

Учреждение образование «Белорусский государственный педагогический
университет имени Максима Танка»

Физико-математический факультет

Кафедра математики и методики преподавания математики

(рег. № УМ 24-1- 161 -2019)

СОГЛАСОВАНО

заведующий кафедрой

 И.Н.Гуло
24 05 2018 г.

СОГЛАСОВАНО

декан факультета

 С.И.Василец
10 06 2018 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ»

для специальности
1-02 05 02 Физика и информатика

Составитель: профессор, доктор физико-математических наук Черняк А.А.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	3
1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	4
Тема 1. Введение в алгебру	4
Тема 2. Линейные пространства.....	14
Тема 3. Векторная алгебра.....	23
Тема 4. Прямые и плоскости.....	27
Тема 5. Фигуры и поверхности второго порядка.....	31
Тема 6. Группы, кольца, поля.....	34
Тема 7. Многочлены.....	39
2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	50
Тема 1. Линейная алгебра	50
Тема 2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.....	62
3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ.....	72
3.1 Контрольные работы.....	72
3.2 Тесты.....	85
4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	95
4.1 Учебная программа по дисциплине «Алгебра и Геометрия».....	95

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данный УМК соответствует первой ступени обучения в системе многоуровневого физико-математического педагогического образования. Его содержание рассчитано на творческую взаимосвязь с другими дисциплинами, предусмотренными учебным планом специальности, с учетом возможностей обучения студентов на высших ступенях педагогического образования.

Первая составляющая УМК – **введение в алгебру и геометрию** – *обеспечивает* постепенный переход к абстрактным структурам на основе более естественных и привычных понятий, с тем чтобы последующие фундаментальные алгебраические и геометрические результаты выстраивались в единую логическую цепь.

Вторая составляющая УМК *предусматривает* изучение на единой векторной базе **уравнений прямых и плоскостей** и их взаимное расположение на плоскости и в пространстве.

Третья составляющая УМК – **линейные пространства и алгебраические структуры** – *формируют* теоретическую базу и инструментарий для изучения конечномерных расширений полей и многочленов над произвольными полями, играющих ключевую роль в последующих разделах. Помимо этого, свойства алгебраических структур – группы, кольца, поля – позволяют рассматривать операции над различными математическими объектами с достаточно общих позиций алгебраических структур, в которых эти операции определяются, а также получать оптимальные доказательства важных результатов теории чисел.

Четвертая составляющая УМК – **теория многочленов** – посвящена изучению полиномиальных уравнений произвольной степени. Наличие большого числа методов приближенного вычисления корней многочленов и неразрешимость в радикалах уравнений, степени которых выше 4-й, выводят здесь на центральное место проблемы существования корней и неприводимости многочленов над числовыми полями. Параллельно реализуется еще одна цель: дать доступное, но математически строгое обоснование классических результатов алгебры и геометрии, таких как единственность поля комплексных чисел, фундаментальная теорема алгебры, неразрешимость классических задач на построение, характеристика простых многочленов над числовыми полями.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1. Введение в алгебру

§1. Множества и принцип математической индукции

Некоторые символы зарезервированы для обозначения конкретных числовых множеств. Например: $\mathbb{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$; $\mathbb{Z}$ обозначает множество всех целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $\mathbb{Q}$ обозначает множество всех рациональных чисел; $\mathbb{R}$ обозначает множество всех действительных чисел; $\mathbb{C}$ обозначает множество всех комплексных чисел.

Число элементов конечного множества X называется порядком X и обозначается $|X|$. Множество, состоящее из конечного числа элементов, может быть представлено списком этих элементов, заключенных в фигурные скобки. При этом порядок следования элементов не имеет значения. Например, $\{1, 2, 3\}$ и $\{2, 1, 3\}$ обозначают одно и то же множество, состоящее из элементов 1, 2 и 3. Если множество состоит из большого числа элементов или бесконечно, но понятна закономерность его образования, можно ограничиться указанием только нескольких его представителей, заменив остальные многоточием так, чтобы эта закономерность была очевидна. Например, $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ обозначает множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$. В более общих ситуациях используется запись $S = \{x \in A \mid p(x)\}$ для обозначения множества S , состоящего из всех таких элементов данного множества A , для которых утверждение $p(x)$ истинно. Например, $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 4\}$ означает, что $S = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Если не возникает сомнений, из какого множества A взяты элементы x , ссылку на это множество A можно опускать: $S = \{x \mid p(x)\}$.

Пусть X – некоторое множество. Множество всех подмножеств множества X называется степенным множеством X и обозначается $P(X)$. В частности, $\emptyset \in P(X)$, $X \in P(X)$. Если, например, $X = \{a, b, c\}$, то $P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Теорема 1.1 (порядок степенного множества). Пусть X – конечное множество из n элементов. Тогда X содержит 2^n различных подмножеств, и значит, $P(X)$ имеет 2^n элементов. ■

Теорема 1.1. утверждает, что $|P(X)| = 2^{|X|}$, что вполне согласуется с названием «степенное множество» для $P(X)$.

Пусть A и B – множества. Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Разностью множеств A и B называется множество $B - A = \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$. Если $A \subset B$, то $B - A$ называется дополнением A в B .

Очевидно, если A и B – подмножества множества U , то из объединения, пересечения и разности тоже являются подмножествами в U . Если в некотором контексте все рассматриваемые множества будут подмножествами некоторого «универсального» множества U , то $U - A$ можно называть дополнением A и обозначать его A' . Например, степенное множество $P(X)$ является универсальным относительно всех его подмножеств. Алгеброй множеств называется степенное множество $P(X)$ вместе с операциями объединения, пересечения и дополнения.

Теорема 1.2 (основные свойства операций над множествами). Пусть A, B, C – множества. Тогда:

- (1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (коммутативный закон);
- (2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативный закон);
- (3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивный закон);
- (4) $(A')' = A$, $A \cup A' = X$, $A \cap A' = \emptyset$;
- (5) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (законы де Моргана).

Ассоциативный закон позволяет опускать скобки в выражениях вида

$$A \cup B \cup C \text{ и } A \cap B \cap C.$$

Дальше будем использовать следующее интуитивно ясное утверждение: в любом непустом подмножестве $S \subset \mathbb{N}$ натуральных чисел найдется наименьшее натуральное число $k \in S$, меньшее всех остальных чисел из S .

Теорема 1.3 (принцип математической индукции). Пусть зафиксировано некоторое число $p \in \mathbb{N}$, и для каждого натурального числа n , где $n \geq p$, сформулировано некоторое утверждение $M(n)$, заведомо истинное при $n = p$. Предположим, что для любого $n > p$ можно каким-то образом доказать истинность утверждения $M(n)$ в предположении истинности утверждений $M(p)$, $M(p+1)$, ..., $M(n-2)$, $M(n-1)$. Тогда $M(n)$ истинно для всех $n \geq p$. ■

Теорема 1.1. обосновывает корректность доказательств, основанных на так называемом *методе математической индукции*.

§2. Делимость целых чисел

Теорема 2.1 (о делении с остатком). Для любых $a, b \in \mathbb{Z}$, где $b \neq 0$, существуют, и притом единственные, целые числа q и r такие, что

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|. \quad (2.1) \quad \blacksquare$$

Представление числа a в виде (2.1) называется делением a на число b с остатком, при этом q и r называются соответственно частным и остатком. Если остаток равен нулю, то говорят, что a делится на b и b является делителем a . Этому, как мы уже знаем, соответствует запись $a | b$.

Следствие 2.1 (основные свойства делимости). Пусть a, b, c не равные нулю целые числа. Тогда:

$$(a) \quad a \mid c, b \mid c \Rightarrow (a \pm b) \mid c.$$

$$(б) \quad \text{В представлении (1.1)} \quad a \mid c, b \mid c \Leftrightarrow b \mid c, r \mid c.$$

$$(в) \quad a \mid b, b \mid a \Leftrightarrow a = \pm b. \quad \blacksquare$$

Определение. Наибольшим общим делителем $\text{НОД}(a, b)$ двух целых чисел a и b , по крайней мере одно из которых не равно нулю, называется их общий делитель d , который делится на любой другой общий делитель этих чисел. Аналогично определяется $\text{НОД}(a_1, \dots, a_n)$ n целых чисел, как их общий делитель, который делится на любой другой их общий делитель.

В силу следствия 2.1, два различных наибольших общих делителя (сокращенно, НОД) двух данных чисел различаются лишь знаком.

Следующий алгоритм последовательного деления с остатком – алгоритм Евклида – позволяет найти $d = \text{НОД}(a, b)$. Пусть при деления a на $b \neq 0$ получается остаток r_1 . Если $r_1 = 0$, то $d = b$. В противном случае разделим b на r_1 с остатком r_2 . Если $r_2 = 0$, то $d = r_1$. В противном случае разделим r_1 на r_2 с остатком r_3 и т.д. Так как остатки, будучи натуральными числами, с каждым шагом убывают, то через конечное число шагов при делении r_{k-1} на r_k получится нулевой остаток:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \\ b &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1}q_k + r_k \\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Теорема 2.2 (об алгоритме Евклида) $\text{НОД}(a, b)$ равен числу r_k , полученному в результате алгоритма (1.2). $\blacksquare$

Следствие 2.2 (о линейном представлении НОД). Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда существуют целые числа u и v такие, что $d = au + bv$

Наименьшим общим кратным $m = \text{НОК}(a, b)$ (сокращенно НОК) не равных нулю целых чисел a и b называется их общее кратное m , на которое делится любое общее кратное чисел a и b . Очевидно, два различных наименьших общих кратных двух данных чисел различаются лишь знаком.

Формула для вычисления НОК: $\text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}.$

Ненулевые целые числа называются взаимно простыми, если их НОД равен ± 1 .

Следствие 2.3 (критерий взаимной простоты). Целые числа a и b взаимно просты, если и только если существуют целые числа u и v такие, что $1 = au + bv$. $\blacksquare$

Следствие 2.4 (основные свойства взаимно простых чисел). Пусть a, b, c не равные нулю целые числа. Тогда:

(а) Если a взаимно просто с каждым из чисел b и c , то a взаимно просто с их произведением.

(б) Если $ab \mid c$, a и c взаимно просты, то $b \mid c$.

