МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 4. С. 5–8.

УДК 5517.968.25

ДАСЛЕДАВАННЕ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ПРЫ ДАПАМОЗЕ F-МАНАГЕННЫХ ГІПЕРКАМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦЫЙ

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт "МІТСО"»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя Максіма Танка

Паступіў у рэдакцыю 11.10.19.

UDC 517.968.25

INVESTIGATION OF THE SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USING F-MONOGENIC HYPERCOMPLEX FUNCTIONS

V. Shilinets,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Higher Mathematics, IILSR;

I. Gulo,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank

Received on 11.10.19.

Пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый даследавана сістэма трох дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных.

Ключавыя словы: сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных, гіперкамплексная функцыя, манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, фармальныя вытворныя.

With the help of F-monogenic hypercomplex functions the system of three differential equations in partial derivatives has been studied.

Keywords: system of three differential equations in partial derivatives, hypercomplex function, monogeneity in the sense of V. Fedorov, formal derivatives.

Уводзіны. Для вывучэння дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных выкарыстоўваюцца розныя метады. Адным з такіх метадаў з'яўляецца метад функцый, манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенных) [1–7]. У прыватнасці, пры дапамозе F-манагенных функцый удаецца пабудаваць функцыянальна-інварыянтныя рашэнні сістэмы Максвэла для электрамагнітнага поля ў пустаце [8, 9]. Акрамя гэтага, пры дапамозе адзначаных функцый удаецца для асобных відаў дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў будаваць рашэнні ў замкнутай форме.

У дадзенай працы пры дапамозе F-манагенных гіперкамплексных функцый даследуецца сістэма трох дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных.

Асноўная частка. Разгледзім сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных выгляду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

дзе u, v, w – шуканыя камплексназначныя функцыі трох рэчаісных зменных x, y, z. Усе разглядаемыя функцыі мяркуюцца дыферэнцавальнымі ў некаторым адназвязным абсягу D эўклідавай прасторы $E^3(x, y, z)$.

Няхай алгебра A – асацыятыўна-камутатыўная алгебра з базісам, 1, λ, λ^2, дзе закон множання вызначаецца роўнасцю $\lambda^3 = 1$.

Увядзём у разгляд гіперкамплексную функцыю

$$f = u + \lambda v + \lambda^2 w.$$

Базай будзем называць сукупнасць функцый, па якіх знаходзяцца фармальныя вытворныя [9]. У якасці базы фармальных вытворных выбіраем гіперкамплексныя функцыі

$$p = x + 2\lambda y + \lambda^2 z,\ q = \lambda y + \lambda^2 z,\ t = \lambda^2 z.$$

Тады, на падставе азначэння фармальных вытворных [10], атрымліваем наступную тэарэму.

Тэарэма 1. Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1) раўназначная раўнанню ў фармальных вытворных

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad (2)$$

дзе $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$, $\frac{\partial f}{\partial t} = f'_x + \lambda f'_z + \lambda^2 f'_y$.

Роўнасць (2) сведчыць аб тым, што f – адвольная манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава адносна функцый p і q у абсягу D функцыя.

Даследуем структуру такіх F-манагенных гіперкамплексных функцый.

Поруч з гіперкамплекснай сістэмай з базісам 1, λ, λ^2, ($\lambda^3 = 1$) разгледзім гіперкамплексную сістэму з базісам

$$e_1 = x_1\lambda^2 - x_1\lambda(1 + r) + x_1 r,$$

$$e_2 = x_2\lambda^2 - x_2\lambda(1 + r^2) + x_2 r,$$

$$e_3 = x_3\lambda^2 - x_3\lambda(1 + r^2) + x_3,$$

дзе $r = e^{\frac{2}{3}\pi i}$; $r^3 = 1$, $1 + r + r^2 = 0$, x_1, x_2, x_3 – камплексныя лікі – рашэнне сістэмы

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1 r^2 + x_2 r + x_3 = 0,$$

$$x_1 r + x_2 r^2 + x_3 = 1.$$

Тады $e_1 + e_2 + e_3 = 1$, $e_i \cdot e_k = 0$ ($i \neq k$), $e_1(e_1 + e_2 + e_3) = e_1$, адкуль $e_1^2 = e_1$; аналагічна $e_2^2 = e_2$, $e_3^2 = e_3$.

