УДК 517.2

# КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛ РАЗНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

# QUASIDIFFERENTIAL OF DIFFERENCE OF CONVEX FUNCTIONS

А. Д. Стриленко
A. Strilenko
Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка
Науч. рук. – Н. В. Гриб, канд. физ.-мат. наук, доцент

Введено понятие квазидифференциала разности выпуклых функций. На его основе предложено решение одной экстремальной задачи.

The quasidifferential of difference of convex functions is introduced. The solution to one extreme problem is proposed.

Ключевые слова: выпуклая функция; субдифференциал; квазидифференциал.

Keywords: convex function; subdifferential; quasidifferential.

Многие прикладные и теоретические задачи приводят к исследованию некоторой функции на экстремум. Традиционные методы математического анализа, такие как применение дифференциала и гессиана, позволяют исследовать функции в точках, где они дифференцируемы. Тем не менее, часто встречаются функции, дифференцируемые не на всей области определения, потому для их исследования приходится разрабатывать новые инструменты и методы.

Цель настоящей работы – ввести понятие квазидифференциала функции и изучить его эффективность на примере одной экстремальной задачи.

Важным классом функций являются выпуклые функции. Функция называется выпуклой, если она удовлетворяет неравенству

$$f(t\cdot x+(1-t)\cdot y)\geq t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y), t\in[0,1]$$

Для таких функций в выпуклом анализе – разделе математики, занимающем промежуточное положение между анализом и геометрией, – существует аналог дифференциала – субдифференциал.

Пусть функция $f$ определена на множестве $X\subset R^n$. Субдифференциалом выпуклой функции $f$ в точке $x\in X$ называется множество

$$\partial f(x)=\{v\mid f(y)-f(x)\geq\langle v,y-x\rangle,\forall y\in X\},$$

где $\langle a,b\rangle$ – скалярное произведение векторов $a$ и $b$ (см., напр., [1]).

Субдифференциал имеет простой геометрический смысл. Для каждого $v\in\partial f(x)$ функция $h(y)=f(x)+\langle v,y-x\rangle$ задает гиперплоскость, лежащую не выше графика функции $f$.

Нетрудно показать, что множество $\partial f(x)$ обладает свойством линейности, т.е. для выпуклых функций $f_1, f_2$ и неотрицательных скаляров $\lambda_1, \lambda_2$ верно равенство

$$\partial(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \partial f_1(x) + \lambda_2 \partial f_2(x),$$

где в правой части произведение подразумевает умножение всех элементов множества на скаляр, а сумма – всевозможные суммы элементов разных множеств. В точках, где функция дифференцируема, субдифференциал совпадает с обычным дифференциалом.

Несмотря на важность класса выпуклых функций, он достаточно узок в сравнении с пространством всех непрерывных функций. Однако существует простой способ его значительного расширения, состоящий в рассмотрении разности двух выпуклых функций.

Классом функций $K$, определенных на $R^n$, назовем множество функций, представимых в виде $f = f_1 - f_2$, где функции $f_1, f_2$ выпуклые. К этому классу принадлежат, например, любые линейные комбинации выпуклых функций, а также поточечные супремум и инфимум произвольного числа выпуклых и вогнутых функций (функция $g$ считается вогнутой, если $-g$ выпукла).

Следуя В.Ф. Демьянову и А.М. Рубинову [2], квазидифференциалом функции $f \in K$ назовем пару $\mathcal{D}f(x) = [\partial f_1(x), \partial f_2(x)]$.

Отметим важные свойства квазидифференциалов.

**Теорема 1.** Если $f, g \in K$, то справедливо равенство

$$\mathcal{D}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = [\lambda_1 \partial f_1(x) + \lambda_2 \partial g_1(x), \lambda_1 \partial f_2(x) + \lambda_2 \partial g_2(x)].$$

Пусть $\operatorname{int} A$ – внутренность множества $A$.

**Теорема 2.** Для того, чтобы точка $x$ была точкой локального минимума (максимума) функции $f \in K$, необходимо

$$\partial f_2(x) \subset \partial f_1(x) \quad (\partial f_1(x) \subset \partial f_2(x)).$$

Если

$$\partial f_2(x) \subset \operatorname{int} \partial f_1(x) \quad (\partial f_1(x) \subset \operatorname{int} \partial f_2(x)),$$

то точка $x$ является точкой строгого локального минимума (максимума).