(в) Если $a \mid b$, $a \mid c$, b и c взаимно просты, то $a \mid (bc)$. ■

§3. Основная теорема арифметики

Среди всех натуральных чисел число 1 выделяется тем, что имеет лишь один натуральный делитель. Любое другое натуральное число n имеет, по меньшей мере, два таких делителя – 1 и n . Те натуральные числа, которые имеют ровно два натуральных делителя, называются простыми, остальные – составными. Таким образом, n является составным, если и только если его можно представить в виде $n = ab$, где $a, b \in \mathbb{N}$, $1 < a < n$, $1 < b < n$. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Теорема 3.1 (алгоритм нахождения простых чисел). Если в ряду чисел $2, \dots, n$ вычеркнуть все числа, кратные первым k простым числам $p_1, \dots, p_k$, то первое из оставшихся чисел m будет $(k+1)$ -м простым числом; если к тому же $m^2 > n$, то простыми будут все оставшиеся числа. ■

Теорема 3.1 гарантирует корректность алгоритма Эратосфена, который определяет все простые числа, не превосходящие данное число n .

Алгоритм Эратосфена.

Шаг 1. Положим $p_1 = 2$ и в ряду чисел $2, \dots, n$ вычеркнем все числа, кратные 1. Положим $p_2 = 3$ и перейдем к следующему шагу.

Шаг k ($k \geq 2$). Вычеркнем из оставшихся все числа, кратные p_k . Первое из оставшихся чисел m будет $(k+1)$ -м простым числом p_{k+1} . Если $m^2 \leq n$, то перейдем к следующему шагу. Если $m^2 > n$, то все оставшиеся числа простые.

Каноническим разложением целого числа a , отличного от 0 и ± 1 , называется представление его в виде

$$a = \pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l},$$

где $p_1, \dots, p_l$ попарно различные простые числа, показатели $k_1, \dots, k_l$ – натуральные числа.

Теорема 3.2 (основная теорема арифметики). Каждое целое число $a \in \mathbb{Z}$, не равное 0 и ± 1 , имеет каноническое разложение, и это разложение единственное с точностью до порядка сомножителей. ■

§4. Отношения эквивалентности и частичного порядка

Пусть A и B – множества. Отображением из A в B называется правило, которое каждому элементу из A ставит в соответствие точно один элемент из B . Запись $f: A \rightarrow B$ означает, что f есть отображение из A в B . Множество A называются областью определения отображения f . При этом для любого

$x \in A$ единственный элемент $y \in B$, который поставлен отображением f в соответствие элементу x , называется образом x и обозначается $f(x)$, а элемент x , в свою очередь, называется прообразом y . Областью значений отображения f (обозначается $\text{Im } f$) называется множество всех тех элементов из B , которые являются образами элементов из A , т.е. $\text{Im } f = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ для некоторого } x \in A\}$.

Пусть $f: A \rightarrow B$. Если различные элементы из A имеют различные образы, то f называется инъективным отображением, т.е. для любых $x, x' \in A$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Другими словами, f инъективно, если каждый элемент из B имеет не более одного прообраза. Если $\text{Im } f = B$, то f называется сюръективным отображением. Другими словами, f сюръективно, если каждый элемент из B имеет не менее одного прообраза. Если f инъективно и сюръективно, то оно называется биективным или взаимно однозначным соответствием. Другими словами, f биективно, если каждый элемент из B имеет ровно один прообраз. Композицией двух отображений $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$, обозначаемой $g \circ f$, называется отображение $g \circ f: A \rightarrow C$, определяемое так: $g \circ f(x) = g(f(x))$ для всех $x \in A$.

Отображение g является обратным для f , если для $x \in A, y \in B$, $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$. Очевидно, f обратимо, если и только если оно биективно. Если f обратимо, то оно имеет единственное обратное отображение, обозначаемое f^{-1} .

Пусть A и B – множества. Множество всех упорядоченных пар (x, y) , где $x \in A, y \in B$, называется декартовым произведением A и B и обозначается $A \times B$. Отображение $R: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ называется отношением из A в B . Если $R(a, b) = 1$, то говорят, что a находится в отношении R с b и пишут aRb . Если $R(a, b) = 0$, то говорят, что a не находится в отношении R с b и пишут $a\bar{R}b$.

В случае $A = B$ отношение R называется отношением на A (или в A).

Это формальное определение слишком абстрактное. Поэтому на практике мы будем задавать конкретное отношение правилом, определяющим для любой данной упорядоченной пары (a, b) , находится a или нет в отношении R с b . Например, отношение $<$ «быть одному действительному числу меньше другого» определяется так: для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, если существует такое положительное число c , что $b = a + c$. Пусть к примеру, $A = \{1, 2, 3\}$. Ясно, что $1 < 2, 2 < 3, 1 < 3$. Если здесь следовать формальному определению формальным определению, то определим отображение $R: A \times A \rightarrow \{0, 1\}$ так: $R(1, 1) = 0, R(1, 2) = 1, R(1, 3) = 1, R(2, 1) = 0, R(2, 2) = 0, R(2, 3) = 1, R(3, 1) = 0, R(3, 2) = 0, R(3, 3) = 0$.

Наиболее часто нам придется сталкиваться с отношениями, которые имеют некоторые специальные свойства. Сформулируем наиболее важное из них.

Определение. Пусть R – отношение на множестве A .

- (а) R называется рефлексивным, если aRa для всех $a \in A$.
- (б) R называется симметричным, если для всех $a, b \in A$, $aRb \Rightarrow bRa$.
- (в) R называется антисимметричным, если для всех $a, b \in A$, $aRb, bRa \Rightarrow a = b$.
- (г) R называется транзитивным, если для всех $a, b, c \in A$, $aRb, bRc \Rightarrow aRc$.

Если отношение R рефлексивно, симметрично и транзитивно, то оно называется отношением эквивалентности. Если отношение R рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то оно называется частичным порядком.

Примеры.

1. Для любых действительных чисел a, b , пусть aRb означает $|a| = |b|$. Тогда R – отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{R}$.
2. Пусть Π обозначает множество всех прямых на плоскости. Для любых прямых $a, b \in \Pi$, пусть aRb означает параллельность a и b . Условимся также, что каждая прямая параллельна сама себе. Тогда R – отношение эквивалентности на Π .
3. Отношение $\leq$ на множестве $\mathbb{R}$ является частичным порядком.
4. Отношение $\subset$ является частичным порядком на степенном множестве $P(X)$.
5. Для любых целых чисел a, b , пусть $b|a$ означает существование такого целого числа c , что $b = ac$ (т.е. a делится на b). Тогда $|$ – отношение частичного порядка на множестве $\mathbb{N}$. Однако отношение $|$ уже не является таковым на множестве $\mathbb{Z}$ ввиду нарушения свойства антисимметричности.

Пусть X – множество, P – множество, состоящее из некоторых непустых подмножеств множества X . Если $X = \bigcup P$ и каждые два элемента из P имеют пустое пересечение (не пересекаются), то говорят, что P является разбиением множества X .

Пусть E – отношение эквивалентности на множестве X . Для $a \in X$ множество всех элементов из X , находящихся в отношении E с a , называется классом эквивалентности отношения E , содержащим a , и обозначается $Cl_E(a)$, т.е. $\bar{a} = Cl_E(a) = \{x \mid xEa\}$. Множество всех классов эквивалентности отношения E обозначается X/E .

Теорема 4.1 (основное свойство отношения эквивалентности).

Пусть E – отношение эквивалентности на множестве X . Тогда множество X/E является разбиением множества X . ■

Пусть n – фиксированное натуральное число. Для $a, b \in \mathbb{Z}$ скажем, что a сравнимо с b по модулю n (и этому соответствует запись $a \equiv b \pmod{n}$), если $a - b$ делится на n . Это отношение называется сравнением по модулю n и обозначается $\equiv_n$.

Теорема 4.2 (об отношении сравнения). Для любого натурального числа n отношение $\equiv_n$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{Z}$. При этом класс эквивалентности, содержащий a , имеет вид

$\bar{a} = \{a + tn \mid t \in \mathbb{Z}\}$, и множество $\mathbb{Z}/\equiv_n$ состоит ровно из n классов эквивалентности: $\mathbb{Z}/\equiv_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$. ■

§5. Бинарные операции. Комплексные числа

Бинарной операцией на множестве V называется правило, по которому каждой упорядоченной паре (a, b) элементов a, b из V ставится в соответствие точно один элемент из V , обозначаемый $c = a * b$. Другими словами, алгебраическая операция – это отображение $V \times V \rightarrow V$. Обычно, бинарные операции обозначаются символами $*$, $\cdot$, $\circ$, $+$, и т.д. Образ упорядоченной пары $(x, y) \in V$ при бинарной операции $*$ записывается $x * y$ (вместо записи $*(x, y)$), как это принято в обычной арифметике.

Определение. Бинарная операция $*$ на множестве V называется коммутативной, если $x * y = y * x$ для всех $x, y \in V$. Она называется ассоциативной, если $(x * y) * z = x * (y * z)$ для всех $x, y, z \in V$. Элемент $e \in V$ называется единичным относительно $*$, если $e * x = x = x * e$ для всех $x \in V$. Элемент $a' \in V$ называется обратным для элемента a относительно $*$, если $a * a' = a' * a = e$. Обратный для a элемент обозначается a^{-1} ; в этом случае элемент a (как, впрочем, и элемент a^{-1}) называется обратимым.

Например, сложение и умножение на множестве целых чисел являются коммутативными и ассоциативными бинарными операциями, причем 0 является единичным относительно сложения, а 1 – единичным относительно умножения. Для любого целого числа a имеется обратный элемент относительно сложения – им будет $-a$, и только ± 1 имеют обратные элементы относительно умножения.

Единичный элемент, если он существует, всегда единственен. Действительно, если e, e' – единичные элемент относительно $*$, то $e = e * e' = e'$.

Если операция $*$ ассоциативна, то каждый элемент $a \in V$ может иметь не более одного обратного. Действительно, если a', a'' – обратные для a относительно $*$, то

$$a * a' = e \Rightarrow a'' * (a * a') = a'' * e \Rightarrow (a'' * a) * a' = a'' \Rightarrow e * a' = a'' \Rightarrow a' = a''$$

Определение. Пусть $*$ и $\circ$ – бинарные операции на множестве V . Тогда $*$ называется дистрибутивной относительно $\circ$, если $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$ (дистрибутивность слева) и $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$ (дистрибутивность справа) для всех $x, y, z \in V$. Например, умножение целых чисел дистрибутивно относительно сложения, но сложение не дистрибутивно относительно сложения.

Под алгебраической системой подразумевается непустое множество V вместе с одной или более бинарными операциями на V , которые обладают некоторыми заданными свойствами.

А сейчас познакомимся в алгебраической системой, называемой множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Из школьного курса математики известно, что простейшее квадратное уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней, как впрочем, и другие квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами. Числа, называемые комплексными, и вводятся в связи с необходимостью расширения системы действительных чисел до такой системы чисел, в которой уравнение $x^2 + 1 = 0$ имело бы корни.

