1,x_2) = -\alpha_3\delta^{\otimes 2} * x_1^{\otimes 2} -$$
$$-\alpha_4\delta^{\otimes 2} * (x_1 \otimes x_2) - \alpha_5\delta^{\otimes 2} * x_2^{\otimes 2};$$
$$A_1^2(x_1,x_2) = -\beta_1\delta * x_1 + (\delta' - \beta_2\delta) * x_2;$$
$$A_2^2(x_1,x_2) = -\beta_3\delta^{\otimes 2} * x_1^{\otimes 2} -$$
$$-\beta_4\delta^{\otimes 2} * (x_1 \otimes x_2) - \beta_5\delta^{\otimes 2} * x_2^{\otimes 2}.$$

По импульсной характеристике нетрудно восстановить дифференциальную систему в некоторый момент и произвести расчет реакции системы от действия непериодического сигнала произвольной формы к определению реакции системы на простейшее воздействие типа единичной или δ-функции, с помощью которых аппроксимируется входной сигнал. Асимптотически обратным эволюционным оператором степени l к эволюционному оператору A степени n будет являться эволюционный оператор B степени l

$$Bx = \sum_{m_1,m_2} S_{m_1+m_2}\left(b_{m_1,m_2} * \left(x_1^{\otimes m_1} \otimes x_2^{\otimes m_2}\right)\right), \quad (17)$$

при этом выполняются равенства $C = I + \sum_{k_1+k_2 \ge l+1} C_{k_1,k_2}$ для (17), где I – тождественный оператор. Для построения оператора B второй кратности к оператору A необходимо составить композицию $A \circ B$. Так как операторы A и B – нелинейные эволюционные операторы второй кратности, то композицию можно записать следующим образом: $A \circ B = A^1\left(B^1\right) + A^2\left(B^1, B^2\right)$. Так как оператор B – асимптотически обратный эволюционный оператор, то имеем $A^1(B^1) = E$, $A^2(B^1, B^2) = 0$, где E – единичная матрица. По импульсным характеристикам на основании преобразования Лапласа получаем спектральные характеристики эволюционных операторов. Напомним, что преобразованием Лапласа обобщенной функции $f(t)$ из пространства всех обобщенных функций экспоненциального роста степени k с компактным носителем является функция $\tilde{f}$, определяемая равенством

$$\tilde{f}(\lambda) = \left\langle f(t), e^{-\lambda t}\right\rangle \quad (\lambda \in \Pi_k^n), \quad (18)$$

где $\lambda t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \ldots + \lambda_n t_n$,

$\Pi_k^n \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in C^n \middle| \operatorname{Re}\lambda_j > k, \left(j = \overline{1;n}\right)\right\}$.

3. *Начальная компонента асимптотически обратного оператора второй кратности.* На основании вышеизложенного построим начальную компоненту асимптотически обратного оператора для двух следующих примеров.

Пример 1. Рассмотрим построение компонент асимптотически обратного оператора для уравнения вида $x' + x + x^2 = \theta(t)$. Соответствующий ему нелинейный эволюционный оператор описан в [4, с.194–201]. Тогда для него можно записать систему:

$$\begin{cases} x' - y = C, \\ y + x + x^2 = \theta(t) - C, \end{cases} \quad \text{где } C(t) = \begin{cases} C, & \text{если } t \ge 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

В матричном виде запишем

$$\begin{pmatrix} \delta' * x - \delta * y \\ \delta * x + \delta * y + \delta \otimes \delta * x \otimes x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ \theta(t) - C \end{pmatrix},$$

где импульсные характеристики оператора имеют вид:

$$a_1=\begin{pmatrix}\delta' & -\delta\\ \delta & \delta\end{pmatrix};\quad a_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \delta\otimes\delta & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Первая компонента определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\delta' & -\delta\\ \delta & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^1_{1,0} & b^1_{0,1}\\ b^2_{1,0} & b^2_{0,1}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & \theta(t)-C\end{pmatrix}.$$

Получим соответствующую систему

$$\begin{cases}\delta' b^1_{1,0}-\delta b^2_{1,0}=C,\\ \delta' b^1_{0,1}-\delta b^2_{0,1}=0,\\ \delta b^1_{1,0}-\delta b^2_{1,0}=0,\\ \delta b^1_{0,1}-\delta b^2_{0,1}=\theta(t)-C.\end{cases}$$