Рассмотрим применение квазидифференциала на конкретной задаче.

**Задача.** Даны окружность и две точки, лежащие внутри нее. Исследовать на экстремум сумму расстояний от произвольной точки плоскости до данных объектов.

Пусть $A$, $B$ – данные точки, $\omega(O,R)$ – данная окружность с центром $O$ и радиусом $R$. Тогда задача сводится к исследованию определенной на плоскости функции $f(M) = (f_1 + f_2 + f_3)(M)$, где $f_1(M) = MA$ – евклидово расстояние между



точками $M$ и $A$, $f_2(M) = MB$, $f_3(M) = |MO - R|$. Представим функцию $f_3$ в виде $f_3 = f_{31} - f_{32}$, где

$$f_{31}(M) = \begin{cases} 2(MO - R), & MO > R, \\ 0, & MO \le R, \end{cases} \qquad f_{32}(M) = OM - R.$$

Тогда, как легко видеть, $f_1, f_2, f_{32}$ определяют конусы и выпуклы (рис. 1), а $f_{31}$ – усеченный конус и также выпукла (рис. 2). Получили, что $f \in K$, причем

$$\mathcal{D}f(x) = [\partial(f_1 + f_2 + f_{31})(x), \partial f_{32}(x)].$$

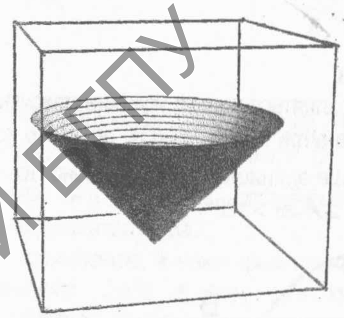

Рисунок 1

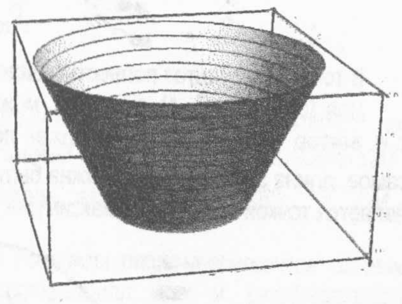

Рисунок 2

Теперь исследуем $f$ на экстремум. В силу громоздкости вычислений субдифференциалов функций $f_1, f_2, f_{31}, f_{32}$ приведем лишь их результат. Пусть $g(M) = MT$, где точка $T$ фиксирована, тогда $\partial g(M) = \overline{TM}/\left|\overline{TM}\right|$, если $M \ne T$, и $\partial g(T) = \{\bar{v}, |\bar{v}| \le 1\}$. Для $f_{31}$ имеем $\partial f_{31}(M) = \left\{\lambda \overline{OM}/\left|\overline{OM}\right|, \lambda \in [0,2]\right\}$ при $\left|\overline{OM}\right| = R$, и $\partial f_{31}(N) = \bar{0}$ при $\left|\overline{ON}\right| < R$.

Следовательно, в точке $A$ $\partial(f_1 + f_2 + f_{31})(A)$ представляет собой множество векторов с началом в $A$ и концами в круге, полученном при смещении $\partial f_1(A)$ на вектор $\partial f_2(A)$ (рис. 3). Согласно теореме 2, точка $A$ является точкой локального минимума, когда $\partial f_{32}(A) \subset \operatorname{int} \partial(f_1 + f_2 + f_{31})(A)$. Как легко видеть, это происходит при $\angle OAB < 60°$.

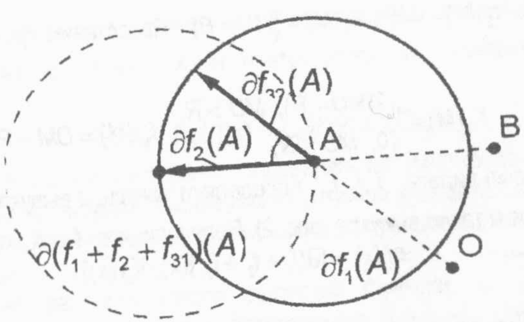


*Рисунок 3*

В точке B результат полностью аналогичен.