Если действительные числа изображаются точками числовой прямой, то исходным материалом для построения новой системы чисел служат точки плоскости, т. е. пары чисел вида (a, b) . На множестве таких пар (точек) определим бинарные операции сложения и умножения.

Суммой двух точек $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ назовем точку $\alpha + \beta = (a + c, b + d)$. Произведением точек α и β назовем точку $\alpha \cdot \beta = (ac - bd, ad + bc)$. Эти определения (в особенности, произведения точек) могут показаться искусственными и неудобными. Однако при изучении теории многочленов будет показано, что только такие определения операций сложения и умножения могут привести к расширению системы действительных чисел, содержащему корень уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Введенные операции сложения и умножения точек плоскости коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения.

Назовем множество всех точек плоскости с введенными операциями сложения и умножения алгебраической системой комплексных чисел $\mathbb{C}$. Очевидно, эта система является расширением системы действительных чисел. Чтобы убедиться в этом, достаточно каждой точке $(c, 0)$ оси абсцисс поставить в соответствие действительное число c , после чего проверить, что точки $(a, 0)$, $(b, 0)$ складываются и умножаются по тем же правилам, что и действительные числа a и b , им соответствующие: $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$, $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0)$. Таким образом, любую пару чисел вида $(c, 0)$ можно отождествить с действительным числом c , т.е. можно считать $(c, 0) = c$.

Покажем, что среди комплексных чисел есть корень уравнения $x^2 + 1 = 0$. Убедимся в том, что число $(0, 1)$ удовлетворяет этому уравнению: $(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 1) \cdot (0, 1) + (1, 0) = (-1, 0) + (1, 0) = (0, 0) = 0$.

Число $(0, 1)$ принято символически обозначать буквой i . Таким образом, $i^2 + 1 = 0$.

Чтобы перейти к более удобной форме записи комплексных чисел, рассмотрим результат умножения действительного числа b на число i : $b \cdot i = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$. Полученная точка лежит на оси ординат. Обратно, любую точку оси ординат можно представить как произведение числа i и некоторого действительного числа.

Таким образом, произвольное комплексное число $z = (a, b)$ можно представить в виде суммы действительного числа $a = (a, 0)$ и мнимого числа $bi = (0, b)$, т. е. $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$. Это представление

называется алгебраической формой числа z , число a – его действительной частью, а число b – его мнимой частью.

Сложение и умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, выполняются по следующим правилам, вытекающим из формул, описывающих соответствующие операции над точками плоскости: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$; $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Очевидно, 0 является единичным элементом для операции сложения комплексных чисел, а 1 – единичным элементом для операции умножения комплексных чисел. Кроме того, обратным для любого комплексного числа $a + bi$ относительно сложения будет комплексное число $-a - bi$ (оно называется противоположным числу $a + bi$), обратным для любого ненулевого комплексного числа $a + bi$ относительно умножения будет комплексное число $(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$. Для комплексных чисел α, β сложение $\alpha + (-\beta)$ удобно записывать $\alpha - \beta$, называя эту операцию вычитанием из α числа β , а саму запись $\alpha - \beta$ – их разностью; произведение $\alpha \cdot \beta^{-1}$ удобно записывать $\frac{\alpha}{\beta}$, называя эту операцию делением α на β , а саму запись $\frac{\alpha}{\beta}$ – их отношением.

Определение. Числа $a - bi$ и $a + bi$ называются сопряженными. Комплексное число, сопряженное комплексному числу α , обозначается $\bar{\alpha}$. Действительные числа, и только они, сопряжены сами себе.

Можно доказать, что если число α некоторым образом выражено через комплексные числа $\beta_1, \dots, \beta_n$ при помощи сложения, умножения, вычитания и деления, то, заменяя в этом выражении все числа β_i их сопряженными, получим число $\bar{\alpha}$, сопряженное с α .

§6. Корни n -й степени из комплексных и действительных чисел

Пара чисел (r, φ) называется полярными координатами точки α , если r – расстояние от точки α до начала координат, φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) – угол между положительным направлением оси абсцисс и радиус-вектором этой точки. Число $r \geq 0$ называется модулем комплексного числа α и обозначается $|\alpha|$; угол $\varphi + 2\pi l$ – аргументом числа α и обозначается $\arg \alpha$. Аргумент числа α имеет бесконечно много значений, отличающихся друг от друга на $2\pi l$, где l – произвольное целое число. Он не определен лишь для числа 0.

Для произвольного неотрицательного действительного числа a выражение $\sqrt[n]{a}$ будет обозначать арифметический корень n -й степени из числа a , т.е. такое неотрицательное действительное число b , что $b^n = a$. Если из контекста будет ясно, что имеется в виду именно арифметический корень

(в частности, если под знаком радикала $\sqrt[n]{a}$ присутствует модуль комплексного числа), будем использовать обычную запись $\sqrt[n]{}$ (например, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt{|z|}$).

Итак, если $z = a + bi$, то $a = |z| \cos \varphi$, $b = |z| \sin \varphi$. Поэтому

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (6.1)$$

где $|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$, $\varphi \in \arg z$, $\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$.

Представление (6.1) называется тригонометрической формой комплексного числа z . Например, $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = \cos 0 + i \sin 0$,

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = \cos \pi + i \sin \pi, \quad i = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

Теорема 6.1 (операции над комплексными числами в тригонометрической форме).

Для любых отличных от нуля комплексных чисел $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad \blacksquare$$

Следствие 6.1. Для произвольного комплексного числа $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

(а) $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ для любого натурального числа n ;

(б) $z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$; (в) $(z^{-1})^n = (z^n)^{-1}$;

Благодаря следствию 6.1 (б), вместо $(z^{-1})^n$ и $(z^n)^{-1}$ можно использовать более удобное обозначение z^{-n} .

Определение. Корнем натурального степени n из комплексного числа z называется такое комплексное число w , то $w^n = z$. Множество всех корней n -й степени из комплексного числа z обозначается $\sqrt[n]{z}$.

Теорема 6.2 (формула Муавра). Для любых натурального числа n и комплексного числа $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ существует ровно n корней n -й степени из z и они равны

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \blacksquare$$

Примеры.

1. Пусть a — действительное положительное число. Тогда $a = |a|(\cos 0 + i \sin 0)$, $\sqrt{a} = \{w_0, w_1\}$, $w_0 = \sqrt{|a|}(\cos \frac{0}{2} + i \sin \frac{0}{2}) = \sqrt{|a|} = \sqrt[2]{a}$,

$w_1 = \sqrt{|a|}(\cos \frac{0 + 2\pi}{2} + i \sin \frac{0 + 2\pi}{2}) = -\sqrt{|a|} = -\sqrt[2]{a}$. В частности, $\sqrt{5} = \pm \sqrt[2]{5}$

2. Пусть a – действительное отрицательное число. Тогда $a = |a|(\cos \pi + i \sin \pi)$, $\sqrt[n]{a} = \{w_0, w_1\}$, $w_0 = \sqrt[n]{|a|}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \sqrt[n]{|a|}i = \sqrt[n]{-a}i$,

$w_1 = \sqrt[n]{|a|}(\cos \frac{\pi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{2}) = -\sqrt[n]{|a|}i = -\sqrt[n]{-a}i$. В частности, $\sqrt{-5} = \pm \sqrt[2]{5}i$.

3. Так как $1 = \cos 0 + i \sin 0$, то $\sqrt[n]{1} = \{\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$.

Геометрически корни n -й степени из 1 располагаются последовательно на окружности с центром в точке $(0;0)$ и с радиусом 1, деля эту окружность на n равных частей, причем одной из точек будет $w_0 = 1 + 0i = (1;0)$. Поэтому среди чисел $\sqrt[n]{1}$ действительными могут быть только числа ± 1 , при этом в случае нечетного n корнем n -й степени из 1 будет только 1, а при четном n ими будут оба числа ± 1 .

2. Линейные пространства

§ 1. Определение линейных пространств

Линейным пространством $(V, \mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$ называется аддитивная группа $(V, +)$ с отображением $\bullet: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, которое каждой паре $(a, v) \in \mathbb{R} \times V$ ставит в соответствие элемент $av \in V$ (знак $\bullet$ опускается) и обладает следующими свойствами: (а) $1v = v$ для всех $v \in V$;

(б) $(ab)v = a(bv)$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$ и $v \in V$;

(в) $(a+b)v = av + bv$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$ и $v \in V$;

(г) $a(v+u) = av + au$ для всех $a \in \mathbb{R}$ и $v, u \in V$.

Элементы множества V называются векторами, элементы из $\mathbb{R}$ – скалярами, отображение $(a, v) \rightarrow av$ – умножением вектора v на скаляр a . Отметим, что в равенстве $(ab)v = a(bv)$ из свойства (б) умножение ab производится в поле $\mathbb{R}$, а все другие операции – это умножение вектора на скаляр. Чтобы различать нули группы $(V, +)$ и поля $\mathbb{R}$, будем их обозначать соответственно 0 и 0 . Векторы v и u называются коллинеарными, если $v = \alpha u$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Аналогично определяется линейное пространство (V, F) над произвольным полем F .

Примеры.

1. Упорядоченный набор действительных чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ назовем вектором $\bar{a}$ размерности n с координатами $a_1, a_2, \dots, a_n$. На множестве всех таких векторов определим бинарную операцию $+$ следующим образом: для векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ их суммой называем вектор $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$. Теперь определим операцию умножения вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \bar{a}$ есть

вектор $(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$. Вектор $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ называется нулевым и обозначается $\bar{0}$.

Множество всех векторов размерности n , в котором заданы определенные выше операции, очевидно, является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$. Это пространство называется координатным n -мерным векторным пространством и обозначается $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

В координатном векторном пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ можно определить длину вектора и скалярное произведение векторов. Длиной $|\bar{a}|$ вектора $\bar{a}$ называется число $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$. Скалярным произведением $\bar{a} \cdot \bar{b}$ двух векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется число $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. Ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Непосредственно проверяется, что $\alpha(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \alpha \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \alpha \bar{b}$ для всех $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Кроме того, при $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2 > 0$.

2. Линейными пространствами будут множества векторов, выходящих из начала координат на плоскости и в трехмерном пространстве с обычными геометрическими операциями сложения векторов и умножения на скаляр. Они совпадают соответственно с координатными пространствами $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ и $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

3. Пусть V - поле, являющееся расширением поля F , т.е. F - подполе поля V . Тогда очевидно, V можно рассматривать как линейное пространство над полем F . Например, $\mathbb{R}$ является линейным пространством $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ над полем рациональных чисел.