Тогда после преобразования Лапласа импульсных характеристик для спектральных характеристик получим следующее:

$$\tilde{a}_1(\lambda_1)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & -1\\ \lambda_1 & \lambda_1\end{pmatrix};$$
$$\tilde{a}_2(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$\tilde{a}_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & \ldots & 0\\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}, n\geq 3.$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{b}^1_{1,0} & \tilde{b}^1_{0,1}\\ \tilde{b}^2_{1,0} & \tilde{b}^2_{0,1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & 0\\ 0 & \frac{1-!}{\lambda_1}\end{pmatrix},\quad\begin{cases}\lambda_1\tilde{b}^1_{1,0}-\tilde{b}^2_{1,0}=\frac{1}{\lambda_1},\\ \lambda_1\tilde{b}^1_{0,1}-\tilde{b}^2_{0,1}=0,\\ \tilde{b}^1_{1,0}+\tilde{b}^2_{1,0}=0,\\ \tilde{b}^1_{0,1}+\tilde{b}^2_{0,1}=\frac{1-!}{\lambda_1}.\end{cases}$$

Решение системы:

$$\begin{cases}\tilde{b}^1_{1,0}=\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1+1)},\\ \tilde{b}^2_{1,0}=-\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1+1)},\\ \tilde{b}^1_{0,1}=\frac{1-C}{\lambda_1(\lambda_1+1)},\\ \tilde{b}^2_{0,1}=\frac{1-C}{\lambda_1+1}.\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1+1)},\\ -\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1+1)},\\ =\frac{1-C}{\lambda_1(\lambda_1+1)},\\ =\frac{1-C}{\lambda_1+1}.\end{cases}$$

Тогда первая компонента построена. Вторая компонента композиции $A^2\left(B^1,B^2\right)=B^2\left(A^1\right)^{\otimes 2}+B^1A^2=0$. Следовательно, B^2 оператора B может быть найдена из равенства $B^2=-B^1A^2\left(\left(A^1\right)^{\otimes 2}\right)^{-1}$. Нахождение последующих компонент выполняется рекуррентно.

Пример 2. Рассмотрим уравнение вида $x''+\mu x'+\eta x=\theta(t),\mu\in R,\eta\in R$.

Тогда для него можно записать соответствующую систему:

$$\begin{cases}x'-y=C,\\ y'+\mu y+\frac{\eta}{2}y^2=\theta(t),\end{cases}$$ где

$$C(t)=\begin{cases}C, & \text{если } t\geq 0,\\ 0, & \text{если } t<0.\end{cases}\qquad(19)$$

Коэффициенты *μ, η* будем называть характеристическими параметрами системы, так как их значения будут существенно влиять на импульсные и спектральные характеристики. Для системы (19)

$$\begin{pmatrix}\delta'*x-\delta*y\\ (\delta'+\mu\delta)*y+\frac{\eta}{2}\delta\otimes\delta*y\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}C\\ \theta(t)\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}\delta' b^1_{1,0}-\delta b^2_{1,0}=C,\\ (\delta'+\mu\delta)b^2_{1,0}=0,\\ \delta' b^1_{0,1}-\delta b^2_{0,1}=0,\\ (\delta'-\mu\delta)b^2_{0,1}=\theta(t)\end{cases}$$

Импульсные характеристики имеют вид:

$$a_1=\begin{pmatrix}\delta' & -\delta\\ 0 & \delta'+\mu\delta\end{pmatrix},$$
$$a_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\eta}{2}(\delta\otimes\delta)\end{pmatrix}.$$

Первая компонента композиции: $\begin{pmatrix}\delta' & -\delta\\ 0 & \delta'+\mu\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^1_{1,0} & b^1_{0,1}\\ b^2_{1,0} & b^2_{0,1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & \theta(t)\end{pmatrix}$.