Відавочнай з'яўляецца роўнасць $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - r)(\lambda - r^2)$. Калі ўлічыць, што $\lambda^3 = 1$, то будзем мець

$$e_1(\lambda - r^2) = 0,\ e_2(\lambda - r) = 0,\ e_3(\lambda - 1) = 0,$$

адкуль

$$\lambda e_1 = r^2 e_1,\ \lambda e_2 = r e_2,\ \lambda e_3 = e_3.$$

Такім чынам, $\lambda = e_1 r^2 + e_2 r + e_3$, $\lambda^2 = e_1 r + e_2 r^2 + e^3$, адкуль

$$a + b\lambda + c\lambda^2 = e_1(a + br^2 + cr) +$$
$$+ e_2(a + br + cr^2) + e_3(a + b + c),$$

дзе a, b, c – камплексныя лікі або элементы любой алгебры.

Калі скарыстаць апошнюю роўнасць, то функцыі $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$, $p = x + 2\lambda y + \lambda^2 z$, $q = \lambda y + \lambda^2 z$, $t = \lambda^2 z$, $l = l_1 + \lambda l_2 + \lambda^2 l_3$, $h = h_1 + \lambda h_2 + \lambda^2 h_3$ можна запісаць наступным чынам:

$$f = Pe_1 + Qe_2 + Re_3,\ p = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3,$$

$$q = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3,\ l = Ae_1 + Be_2 + Ce_3,$$

$$h = He_1 + Me_2 + Ne_3,$$

дзе $P = u + vr^2 + wr$, $Q = u + vr + wr^2$, $R = u + v + w$, $\alpha = x + 2yr^2 + zr$, $\beta = x + 2yr + zr^2$, $\gamma = x + 2y + zr$, $\xi = yr^2 + zr$, $\eta = yr + zr^2$, $\zeta = y + z$. (аналагічна для A, B, C, H, M, N).

Тады ўмова манагеннасці функцыі f па функцыях p і q.

$$df = ldp + hdq$$

прыме наступны выгляд:

$$e_1 dP + e_2 dQ + e_3\, dR = e_1 A d\alpha + e_2 B d\beta +$$
$$+ e_3 C d\gamma + e_1 H d\xi + e_2 M d\eta + e_3 N d\zeta,$$

адкуль $dP = Ad\alpha + Hd\xi$, $dQ = Bd\beta + Md\eta$, $dR = Cd\gamma + Nd\zeta$, гэта значыць, камплексная функцыя P з'яўляецца F-манагеннай па дзвюх камплексных функцыях α і ξ, Q з'яўляецца F-манагеннай па дзвюх камплексных функцыях β и η, R з'яўляецца F-манагеннай па дзвюх камплексных функцыях γ и ζ.

Атрыманы вынік сфармулюем у выглядзе тэарэмы.

Тэарэма 2. Для таго каб функцыя $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$ ($\lambda^3 = 1$) была F-манагеннай па функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$ ($u = u(x, y, z)$), $v = v(x; y; z)$, $w = w(x; y; z)$), неабходна і дастаткова, каб камплексная функцыя $P = u + vr^2 + wr$,была манагеннай па камплексных функцыях $\alpha = x + 2yr^2 + zr$ і $\xi = yr^2 + zr$; камплексная функцыя $Q = u + vr + wr^2$ была манагеннай па камплексных функцыях $\beta = x + 2yr + zr^2$ і $\eta = yr + zr^2$; камплексная функцыя $R = u + v + w$ была манагеннай па функцыях $\gamma = x + 2y + z$ і $\zeta = y + z$.

Такім чынам, для кампанентаў u, v, w функцыі $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$ ($\lambda^3 = 1$), F-манагеннай па дзвюх функцыях $p = x + 2y\lambda + z\lambda^2$ і $q = y\lambda + z\lambda^2$, маем

$$\left.\begin{aligned} u + vr^2 + wr &\equiv P[\alpha,\xi], \\ u + vr + wr^2 &\equiv Q[\beta,\eta], \\ u + v + w &\equiv R[\gamma,\zeta], \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

дзе $P \equiv P[\alpha,\xi]$, ($Q \equiv Q[\beta,\eta]$, $R \equiv R[\gamma,\zeta]$) – адвольная камплексная функцыя, F-манагенная па функцыях α і ξ (β і η, γ і ζ).