Теорема 1.1 (элементарные свойства линейного пространства). В линейном пространстве $(V, \mathbb{R})$:

- (а) $au = 0$, если и только если либо $a = 0$, либо $u = 0$;
- (б) $a(u - v) = au - av$, $(a - b)u = au - bu$ для любых $u, v \in V$ и любых $a, b \in \mathbb{R}$;
- (в) $a(-u) = (-a)u = -au$ для любого $u \in V$ и любого $a \in \mathbb{R}$. ■

§ 2. Линейно зависимые и независимые системы векторов

Системой векторов будем называть произвольный конечный набор векторов $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ (здесь, в отличие от множества, допускаются одинаковые векторы). Любой набор векторов из системы $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ называется его подсистемой. Система из одного вектора называется тривиальной.

Вектор u называется линейной комбинацией векторов $v_1, \dots, v_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, если $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$. Такая комбинация называется нулевой, если все коэффициенты нулевые. Очевидно, нулевая комбинация любой системы векторов равна нулевому вектору 0 .

Определение. Система векторов $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ называется линейно зависимой, если нулевой вектор 0 является ненулевой линейной комбинацией этой системы; в противном случае система $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ называется линейно независимой. Другими словами, для линейно независимой системы $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ из равенства $0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ всегда следует $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

Если некоторая подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима (или в эквивалентной формулировке: если система векторов линейно независима, что и любая ее подсистема линейно независима). Действительно, если подсистема $[u_1, \dots, u_k]$ системы $[u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r]$ линейно зависима, то $0 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$, где не все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ нулевые. Но тогда нулевой вектор является ненулевой линейной комбинацией векторов системы $[u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r]$: $0 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + 0v_1 + \dots + 0v_r$. А это означает ее линейную зависимость.

Из этого свойства вытекает линейная зависимость всякой системы векторов, содержащей два одинаковых вектора или два пропорциональных (коллинеарных) вектора или нулевой вектор. Таким образом, линейно независимая система векторов является множеством, т.к. не содержит повторяющихся векторов.

Тривиальная система $[v]$ линейно независима, если и только если $v \neq 0$.

Пусть дана линейно независимая система векторов A и $A \subset B$. Система A называется максимальной линейно независимой в B , если добавление к A любого вектора из B дает уже линейно зависимую систему.

Теорема 2.1 (о максимальных линейно независимых подсистемах). Если линейно независимая система векторов A является максимальной в B , то каждый вектор из B является линейной комбинацией векторов из A с однозначно определяемыми коэффициентами. ■

Следствие 2.1 (об избыточности линейно зависимых систем). Нетривиальная система векторов линейно зависима, если и только если какой-либо из ее векторов есть линейная комбинация остальных. ■

Если в некоторой системе векторов A произвольный вектор $v \in A$ заменить либо вектором αv , где α – любое отличное от нуля число, либо вектором $v + \beta u$, где $u \in A$, β – любое число, при сохранении всех остальных векторов системы, то это преобразование называется элементарным преобразованием системы A . Отметим, что если система B получена из системы A элементарным преобразованием – умножением вектора $v \in A$ на α , то систему A можно получить из системы B также элементарным преобразованием – умножением вектора $\alpha v \in B$ на α^{-1} ; если же система B получена из системы A элементарным преобразованием – прибавлением к вектору v вектора βu , то систему A можно получить из системы B также

элементарным преобразованием – прибавлением к вектору $v + \beta u \in B$ вектора $-\beta u$.

Теорема 2.2 (*инвариантность линейной независимости*). Свойство системы векторов «быть линейно независимой» (или «линейно зависимой») инвариантно относительно элементарных преобразований. ■

Как мы знаем, однородная система, в которой число уравнений меньше числа переменных, имеет бесконечно много решений (а значит и ненулевые решения). Это утверждение эквивалентно следующему: в координатном векторном пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ любая система A с более чем n векторами линейно зависима.

Теорема 2.3 (*о невырожденной матрице*). В квадратной матрице A порядка n система строк линейно независима, если и только если линейно независима ее система столбцов. ■

Благодаря теореме 2.3 корректно следующее определение.

Определение. Квадратная матрица называется невырожденной, если система ее строк (столбцов) линейно независима; в противном случае квадратная матрица называется вырожденной.

§ 3. Ранг системы векторов

Определение. Говорят, что система векторов $[a_1, \dots, a_r]$ векторного пространства $(V, \mathbb{R})$ линейно выражается через систему $[b_1, \dots, b_s]$ этого же пространства, если всякий вектор первой системы является линейной комбинацией векторов второй системы.

Непосредственно проверяется транзитивность этого понятия: если система $[a_1, \dots, a_r]$ линейно выражается через систему $[b_1, \dots, b_s]$, а система $[b_1, \dots, b_s]$ линейно выражается через систему $[c_1, \dots, c_t]$, то система $[a_1, \dots, a_r]$ линейно выражается через систему $[c_1, \dots, c_t]$. Очевидно также, что если система $[a_1, \dots, a_r]$ линейно выражается через некоторую подсистему системы $[b_1, \dots, b_s]$, то $[a_1, \dots, a_r]$ будет линейно выражаться и через саму систему $[b_1, \dots, b_s]$ – достаточно остальные векторы в $[b_1, \dots, b_s]$ взять с нулевыми коэффициентами.

Две системы векторов A и B из $(V, \mathbb{R})$ называются эквивалентными ($A \sim B$), если каждая из них линейно выражается через другую.

Ясно, что если две системы эквивалентны и если некоторый вектор линейно выражается через одну из этих систем, то он будет линейно выражаться и через другую. Однако нельзя утверждать, что если одна из двух эквивалентных систем векторов линейно независима, то этим же свойством обладает и другая. Если же обе эти системы линейно независимы, то о числе векторов в них можно сделать важное высказывание. Но прежде докажем следующую теорему.

Теорема 3.1 (*о числе векторов в максимальных линейно независимых подсистемах*). Пусть дано линейное пространство $(V, \mathbb{R})$.

(а) Пусть $B \subset V$. Тогда все максимальные в B линейно независимые системы содержат равное число векторов.

(б) Все максимальные в $\mathbb{R}^n$ линейно независимые системы векторов координатного пространства $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ состоят из n векторов. ■

Благодаря теореме 3.1, корректно следующее определение ранга системы векторов.

Определение. Пусть B – система векторов, A – произвольная максимальная в B линейно независимая система. Число векторов в A называется рангом системы B .

Следствие 3.1 (о рангах эквивалентных систем). Ранги эквивалентных систем векторов равны. ■

Следствие 3.2 (об инвариантности ранга относительно элементарных преобразований). Ранг системы векторов не меняется при элементарных преобразованиях этой системы. ■

Теорема 3.2 (о ранге матрицы). В произвольной матрице A ранг ее системы строк равен рангу ее системы столбцов. ■

Благодаря теореме 3.2, можно дать **определение ранга матрицы**, как числа, равного рангу ее системы строк или столбцов.

Следствие 3.3 (о ранге невырожденной матрицы). Квадратная матрица невырожденная, если и только если ее ранг равен ее порядку.

Итак, с точки зрения ранга, невырожденная матрица порядка n – это матрица ранга n ; вырожденная матрица порядка n – это матрица ранга меньшего, чем n .

Теорема 3.3 (Кронекера-Капели).

(а) Система линейных уравнений $AX = C$ совместна, если и только если ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $(A \ C)$.

(б) Пусть система $AX = C$ с n переменными совместна и ранг матрицы A обозначен $\text{rank}(A)$. Тогда в случае $\text{rank}(A) = n$ система $AX = C$ имеет единственное решение, а в случае $\text{rank}(A) < n$ система $AX = C$ имеет бесконечно много решений. ■

§4. Конечномерные линейные пространства

Определение. Пусть дано линейное пространство $(V, \mathbb{R})$. Если V содержит хотя бы одну конечную максимальную в V линейно независимую систему, то $(V, \mathbb{R})$ называется конечномерным линейным пространством. А поскольку в этом случае все максимальные в V линейно независимые системы содержат равное число векторов n , где n – ранг множества V , то пространство $(V, \mathbb{R})$ называют n -мерным или размерности n . При этом всякая максимальная в V линейно независимая система векторов называется базой пространства $(V, \mathbb{R})$. n -мерные линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ будем обозначать V_n .

Примеры.

Линейное пространство $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ является 2-мерным: его база 1, i . А вот линейное пространство $(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$ не является конечномерным и потому не имеет баз (это следует из несчетности множества комплексных чисел).

Может случиться, что хотя векторы некоторых двух данных линейных пространств по своей природе совершенно различны, но с точки зрения свойств операций эти два пространства неразличимы. В этом случае возникает понятие изоморфных пространств.

Определение. Пусть даны два линейных пространства $(V, \mathbb{R})$ и $(V', \mathbb{R})$. Отображение $\varphi: V \rightarrow V'$, ставящее в соответствие вектору v из $(V, \mathbb{R})$ вектор v' из $(V', \mathbb{R})$, называется линейным, если $\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v)$ для любых $v, w \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$. Линейное отображение $\varphi: V \rightarrow V'$ называется изоморфным (изоморфизмом), если оно биективное; при этом пространства $(V, \mathbb{R})$ и $(V', \mathbb{R})$ называются изоморфными.

Изоморфизм – это отношение эквивалентности на множестве всех линейных пространств, где каждый класс эквивалентности состоит из попарно изоморфных пространств.

Теорема 4.1 (основные свойства изоморфизма). При изоморфизме $\varphi: V \rightarrow V'$ линейных пространств $(V, \mathbb{R})$ и $(V', \mathbb{R})$:

(а) образом нуля 0 пространства $(V, \mathbb{R})$ служит нуль 0' пространства $(V', \mathbb{R})$; образом $-v$ служит вектор $-v'$, противоположный $-v$.

(б) Система векторов $[v_1, \dots, v_k]$ линейно независима в $(V, \mathbb{R})$, если и только если система их образов $[v'_1, \dots, v'_k]$ линейно независима в $(V', \mathbb{R})$.

Из теоремы 4.1 сразу следует, что при изоморфизме линейных пространств база переходит в базу.

Теперь в каждом классе эквивалентности относительно отношения изоморфизма, постараемся выявить «наилучшего», с точки зрения наглядности, представителя.

Определение. Пусть $[e_1, \dots, e_n]$ – база пространства V_n . Тогда произвольный вектор v однозначно представляется в виде линейной комбинации системы $[e_1, \dots, e_n]$: $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, причем такое представление для v единственное. Вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ будем называть координатной строкой вектора v в базе $[e_1, \dots, e_n]$, а само представление $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ – разложением вектора v в базе $[e_1, \dots, e_n]$.