Тогда после преобразования Лапласа импульсных характеристик получим следующее:

$$\tilde{a}_1(\lambda_1)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & -1\\ 0 & \lambda_1+\mu\end{pmatrix};$$

$$\tilde{a}_2(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\eta}{2}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{a}_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}0 & \ldots & 0\\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}, n\geq 3.$$

Получим следующую систему:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & -1\\ 0 & \lambda_1+\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{b}^1_{1,0} & \tilde{b}^1_{0,1}\\ \tilde{b}^2_{1,0} & \tilde{b}^2_{0,1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{C}{\lambda_1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\lambda_1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}\lambda_1\tilde{b}^1_{1,0}-\tilde{b}^2_{1,0}=\dfrac{C}{\lambda_1},\\ (\lambda_1+\mu)\tilde{b}^2_{1,0}=0,\\ \lambda_1\tilde{b}^1_{0,1}-\tilde{b}^2_{0,1}=0,\\ (\lambda_1-\mu)\tilde{b}^2_{0,1}=\dfrac{1}{\lambda_1}.\end{cases}$$

Учитывая, что λ_1 может принимать произвольные значения, а μ имеет фиксированное значение, получим следующие результаты:

$$\begin{cases}\tilde{b}^2_{1,0}=0,\\ \tilde{b}^1_{1,0}=\dfrac{C}{\lambda_1^2},\\ \tilde{b}^2_{0,1}=\dfrac{1}{\lambda_1(\lambda_1+\mu)},\\ \tilde{b}^1_{0,1}=\dfrac{1}{\lambda_1^2(\lambda_1+\mu)}\end{cases}\begin{pmatrix}\dfrac{C}{\lambda_1^2} & \dfrac{1}{\lambda_1^2(\lambda_1+\mu)}\\ 0 & \dfrac{1}{\lambda_1(\lambda_1+\mu)}\end{pmatrix}.$$

В случае μ – 0 первая компонента асимптотически обратного оператора второй кратности строится так:

$$\begin{pmatrix}C|t|_+ & t_+^2\\ 0 & |t|_+\end{pmatrix}, \text{где } |t|_+=\begin{cases}t, t\geq 0,\\ 0, t<0,\end{cases} t_+^2=\begin{cases}t^2, t\geq 0,\\ 0, t<0.\end{cases}$$

Вторая и последующие компоненты строятся рекуррентно. Когда μ стремится к нулю или бесконечности, для определения спектральных характеристик оператора требуется дальнейшее исследование. Таким образом, нахождение компонент асимптотически обратного эволюционного оператора второй кратности сводится к последовательному решению систем соответствующих линейных уравнений.

Заключение. В статье рассмотрен системный асимптотически обратный оператор второй кратности, приведен алгоритм нахождения его компонент, рассмотрены два модельных примера.

Литература

1. *Вувуникян, Ю. М.* Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками : монография / Ю. М. Вувуникян. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2007. – 224 с.
2. *Вувуникян, Ю. М.* Обобщенные функции и нелинейные эволюционные операторы: монография / Ю. М. Вувуникян. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2014. – 302 с.
3. *Вувуникян, Ю. М.* Нелинейные эволюционные операторы второй кратности : монография / Ю. М. Вувуникян, И. В. Трифонова. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2019. – 254 с.
4. *Вувуникян, Ю. М.* Полиномиальные эволюционные операторы : монография / Ю. М. Вувуникян, Д. С. Шпак. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2015. – 277 с.

References

1. *Vuvunikyan, Yu. M.* Evolyucionnye operatory s obobshchennymi impul'snymi i spektral'nymi harakteristikami : monografiya / Yu. M. Vuvunikyan. – Grodno : GrGU im. Ya. Kupaly, 2007. – 224 s.
2. *Vuvunikyan, Yu.* M. Obobshchennye funkcii i nelinejnye evolyucionnye operatory: monografiya / Yu. M. Vuvunikyan. – Grodno : GrGU im. Ya. Kupaly, 2014. – 302 s.
3. Vuvunikyan, Yu. M. Nelinejnye evolyucionnye operatory vtoroj kratnosti : monografiya / Yu. M. Vuvunikyan, I. V. Trifonova. – Grodno : GrGU im. Ya. Kupaly, 2019. – 254 s.
4. *Vuvunikyan, Yu. M.* Polinomial'nye evolyucionnye operatory : monografiya / Yu. M. Vuvunikyan, D. S. Shpak. – Grodno : GrGU im. Ya. Kupaly, 2015. – 277 s.