Для точки O (рис. 4), очевидно, может выполняться только условие максимума, т. е. вектор $\partial(f_1+f_2+f_{31})(O)$ должен лежать внутри круга $\partial f_{32}(O)$, или, что то же самое, длина этого вектора должна быть меньше единицы. Следовательно, точка O является точкой локального максимума, если $\angle AOB > 120°$.

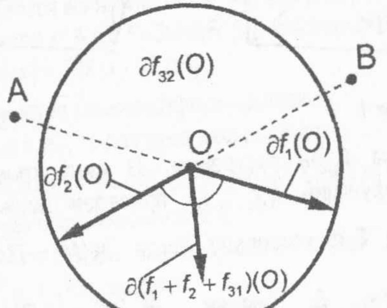


*Рисунок 4*

В точках $M \mid OM = R$ ситуация сложнее (рис. 5). Ясно, что $\partial(f_1+f_2)(M)$ как сумма единичных векторов лежит на биссектрисе $\angle AMB$. Т.к. $\partial f_{31}(M), \partial f_{32}(M)$ лежат на одной прямой, то для выполнения $\partial f_{32}(M) \subset \partial(f_1+f_2+f_{31})(M)$ требуется сонаправленность $\partial(f_1+f_2)(M)$ и $\partial f_{32}(M)$. Следовательно, $MO$ должна быть биссектрисой $\angle AMB$. Но тогда $\partial(f_1+f_2+f_{31})(M) = \left\{\lambda \overrightarrow{OM}/\left|\overrightarrow{OM}\right|, \lambda \in \left[\left|\partial(f_1+f_2)(M)\right|, 2+\left|\partial(f_1+f_2)(M)\right|\right]\right\}$, и для выполнения необходимого условия минимума теоремы 2 требуется



$\left|\partial(f_1+f_2)(M)\right| \le 1$, т.е. $\angle AMB \ge 120°$. При этом ясно, что на ω достаточное условие не достигается.

В точках, отличных от рассмотренных выше, функция *f* дифференцируема, и потому ее исследование в рамках данной статьи не представляет интереса.

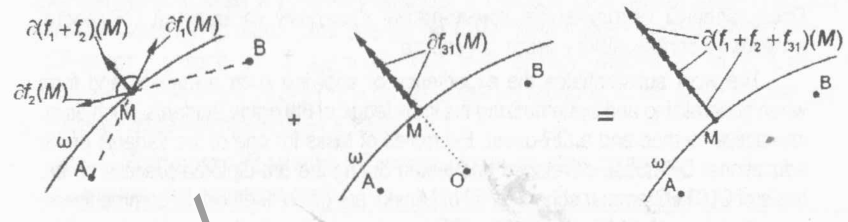


*Рисунок 5*

Т.о. получили, что в точке *A* (*B*) локальный минимум достигается при $\angle OAB(\angle OBA) < 60°$, в точке *O* – локальный максимум при $\angle AOB > 120°$; в точках $M \in \omega$ может достигаться минимум, если $\angle AMB > 120°$, а *OM* – биссектриса этого угла.

К сожалению, в некоторых случаях мы получили лишь необходимое условие экстремума. Дело в том, что квазидифференциал, как и дифференциал, осуществляет приближение функции лишь первого порядка. В таких ситуациях нельзя получить решение с помощью общих методов, поэтому приходится искать инструменты, учитывающие специфику конкретной задачи.

**Литература**

1. Пшеничный, Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный – М. : Наука, 1980. – 320 с.
2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. – М. : Наука, 1990. – 431 с.

---

УДК 004:372

## *QR*-КВЕСТ «ПРОВЕРЬ СВОИ ЗНАНИЯ ПО ТЕМЕ "КОМПЬЮТЕРНЫЕ ПРЕЗЕНТАЦИИ"»

## *QR*-QUEST «TEST YOUR KNOWLEDGE ON THE TOPIC "COMPUCTER PRESENTATIONS"»

Т. В. Старовойтова
T. Starovoitova
Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка
Науч. рук. – С. И. Зенько, канд. пед. наук, доцент