Теорема 4.2 (об изоморфизме конечномерных пространств). Всякое n -мерное линейное пространство $(V_n, \mathbb{R})$ изоморфно координатному n -мерному векторному пространству $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. ■

Итак, теорема 4.2 утверждает: все n -мерные линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ изоморфны между собой и среди них есть координатное векторное пространство $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Аналогично, все n -мерные линейные пространства над произвольным полем F изоморфны между собой и среди них есть координатное векторное пространство (F^n, F) .

§ 5. Линейные подпространства

Определение. Непустое множество $U \subset V$ векторов линейного пространства $(V, \mathbb{R})$ называется линейным подпространством в $(V, \mathbb{R})$, если для любых векторов $u, v \in U$ и любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ $au + bv \in U$. Другими словами: любая линейная комбинация любой конечной системы векторов из U должна принадлежать U .

В силу этого определения: нулевой вектор 0 , равный $0u$ для некоторого $u \in U$ принадлежит U ; для каждого вектора $u \in U$ противоположный вектор $-u$, равный $(-1)u$, также принадлежит U . Таким образом, U как и V , является группой относительно операции сложения. А так как остальные 4 аксиомы ЛП о свойствах умножения вектора на скаляр, автоматически выполняются для всех векторов V , то U само является ЛП.

Эквивалентное определение подпространства: непустое множество U называется подпространством, если оно само является ЛП относительно определенных в V операций сложения векторов и умножения на скаляр.

Важные примеры.

1. Минимальное и максимальное подпространства. В $(V, \mathbb{R})$ множество, состоящее из одного нулевого вектора, является подпространством, называемым тривиальным размерности 0 (в нем нет линейно независимых систем). Пространство $(V, \mathbb{R})$ само является подпространством в $(V, \mathbb{R})$.

2. Каждое подполе F поля $\mathbb{C}$ является подпространством $(F, \mathbb{Q})$ линейного пространства $(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$.

3. Пусть L_1, L_2 – подпространства в $(V, \mathbb{R})$. Будет ли их пересечение $L_1 \cap L_2$ подпространством? Если U – произвольная система из $L_1 \cap L_2$, то любая линейная комбинация векторов из U принадлежит как L_1 так и L_2 , т.е. не выходит за пределы пересечения $L_1 \cap L_2$.

4. Альтернативой объединению является **сумма подпространств**. Суммой $L_1 + L_2$ подпространств L_1, L_2 пространства $(V, \mathbb{R})$ называется множество всех векторов $\{u_1 + u_2 \mid u_i \in L_i, i = 1, 2\}$.

5. Пусть дана произвольная система векторов $A = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ n -мерного линейного пространства $(V_n, \mathbb{R})$. Непосредственно по определению проверяется, что множество U всех линейных комбинаций векторов системы A составляет подпространство в $(V_n, \mathbb{R})$, причем оно имеет размерность k если A линейно независима. В этом случае говорят, что U порождено системой векторов $[v_1, \dots, v_k]$.

Очевидно и обратное: всякое k -мерное подпространство U в $(V_n, \mathbb{R})$ порождается некоторой линейно независимой системой из k векторов, являющейся базой в U .

Теорема 5.1 (о размерности суммы и пересечения подпространств). Пусть $d_+, d_1, d_2, d_\cap$ — соответственно размерности подпространств $L_1 + L_2$, L_1, L_2 , $L_1 \cap L_2$ линейного пространства $(V_n, \mathbb{R})$. Тогда $d_+ + d_\cap = d_1 + d_2$ ■

Теорема 5.2 (теорема Лагранжа для расширений полей). Пусть F, U, V поля, причем $F \subset U \subset V$. Предположим, что размерности ЛП (U, F) и (V, U) равны соответственно m и n (это записывается так: $(U : F) = m$, $(V : U) = n$) и пусть $[u_1, \dots, u_m]$ и $[v_1, \dots, v_n]$ — их базы соответственно. Тогда размерность ЛП (V, F) равна mn , причем его базой будет система векторов $[u_i v_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n]$. ■

§ 6. Линейные преобразования

Определение. Пусть дано линейное пространство $(V, \mathbb{R})$. Произвольное линейное отображение $\varphi: V \rightarrow V$ называется линейным преобразованием пространства $(V, \mathbb{R})$. Очевидно, если линейное преобразование φ биективно, то оно является изоморфным отображением пространства $(V, \mathbb{R})$ на себя. В этом случае линейное преобразование φ называется невырожденным.

При любом линейном преобразовании φ образом нуля служит ноль, образом вектора $-v$ служит вектор $-\varphi(v)$. Кроме того, если при линейном преобразовании образы системы векторов линейно независимы, то и сама система векторов линейно независима (обратное не обязательно верно).

Любое $(V, \mathbb{R})$ линейное пространство допускает такие линейные преобразования: тождественное преобразование $\varepsilon: V \rightarrow V$, при котором $\varepsilon(v) = v$ для любого $v \in V$; нулевое преобразование $\omega: V \rightarrow V$, при котором $\omega(v) = 0$ для любого $v \in V$.

Теорема 6.1 (описание линейных преобразований конечномерного пространства). Пусть $[e_1, \dots, e_n]$ — база пространства V_n . Для любой системы из n векторов $[v_1, \dots, v_n]$ в V_n существует такое линейное преобразование φ пространства V_n , что $v_i = \varphi(e_i)$, $i = 1, \dots, n$. Заданное таким образом линейное преобразование определяется однозначно. ■

Согласно теореме 6.1, линейное преобразование φ n -мерного линейного пространства однозначно определяется заданием образов $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ базы $[e_1, \dots, e_n]$. Поэтому его можно задать квадратной матрицей A порядка n : i -я строка — это координатная строка вектора $\varphi(e_i)$ в базе $[e_1, \dots, e_n]$.

Таким образом, матричное уравнение, описывающее линейное преобразование φ , выглядит так:

$$\varphi(e) = Ae,$$

где

$$\varphi(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Определения. Обозначим через $\varphi(V_n)$ множество всех образов линейного преобразования φ . $\varphi(V_n)$ – линейное подпространство пространства V_n , называемое образом линейного преобразования φ , а его размерность называется рангом линейного преобразования φ .

Обозначим через $\varphi^{-1}(0)$ множество всех прообразов нуля линейного преобразования φ . $\varphi^{-1}(0)$ – линейное подпространство пространства V_n , называемое ядром, а его размерность называется дефектом линейного преобразования φ .

Теорема 6.2 (о размерности образа и ядра линейного преобразования). Сумма ранга и дефекта линейного преобразования φ пространства V_n равна n . ■

Следствие 6.1. Линейное преобразование φ пространства V_n является изоморфным, если и только если его дефект равен нулю ■

§ 7. Евклидовы пространства

Определение. Скажем, что в линейном пространстве

$(V, \mathbb{R})$ определено скалярное умножение, если всякой паре векторов $v, u \in V$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом $v \cdot u$ и называемое скалярным умножением векторов v и u , причем выполняются следующие аксиомы:

- (а) $v \cdot u = u \cdot v$ для любых $v, u \in V$;
- (б) $(v + u) \cdot w = v \cdot w + u \cdot w$ для любых $v, u, w \in V$;
- (в) $av \cdot u = v \cdot au = a(v \cdot u)$ для любых $v, u \in V$, $a \in \mathbb{R}$;
- (г) $v \cdot v > 0$ для любого $v \in V$, отличного от 0 .

Длиной вектора v называется величина $\sqrt{v \cdot v}$, обозначаемая $|v|$.

Линейное пространство $(V, \mathbb{R})$ со скалярным умножением называется евклидовым пространством; n -мерное линейное пространство V_n со скалярным умножением называется n -мерным евклидовым пространством и обозначается E_n .

Векторы v и u называются ортогональными, если $v \cdot u = 0$. Отметим, что $0 \cdot v = 0 \cdot v = 0(0 \cdot v) = 0$. Поэтому нулевой вектор считается ортогональным любому вектору. Система векторов называется ортогональной, если все векторы этой системы попарно ортогональны.

Теорема 7.1 (о линейной независимости ортогональной системы). В евклидовом пространстве всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Ортогонализацией линейно независимой системы векторов $[v_1, \dots, v_r]$ называется переход от этой системы к новой системе векторов $[u_1, \dots, u_r]$, построенной следующим образом: на первом шаге полагаем $u_1 = v_1$; на k -м

шаге полагаем
$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ki} u_i, \quad \alpha_{ki} = \frac{v_k \cdot u_i}{|u_i|^2}.$$

Можно показать, что для каждого $k = 1, \dots, r$ система $[u_1, \dots, u_k]$, получаемая в процессе ортогонализации линейно независимой системы $[v_1, \dots, v_r]$, не содержит нулевых векторов и является ортогональной и порождает тоже подпространство, что и система $[u_1, \dots, u_k]$.

Теорема 7.2 (о существовании ортогональной базы). Любое подпространство U в E_n обладает ортогональной базой, причем эту базу можно дополнить до ортогональной базы пространства E_n . ■

Ортогональная система векторов называется ортонормированной, если длина каждого вектора в ней равна 1. Умножая каждый ненулевой вектор ортогональной базы на число, обратное его длине, получаем ортонормированную базу.

Следствие 7.1. Любое подпространство U в E_n обладает ортонормированной базой, причем эту базу можно дополнить до ортонормированной базы пространства E_n .

Определение. Пусть даны два евклидовых пространства $(E, \mathbb{R})$ и $(E', \mathbb{R})$. Они называются изоморфными, если существует биективное отображение $\varphi: E \rightarrow E': e \rightarrow e'$, которое:

(а) является изоморфизмом между $(E, \mathbb{R})$ и $(E', \mathbb{R})$, рассматриваемыми как линейные пространства;

(б) сохраняет скалярное произведение, т.е. $v \cdot u = v' \cdot u'$ для любых векторов $v, u \in E$.

Теорема 7.3 (об изоморфизме евклидовых пространств). Любые n -мерные евклидовы пространства E_n и E'_n изоморфны между собой.

3. Векторная алгебра

§1. Основные определения

Вектором в трехмерном пространстве называется любой направленный отрезок $\overline{v} = \overline{AB}$ с начальной точкой А и конечной точкой В. Нулевой вектор $\overline{o} = \overline{AA}$ не имеет направления. Длина вектора $\overline{v}$ обозначается $|\overline{v}|$. Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называются коллинеарными. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора называются равными, если они коллинеарные, одинаково направленные и одинаковой длины. Такие векторы составляют так называемые классы эквивалентности, состоящие из равных векторов. Поэтому векторы можно параллельно перемещать в пространстве, выбирая наиболее удобного представителя из класса эквивалентности, например, исходящим из начала координат.