З сістэмы (3), улічыўшы, што $1 + r + r^2 = 0$, атрымаем

$$u = \frac{P+Q+R}{3}. \qquad (4)$$

Калі другую роўнасць сістэмы (3) памножыць на r, а першую – на (–1) і скласці, атрымаем

$$w = \frac{Q\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right) - P\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right) + R\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r}. \qquad (5)$$

Калі першую роўнасць сістэмы (3) памножыць на r і адняць ад атрыманай роўнасці другую, то будем мець

$$v = \frac{P\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right) - Q\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right) - R\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r}. \qquad (6)$$

Заўважым, што ў формулах (4) – (6) $P \equiv P[\alpha,\xi]$, $Q \equiv Q[\beta,\eta]$, $R \equiv R[\gamma,\zeta]$.

Заключэнне. Такім чынам, атрымалі наступную тэарэму.

Тэарэма 3. Агульнае рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1) мае выгляд:

$$u = \frac{P+Q+R}{3},$$

$$v = \frac{P\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right) - Q\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right) - R\left(\frac{1}{3}r-\frac{1}{3}\right)}{1-r},$$

$$w = \frac{Q\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r\right) - P\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r\right) + R\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r\right)}{1-r},$$

дзе $P \equiv P[\alpha,\xi]$ ($Q \equiv Q[\beta,\eta]$, $R \equiv R[\gamma,\zeta]$) – адвольная камплексная функцыя, F-манагенная па функцыях α і ξ (β і η, γ і ζ) у абсягу D, $\alpha = x + 2yr^2 + + zr$, $\beta = x + 2yr + zr^2$, $\gamma = x + 2\gamma + z$, $\xi = yr^2 + zr$, $\eta = yr + zr^2$, $\zeta = y + z$, $r = e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Літаратура

1. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
2. *Павлов, С. Д.* Решение систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью моногенных функций в смысле В. С. Федорова / С. Д. Павлов // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962.– F. 2. – T. 8.– P. 323–329.
3. *Стельмашук, Н. Т.* О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – № 1. – Т. 5.– С. 166–173.
4. *Кусковский, Л. Н.* О краевой задаче типа Римана-Гильберта / Л. Н. Кусковский // Дифференциальные уравнения. – 1975.– № 3. – Т. 11. – С. 52–532.
5. *Стельмашук, Н. Т.* Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1993.– № 11. – Т. 29. – С. 2019–2020.
6. *Stelmashuk, N. T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk,

References

1. *Fedorov, V. S.* Osnovnye svojstva obobshchennyh monogennyh funkcij / V. S. Fedorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958.– № 6. – S. 257–265.
2. *Pavlov, S. D.* Reshenie sistem linejnyh differencial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s pomoshch'yu monogennyh funkcij v smysle V. S. Fedorova / S. D. Pavlov // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962. – F. 2.– T. 8.– P. 323–329.
3. *Stel'mashuk, N. T.* O nekotoryh linejnyh differencial'nyh sistemah v chastnyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk // Sibirskij matematicheskij zhurnal. – 1964. – № 1. – T. 5. – S. 166–173.
4. *Kuskovskij, L. N.* O kraevoj zadache tipa Rimana-Gil'berta / L. N. Kuskovskij // Differencial'nye uravneniya. – 1975.– № 3. – T. 11. – S. 52–532.
5. *Stel'mashuk, N. T.* Metod formal'nyh proizvodnyh dlya resheniya zadachi Koshi dlya odnoj sistemy differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Differencial'nye uravneniya. – 1993.– № 11. – T. 29. – S. 2019–2020.
6. *Stelmashuk, N. T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk,

V. A. Shylinets // Труды института математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2. – Т. 12. – С. 170–171.

7. *Стельмашук, Н. Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 61–65.
8. *Стельмашук, Н. Т.* Об одном исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций / Н. Т. Стельмашук // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – № 2. – Т. 7. – С. 431–436.
9. *Стэльмашук, М. Т.* Пабудова інтэгральных выяўленняў для функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў Максвэла / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1999. – № 2. – С. 147–150.
10. *Гусев, В. А.* Об одном обобщении ареолярных производных / В. А. Гусев // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara. – 1962.– F. 2.– T. 7.– P. 223–238.