Суммой двух векторов $\overline{v}$ и $\overline{u}$ называется вектор $\overline{w} = \overline{v} + \overline{u}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{v}$, а конец – с концом вектора $\overline{u}$ при условии, что начало вектора $\overline{u}$ совпадает с концом вектора $\overline{v}$ (правило треугольника). Если начала векторов $\overline{v}$ и $\overline{u}$ совпадают, то сумму можно найти и по правилу параллелограмма. Сумму трех векторов удобно находить по правилу параллелепипеда.

Произведением вектора $\overline{v}$ на скаляр $a \in \mathbb{R}$ называется вектор $\overline{u} = a\overline{v}$, коллинеарный $\overline{v}$ и с длиной $|\overline{u}| = |a| |\overline{v}|$, направление которого совпадает с $\overline{v}$ при $a > 0$, $\overline{v} \neq \overline{o}$ и противоположно – при $a < 0$, $\overline{v} \neq \overline{o}$. Вектор $(-1)\overline{v}$ называется противоположным вектору $\overline{v}$ и обозначается $-\overline{v}$. Поэтому сумму $\overline{u} + (-\overline{v})$ удобно назвать разностью векторов $\overline{v}$ и $\overline{u}$ и обозначить $\overline{u} - \overline{v}$.

Скалярным произведением $\overline{u} \cdot \overline{v}$ ненулевых векторов $\overline{v}$ и $\overline{u}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними: $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| |\overline{v}| \cos \varphi$. Если один из векторов нулевой, то скалярное произведение принимается равным нулю. Если $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$, то $\overline{v}$ и $\overline{u}$ называются ортогональными. Очевидно, ненулевые векторы ортогональны, если и только если он перпендикулярны.

Векторной проекцией вектора $\overline{v} = \overline{AB}$ на направленную ось l называется вектор $\overline{A_1B_1}$ на оси l , где отрезки A_1A и B_1B перпендикулярны l . Скалярной проекцией $\text{pr}_l \overline{v}$ вектора $\overline{v}$ на ось l называется длина вектора $\overline{A_1B_1}$, взятая со знаком $+$ при совпадении направлений оси и вектора, и со знаком минус $-$ в противном случае называется. Очевидно, $\text{pr}_l \overline{v} = |\overline{v}| \cos \varphi$, где φ – угол между вектором и осью. Из определения скалярного произведения следует, что $\overline{v} \cdot \overline{u} = |\overline{u}| \text{pr}_{\overline{u}} \overline{v} = |\overline{v}| \text{pr}_{\overline{v}} \overline{u}$

Теорема 1.1 (элементарные свойства введенных операций).

(а) Операция сложения коммутативна: $\overline{v} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{v}$ для любых $\overline{v}$, $\overline{u}$, ассоциативна: $(\overline{v} + \overline{u}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$ для любых $\overline{v}$, $\overline{u}$, $\overline{w}$; каждый вектор имеет единственный противоположный, нулевой вектор – единственный, обладающий следующим свойством: $\overline{v} + \overline{o} = \overline{o} + \overline{v} = \overline{v}$ для любого вектора $\overline{v}$.

(б) $1\bar{v} = \bar{v}$, $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$, $(a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$, $a(\bar{v} + \bar{u}) = a\bar{v} + a\bar{u}$ для любых $\bar{v}$, $\bar{u}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(в) Операция скалярного умножения коммутативна, дистрибутивна относительно сложения: $\bar{v} \cdot (\bar{u} + \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{w}$ для любых $\bar{v}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$; $a\bar{v} \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot a\bar{u} = a(\bar{v} \cdot \bar{u})$; $\bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{v}|^2$, причем $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$ только при $\bar{v} = \vec{0}$ ■

Прямоугольная система координат Оху на плоскости образуется двумя перпендикулярными упорядоченными числовыми осями с одинаковой единицей масштаба, пересекающимися в точке О, называемой началом координат и которой соответствует значение 0 на осях; первая ось Ох называется осью абсцисс, вторая Оу – осью ординат.

Прямоугольная система координат Охуz в пространстве образуется тремя перпендикулярными упорядоченными осями с одинаковой единицей масштаба, пересекающимися в одной точке О, называемой началом координат и которой соответствует значение 0 на осях; первая ось Ох называется осью абсцисс, вторая Оу – осью ординат, третья Oz – осью аппликата. Существует две координатные системы в пространстве. Правая: если смотреть вдоль оси Oz по направлению к началу координат, то поворот на 90 оси Ох до совпадения с осью Оу пройдет против часовой стрелки; в противном случае будем иметь левую систему. Будем дальше использовать только правую систему

Обозначим через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ единичные векторы (орты), исходящие из начала координат и лежащие соответственно на положительных полуосях Ох, Оу, Oz. Теперь возьмем произвольный вектор $\bar{v}$ и выберем вектор $\overline{OA}$ (радиус-вектор) исходящий из начала координат и равный $\bar{v}$. Координатами (x, y, z) вектора $\bar{v}$ называют координаты конца А вектора $\overline{OA}$ и этому будет соответствовать запись $\bar{v} = (x, y, z)$. Пользуясь правилом параллелепипеда можно показать, что $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ (разложение вектора $\bar{v}$ по ортам)

Теорема 1.2 (векторные операции в координатном виде). Пусть $\bar{v} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{u} = (x_2, y_2, z_2)$, φ - угол между векторами $\bar{v}$ и $\bar{u}$ Тогда:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad a\bar{v} + b\bar{u} &= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2); \\ \text{(б)} \quad \bar{v} \cdot \bar{u} &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad \text{(в)} \quad |\bar{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}; \\ \text{(г)} \quad \cos \varphi &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§2. Векторные произведения

Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ с общим началом и не лежащих в одной плоскости, называется правой, если кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ наблюдается из конца вектора $\bar{c}$ происходящим против движения часовой стрелки. В противном случае данная тройка называется левой.

Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длина которого равна $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ (φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$) и который и направлен так, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, то результат их векторного произведения считается равным нулевому вектору по определению.

Очевидно, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если и только если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные. Очевидно, также число $|\vec{a} \times \vec{b}|$ равно площади параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Геометрически вектор $\vec{OA} \times \vec{OB}$ можно построить так: проведем плоскость Π через точку O перпендикулярно $\vec{OA}$ и спроектируем на эту плоскость вектор $\vec{OB}$, получив его проекцию $\vec{OB}_1$. Ясно, что $|\vec{OB}_1| = |\vec{OB}| \sin \varphi$. Затем увеличим длину вектора $\vec{OB}_1$ в $|\vec{OA}|$ раз, получив вектор $\vec{OB}_2$ длины $|\vec{OA}| \sin \varphi |\vec{OB}|$. Теперь остается только повернуть вектор $\vec{OB}_2$ на угол 90° в плоскости Π вокруг точки O против часовой стрелки, получив искомый вектор $\vec{OA} \times \vec{OB}$.

Теорема 2.1 (свойства векторного произведения).

- (а) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ (антикоммутативность),
- (б) $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$,
- (в) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивность). ■

Теорема 2.2 (векторное произведение в координатах). Если

$$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1), \vec{u} = (x_2, y_2, z_2), \text{ то } \vec{v} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Три ненулевых вектора называются компланарными, если будучи приведенными к общему началу, они окажутся лежащими в одной плоскости; в противном случае они называются некомпланарными.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Теорема 2.3 (свойства смешанного произведения).

(а) Если $\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AC}, \vec{c} = \vec{AD}$ некомпланарные векторы с общим началом в точке A , то число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятого со знаком $+$ если тройка правая, и со знаком $-$ если левая.

(б) Ненулевые векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, если и только если $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

(в) Для любой тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ верно $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. В силу этого свойства в векторном произведении можно опускать знаки операций $\times, \cdot$ и скобки, записывая его в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

(г) $(\lambda \bar{a})\bar{b}\bar{c} = \bar{a}(\lambda \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{b}(\lambda \bar{c}) = \lambda(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и числа λ

(д) $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c}\bar{d} = \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$ для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$. ■

Теорема 2.4 (смешанное произведение в координатах). Если $\bar{v} = (x_1, y_1, z_1), \bar{u} = (x_2, y_2, z_2), \bar{w} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$\overline{vu\bar{w}} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Рассмотрим вектор $\bar{d} = (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$. Если хотя бы один из векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ нулевой, то $\bar{d} = \bar{0}$ по определению векторного произведения. Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ненулевые и имеют общее начало. Тогда по определению векторного произведения вектор $\bar{d}$ перпендикулярен векторам $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{c}$, в свою очередь вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен плоскости α , в которой лежат векторы $\bar{a}, \bar{b}$. Поэтому $\bar{d}$ параллелен в той же плоскости α . Другими словами, векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ компланарны. Поэтому $\bar{d}$ можно представить в виде $\bar{d} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b}$, где λ, μ - некоторые действительные числа. Об этом следующая теорема.

Теорема 5.1 (двойное векторное произведение). Для любых трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ верно $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = -(b \cdot c)\bar{a} + (a \cdot c)\bar{b}$.

4. Прямые и плоскости

Если говорят, что некоторое множество точек P на координатной плоскости (или в координатном пространстве) задается некоторым уравнением вида $F(x, y) = 0$ (или уравнением $F(x, y, z) = 0$), то это означает: координаты точек множества P , и только они, удовлетворяют этому уравнению. Прямые и плоскости, и только эти фигуры, задаются уравнениями первого порядка вида $ax + by + c = 0$ или $ax + by + cz + d = 0$: на плоскости прямая задается одним уравнением с двумя переменными, в пространстве прямая задается двумя уравнениями с тремя переменными, плоскость – одним уравнением с тремя переменными. Множество точек можно P может быть задано векторным уравнением $F(\bar{r}) = 0$ относительно радиус-вектора $\bar{r}$. В этом случае радиус-векторы точек множества P , и только они, удовлетворяют этому уравнению $F(\bar{r}) = 0$.

§ 1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть дана прямая l . Любой вектор параллельный этой прямой, называется ее направляющим вектором, любой вектор, перпендикулярный ей, называется ее нормальным вектором.

Теорема 1.1 (векторно-параметрическое и векторное уравнения прямой). Пусть дана прямая l с направляющим вектором $\bar{a}$ и точка M_0 на этой прямой с радиус-вектором $\bar{r}_0$.

(а) Прямая l задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$, где λ пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

(б) Прямая l задается уравнением $(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} = \vec{0}$. ■

Следствие 1.1 (каноническое уравнение прямой). Пусть дана прямая l с направляющим вектором $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на этой прямой.

Тогда прямая l задается уравнением $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$. ■

Следствие 1.2 (уравнение прямой через две точки). Пусть дана прямая l и две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на ней. Тогда прямая l задается

уравнением $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. ■

§ 2. Уравнения прямой на плоскости

Уравнения векторно-параметрическое, каноническое и через две точки для прямой на плоскости задаются аналогично. Любой вектор, ортогональный заданной прямой, называется ее нормальным вектором.

Теорема 2.1 (общее уравнение прямой на плоскости).

(а) Любая прямая l на координатной плоскости задается уравнением первого порядка $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$), причем $\vec{n} = (a, b)$ нормальный вектор этой прямой.

(б) Любое уравнение первого порядка $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) задает некоторую прямую на плоскости с нормальным вектором $\vec{n} = (a, b)$. ■

Следствие 2.1 (уравнение прямой в отрезках координатных осей). Пусть прямая l пересекает ось абсцисс и ось ординат соответственно в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$, отличных от начала координат. Тогда она задается

уравнением $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. ■

Угловым коэффициентом прямой l , не перпендикулярной оси абсцисс, называется тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс.

Следствие 2.2 (уравнение прямой с угловым коэффициентом). Если прямая l не параллельна оси абсцисс, то она задается уравнением $y = kx + b$, где k - ее угловой коэффициент, b - ордината точки ее пересечения с осью ординат; если прямая l параллельна оси ординат, то она задается уравнением $x = x_0$, где x_0 - абсцисса точки ее пересечения с осью абсцисс. ■

§ 3. Взаимное расположение прямых и расстояния между ними

Отметим очевидные факты: прямые параллельны или совпадают, если и только если их направляющие (нормальные) векторы коллинеарны; прямые перпендикулярны, если и только если их направляющие (нормальные) векторы ортогональны.

Теорема 3.1 (*взаимное расположение прямых в пространстве*). Пусть прямые l_1 и l_2 , проходящие через точки M_1 и M_2 соответственно, имеют направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Тогда:

- (а) если $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарные, но не коллинеарные вектору $\overline{M_1M_2}$, то прямые l_1 и l_2 параллельны;
- (б) если $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ коллинеарные, то l_1 и l_2 совпадают;
- (в) если $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарные, то при $\vec{a}_1\vec{a}_2\overline{M_1M_2} = 0$ прямые l_1 и l_2 пересекаются, а при $\vec{a}_1\vec{a}_2\overline{M_1M_2} \neq 0$ прямые l_1 и l_2 скрещиваются. ■

Следствие 3.1 (*взаимное расположение прямых на плоскости и их общие уравнения*). Пусть прямые l_1 и l_2 на координатной плоскости заданы общими уравнениями $ax + by + c_1 = 0$ и $ax + by + c_2 = 0$ соответственно.

- (а) l_1 и l_2 параллельны, если и только если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$;

(б) если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то прямые l_1 и l_2 могут заданы уравнениями $ax + by + c_1 = 0$ и $ax + by + c_2 = 0$ соответственно, причем при $c_1 \neq c_2$ они параллельны, а при $c_1 = c_2$ они совпадают. ■

Следствие 3.2 (*взаимное расположение прямых на плоскости и их угловые коэффициенты*). Пусть прямые l_1 и l_2 на координатной плоскости заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Если $k_1 \neq k_2$, то l_1 и l_2 пересекаются, если $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, то l_1 и l_2 параллельны, если $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$, то l_1 и l_2 совпадают.

Теорема 3.2 (*расстояние от точки до прямой в пространстве*). Пусть прямая l с направляющим вектором $\vec{a}$ проходит через точку M_0 . Тогда расстояние от произвольной точки M_1 до прямой l равно $\frac{|\overline{M_0M_1} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$. ■

Следствие 3.2 (*расстояние от точки до прямой на плоскости*). Пусть на координатной плоскости прямая l задана общим уравнением $ax + by + c = 0$ и $M_1(x_1, y_1)$ - произвольная точка на плоскости. Тогда расстояние от M_1 до прямой l равно $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ■

Расстоянием между прямыми называется наименьшее из расстояний между парами точек, лежащих соответственно на этих прямых. Очевидно, если прямые пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Если прямые параллельные, то расстояние между ними можно найти так: взять на одной из них точку и найти расстояние от этой точки до другой прямой.

Следствие 3.3 (*расстояние между прямыми в пространстве*). Пусть прямые l_1 и l_2 , проходящие через точки M_1 и M_2 соответственно, имеют направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Предположим, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарные. Тогда расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно

$$d = \frac{|\overline{M_1 M_2 \vec{a}_1 \vec{a}_2}|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}.$$

■

Следствие 3.4 (*расстояние между прямыми на плоскости*). Расстояние d между параллельными прямыми l_1 и l_2 на координатной плоскости, заданными общими уравнениями $ax + by + c_1 = 0$ и $ax + by + c_2 = 0$, равно

$$d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

■

§ 4. Уравнения плоскости и расстояния до нее

Теорема 4.1 (*векторно-параметрическое и векторное уравнения прямой*). Пусть дана плоскость Π с нормальным вектором $\vec{n}$, проходящая через точку M_0 с радиусом вектором $\vec{r}_0$ и параллельная двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(а) Плоскость Π задается векторно-параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, где λ и μ пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

(б) Плоскость Π задается векторным уравнением $(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{a}\vec{b} = 0$.

(в) Плоскость Π задается также векторным уравнением $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}$. ■

Следствие 4.1 (*общее уравнение прямой плоскости*).

(а) Любая плоскость Π в координатном пространстве задается уравнением первого порядка $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), причем $\vec{n} = (a, b, c)$ нормальный вектор этой плоскости.

(б) Любое уравнение первого порядка $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) задает некоторую плоскость с нормальным вектором $\vec{n} = (a, b, c)$. ■

Следствие 4.2 (*уравнение плоскости, проходящей через три точки*). Пусть дана плоскость Π и три ее точки M_0, M_1, M_2 , не лежащие на одной прямой, соответственно с радиус-векторами $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$. Тогда плоскость Π задается уравнением $(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = 0$. ■

Следствие 4.3 (*расстояние от точки до плоскости*). Пусть плоскость Π задана общим уравнением $ax + by + cz + d = 0$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда расстояние от M_1 до плоскости Π равно $s = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. ■

Две плоскости параллельны, если и только если их нормальные векторы коллинеарны. Поэтому две параллельные плоскости можно задать общими

уравнениями вида $ax + by + cz + d_1 = 0$ и $ax + by + cz + d_2 = 0$, причем в случае $d_1 = d_2$ эти плоскости будут совпадать.

Следствие 4.4 (расстояние между параллельными плоскостями). Расстояние между двумя параллельными плоскостями, заданными уравнениями $ax + by + cz + d_1 = 0$ и $ax + by + cz + d_2 = 0$, равно $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. ■

§ 5. Прямая и плоскость

Теорема 5.1 (общее уравнение прямой в пространстве). Пусть плоскости Π_1 и Π_2 заданы общими уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ и пересекаются по прямой l . Тогда прямая l задается системой уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$. ■

Следствие 5.1 (связь между общим каноническим уравнениями прямой). Пусть прямая l проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и задается системой $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$. Тогда ее каноническое уравнение имеет

вид $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$, где $(a_x, a_y, a_z) = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)$. ■

5. Фигуры и поверхности второго порядка

Уравнения второго порядка с двумя переменными $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) задают на плоскости три вида кривых: эллипс, гипербола, парабола. Уравнения второго порядка с тремя переменными задают поверхности в пространстве.

§1. Эллипс, эллипсоид вращения и сфера.

Зафиксируем на плоскости две точки F_1 и F_2 , расстояние между которыми равно $2c$. Фигура, на плоскости (соответственно в пространстве), состоящая из всех точек M таких, что сумма расстояний от M до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная $2a$, где $a > c$, называется эллипсом (эллипсоидом вращения) с параметром $2a$. Эта фигура задается, согласно определению, векторным уравнением $|\vec{r} - \vec{r}_1| + |\vec{r} - \vec{r}_2| = 2a$, где $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радиус-векторы точек F_1 и F_2 , называемых фокусами.

Теорема 1.1 (каноническое уравнение эллипса). Если на координатной плоскости заданы фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ и $a > c > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$, то эллипс с параметром $2a$ задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ■

Теорема 1.2 (каноническое уравнение эллипсоида вращения). Если в координатном пространстве заданы фокусы $F_1(-c, 0, 0)$, $F_2(c, 0, 0)$ и $a > c > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$, то эллипсоид вращения с параметром $2a$ задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. ■

Окружностью (соответственно сферой) называется плоская (пространственная) фигура, множество все точек которой равноудалены от фиксированной точки F на расстоянии a . При этом F называется центром, a – радиусом соответствующей фигуры.

Следствие 1.1 (канонические уравнения окружности и сферы).

(а) Если на координатной плоскости задан центр $F(0, 0)$, то окружность с центром F и радиусом a задается уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

(б) Если в координатном пространстве задан центр $F(0, 0, 0)$, то сфера центром F и радиусом a задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. ■

Если пространство сжать вдоль оси Oz по формулам $X = x, Y = y, Z = \frac{c}{b}z$, то эллипсоид вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ преобразуется в фигуру $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, называемую эллипсоидом.

§2. Гипербола и двухполостной гиперboloид вращения

Зафиксируем на плоскости две точки F_1 и F_2 , расстояние между которыми равно $2c$. Фигура, на плоскости (соответственно в пространстве), состоящая из всех точек M таких, что модуль разности расстояний от M до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная $2a$, где $a < c$, называется гиперболой (гиперболоидом вращения) с параметром $2a$. Эта фигура задается, согласно определению, векторным уравнением $||\vec{r} - \vec{r}_1| - |\vec{r} - \vec{r}_2|| = 2a$, где $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – радиус-векторы точек F_1 и F_2 , называемых фокусами.

Теорема 2.1 (каноническое уравнение гиперболы). Если на координатной плоскости заданы фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ и $c > a > 0$, $b^2 = c^2 - a^2$, то гипербола с параметром $2a$ задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. ■

Теорема 2.2 (каноническое уравнение двухполостного гиперboloида вращения). Если в координатном пространстве заданы фокусы $F_1(-c, 0, 0)$, $F_2(c, 0, 0)$ и $c > a > 0$, $b^2 = c^2 - a^2$, то двухполостной гиперboloид вращения с параметром $2a$ задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$. ■

Если пространство сжать вдоль оси Oz по формулам $X = x, Y = y, Z = \frac{c}{b}z$, то гиперboloид вращения преобразуется в фигуру, которая задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, двухполостным гиперboloидом.