V. A. Shylinets // Trudy instituta matematiki NAN Belarusi. – 2004. – № 2. – T. 12. – S. 170–171.

7. *Stel'mashuk, N. T.* O preobrazovanii k kanonicheskomu vidu sistemy linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s pomoshch'yu dvojnyh differencial'nyh operatorov / N. T. Stel'mashuk, V. A. Shilinec // Vesci NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 61–65.
8. *Stel'mashuk, N. T.* Ob odnom issledovanii sistemy Maksvella s pomoshch'yu F-monogennyh funkcij / N. T. Stel'mashuk // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. – 1967.– № 2. – T. 7. – S. 431–436.
9. *Stel'mashuk, M. T.* Pabudova integral'nyh vyyaylennyaў dlya funkcyyanal'na-invaryyantnyh rashennyaў sistemy dyferencyyal'nyh raўnannyaў Maksvela / M. T. Stel'mashuk, U. A. Shylinec // Vesci BDPU. – 1999. – № 2. – S. 147–150.
10. *Gusev, V. A.* Ob odnom obobshchenii areolyarnyh proizvodnyh / V. A. Gusev // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara. – 1962.– F. 2.– T. 7.– P. 223–238

Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 4. С. 9–15.

УДК 517.988

СИСТЕМНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНЫЙ ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Ю. М. Вувуникян,
доктор физико-математических, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы;

И. В. Трифонова,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Поступила в редакцию 23.07.19.

UDC 517.988

SYSTEM ASYMPTOTICALLY INVERSE EVOLUTIONARY OPERATOR

Y. Vuvunikian,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, GrSU named after Ya. Kupala;

I. Trifonova,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, GrSU named after Ya. Kupala

Received on 23.07.19.

Нелинейные эволюционные операторы находят широкое применение при описании состояния нелинейных динамических систем. Рассматривается системный асимптотически обратный оператор определенной степени к системному эволюционному оператору. Объектом исследования является асимптотически обратный эволюционный оператор второй кратности, а предметом исследования – компоненты такого оператора. На основании общей теории системных эволюционных операторов описывается системный асимптотически обратный оператор и, в частности, строятся начальные компоненты асимптотически обратного оператора второй кратности, что является целью данной работы. Во введении описана основная задача исследования. В основной части статьи сформулированы понятия системного асимптотически обратного эволюционного оператора, рассмотрен системный асимптотически обратный эволюционный оператор второй кратности и представлено построение начальных компонент такого оператора для определенного вида динамических систем. Представлена задача построения спектральных характеристик системы с учетом введенных характеристических параметров системы, что существенно расширит класс исследуемых систем. В заключении кратко изложены основные результаты исследования.

Ключевые слова: системные эволюционные операторы, обобщенные импульсные характеристики, обобщенные спектральные характеристики системных эволюционных операторов, асимптотически обратный оператор, характеристический параметр.

Nonlinear evolutionary operators find a wide application in describing the state of nonlinear dynamical systems. A system asymptotically inverse operator of a certain degree to a system evolution operator is considered. The object of the study is the asymptotic inverse evolutionary operator of the second multiplicity, and the subject of the study are the components of such an operator. On the basis of the general theory of system evolutionary operators, a system asymptotically inverse operator is described and, in particular, the initial components of the asymptotically inverse operator of the second multiplicity are constructed, which is the objective of this work. The introduction describes the main task of the study. In the main part of the article, the notions of a system asymptotically inverse evolutionary operator are formulated, a system asymptotically inverse secondorder evolution operator is considered, and the construction of the initial components of such an operator for a certain type of dynamic systems is presented, and the problem of constructing the spectral characteristics of the system taking into account the introduced characteristic parameters of the system, which will expand the class of the studied systems. In conclusion, the main results of the study are summarized.

Keywords: system evolution operators, generalized impulse characteristics, generalized spectral characteristics of system evolution operators, asymptotically inverse operator, characteristic parameter.

Введение. Современные сложные процессы описываются моделями динамических систем. Выходной сигнал системы можно определить на основании переходной импульсной характеристики. Поэтому, зная импульсную характеристику системы, можно