§3. Парабола и параболоид вращения

Зафиксируем на координатной плоскости точку F_0 и прямую l , находящуюся на расстоянии p от F_0 . Фигура на этой плоскости, состоящая из всех точек M , равноудаленных от F_0 и l , называется параболой с параметром p , фокусом F_0 и директрисой l .

Зафиксируем в координатном пространстве точку F_0 и плоскость Π , на расстоянии p от F_0 . Фигура, состоящая из всех точек M , равноудаленных от F_0 и Π , называется параболоидом вращения с параметром p , фокусом F_0 и директрисальной плоскостью Π .

Векторное уравнение параболы и параболоида вращения выглядит так:
 $|\vec{r} - \vec{r}_0| = p + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{e}$

Теорема 3.1 (каноническое уравнение параболы). Если на координатной плоскости задан фокус $F_0(\frac{p}{2}, 0)$ и директриса $x = -\frac{p}{2}$, то парабола с параметром p задается уравнением $y^2 = 2px$. ■

Теорема 3.1 позволяет изобразить параболу на координатной плоскости:

Теорема 3.2 (каноническое уравнение параболоида вращения). Если в координатном пространстве заданы фокус $F_0(\frac{p}{2}, 0, 0)$ и директрисальная плоскость $x = -\frac{p}{2}$, то параболоид вращения с параметром p задается уравнением $y^2 + z^2 = 2px$. ■

Если пространство сжать вдоль оси Oz по формулам $X = x, Y = y, Z = \sqrt{\frac{q}{p}}z$, то параболоид вращения $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$ преобразуется в фигуру, которая задается уравнением $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$ и называется эллиптическим параболоидом.

§4. Универсальные свойства и уравнение основных линий второго порядка на плоскости

Определение. Величина $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы с параметром $2a$, величина $\varepsilon = 1$ называется эксцентриситетом параболы. Очевидно для эллипса $\varepsilon < 1$, а для гиперболы $\varepsilon > 1$. Прямые $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$, параллельные оси ординат, называются директрисами эллипса и гиперболы, заданных уравнениями $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, причем эти директрисы соответствуют фокусам F_1 и F_2 ; прямая $x = -\frac{p}{2}$ называется директрисой параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$

Теорема 4.1 (универсальное свойство основных линий второго порядка). Отношение расстояний от любой точки основной линии 2-го порядка до ее фокуса и соответствующей директрисы, равно ее эксцентриситету. ■

Следствие 4.1 (универсальное уравнение основных линий второго порядка). Пусть линия 2-го порядка задана на координатной плоскости одним из канонических уравнений $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $y^2 = 2px$. Если r - расстояние от произвольной точки M этой линии до ее фокуса F , φ - угол между MF и положительным направлением оси Ox , то данная линия задается уравнением $r = \frac{d}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$, где ε - эксцентриситет линии, $d = \frac{b^2}{a}$ для эллипса или гиперболы и $d = p$ для параболы. ■

Уравнение $r = \frac{d}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$ называется уравнением основных линий второго порядка в полярных координатах.

6. Группы, кольца, поля

§ 1. Группы целых по модулю n

Полугруппой называется алгебраическая система $(S, \cdot)$ с непустым множеством S и ассоциативной бинарной операцией $\cdot$ на S . Если операция $\cdot$ коммутативна, то полугруппа $(S, \cdot)$ называется абелевой. Множество всех обратимых элементов полугруппы $(S, \cdot)$, содержащей единичный элемент, обозначается S^* . Пусть $a, b \in S^*$. Тогда и $ab \in S^*$, поскольку обратным для ab служит элемент $b^{-1}a^{-1}$. Поэтому $(S^*, \cdot)$ является группой. Таким образом, если в полугруппе каждый элемент обратим, т.е. $S = S^*$, то полугруппа является группой. Примером полугруппы, не являющейся группой, может служить $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

Будем называть остаток от деления целого числа a на n остатком a по модулю n , обозначая его через $res_n(a)$. Множество остатков $\{0, 1, \dots, n-1\}$ по модулю n обозначим через $\mathbb{Z}_n$. Определим на множестве $\mathbb{Z}_n$ операции сложения и умножения по модулю n , которые временно будем обозначать $+_n$ и $\cdot_n$: $a +_n b = res_n(a+b)$, $a \cdot_n b = res_n(ab)$. Очевидно, эти операции коммутативные и ассоциативные. Кроме того, $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ – абелева группа с единичным элементом 0, в которой обратным элементом $-a$ для ненулевого элемента a служит элемент $n-a$; $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$ – абелева полугруппа с единичным элементом 1. $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ – абелева группа ($\mathbb{Z}_n^*$ обозначает множество обратимых элементов в $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$), называемая мультипликативной группой целых по модулю n .

Функцией Эйлера называется функция φ , определенная на множестве $\mathbb{N}$ следующим образом: для каждого $m \in \mathbb{N}$ $\varphi(m)$ равно числу натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m . Очевидно, $1 \leq \varphi(m) \leq m-1$, причем $\varphi(m) = m-1 \Leftrightarrow m$ – простое.

Теорема 1.1 (о мультипликативной группе по модулю n). Группа $\mathbb{Z}_n^*$ состоит из всех натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n . ■

Итак, порядок группы $\mathbb{Z}_n^*$ равен $\varphi(n)$.

Условимся о следующем: индекс n в операциях $+_n$ и $\cdot_n$ будет опускаться всюду, где это не приводит к двусмысленности; вместо $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ будем писать $\mathbb{Z}_n^*$.

§ 2. Циклические группы

Определение. Пусть $(G, \cdot)$ – группа, $a \in G$. Наименьшее натуральное k , для которого $a^k = e$, называется порядком элемента a и обозначается $o(a)$. Если такого k не существует, то говорят, что a имеет бесконечный порядок.

Для аддитивной группы порядок $o(a)$ есть наименьшее натуральное k , для которого $ka = 0$.

Например, в группе $(\mathbb{Z}, +)$ все элементы бесконечного порядка. В группе $(\mathbb{Z}_n, +)$ все элементы конечного порядка.

Теорема 2.1 (свойства степеней элемента конечного порядка). Пусть $(G, \cdot)$ – группа, $a \in G$ и $o(a) = k$.

(а) Для любых целых чисел l и m $a^m = a^l \Leftrightarrow (m-l) \mid k$. В частности, $a^m = e \Leftrightarrow m \mid k$; $a^m = a^{res_k(m)}$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

(б) все элементы $e, a^1, \dots, a^{k-1}$ различные.

(в) Для любого натурального числа s $o(a^s) = \frac{k}{|\text{НОД}(k, s)|}$. ■

Определение. Группа $(G, \cdot)$ называется циклической, если она содержит такой элемент a (называемый образующим группы G), что каждый элемент в G есть некоторая степень a с целым показателем, т.е. $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Для аддитивной группы $(G, +)$ с образующим a каждый элемент имеет вид na , где $n \in \mathbb{Z}$. Например, группа $(\mathbb{Z}, +)$ циклическая с образующим 1. Группа $(\mathbb{Z}_n, +)$ циклическая с образующим 1.

Теорема 2.2 (характеризация циклических групп). Пусть $(G, \cdot)$ – группа

(а) G является циклической порядка n с образующим a , если и только если $G = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$, все степени $a^0, a^1, \dots, a^{n-1}$ различны, причем образующими являются только те из них a^s , чьи показатели s взаимно просты с n . Т.о. число образующих равно $\varphi(n)$.

(б) G является бесконечной циклической с образующим a , если и только если $G = \{\dots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, \dots\}$, все целые степени элемента a различны и только два элемента a и a^{-1} являются образующими в G . ■

Определение. Группы $(G, \circ)$ и $(H, *)$ называют изоморфными, если существует биективное отображение $\varphi: G \rightarrow H$ такое, что $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ для любых элементов a, b из G . При этом φ называется изоморфизмом групп G и H . Запись $G \cong H$ будет означать изоморфизм групп G и H .

Следствие 2.1 (описание циклических групп).

(а) Любая бесконечная циклическая группа $(G, \cdot)$ изоморфна группе $(\mathbb{Z}, +)$.

(б) Любая циклическая группа $(G, \cdot)$ порядка n изоморфна группе $(\mathbb{Z}_n, +)$ ■

§ 3. Подгруппы

Определение. Пусть H – произвольное подмножество элементов группы $(G, \cdot)$. Множество H называется замкнутым относительно операции $\cdot$, если для любых двух элементов a, b из H элемент ab также принадлежит H .

Непустое множество $H \subset G$ называется подгруппой в $(G, \cdot)$, если H замкнуто относительно операции $\cdot$ и само является группой относительно $\cdot$. Ранее было показано, что единичные элементы и обратные элементы единственные. Поэтому в G и H они совпадают.

Очевидно, группа G сама является подгруппой в $(G, \cdot)$. Если e – единица группы G , то $(\{e\}, \cdot)$ – подгруппа в G (она называется тривиальной). Множество четных целых чисел составляет подгруппу группы $(\mathbb{Z}, +)$.

Для каждого элемента $a \in G$ множество $H = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ – подгруппа. Она называется циклической подгруппой с образующим a и обозначается $[a]$.

Теорема 3.1 (критерий подгруппы). Пусть $(G, \cdot)$ – группа, H – непустое

подмножество ее элементов. Тогда H является подгруппой в G , если и только если $a^{-1}b \in H$ для любых $a, b \in H$. ■

Определение. Пусть H – подгруппа группы $(G, \cdot)$. Для $a \in G$ положим $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Множество aH называется левым смежным классом группы G по подгруппе H , (определяемым элементом a). Аналогично определяются правые смежные классы aH группы G по подгруппе H : $Ha = \{ha \mid h \in H\}$.

Любой элемент b группы G принадлежит некоторому левому смежному классу, т.к. $b = be \Rightarrow b \in bH$. Более того, левые смежные классы попарно не пересекаются: $c \in aH \cap bH \Rightarrow c = ah_1 = bh_2 \Rightarrow b^{-1}a = h_2h_1^{-1} = h_3 \Rightarrow a = bh_3 \Rightarrow aH = bh_3H = bH$, т.е. если два класса пересекаются, то они совпадают.

Теорема 3.2 (теорема Лагранжа). Пусть H – подгруппа конечной группы $(G, \cdot)$. Тогда порядок группы H является делителем порядка группы G . ■

Следствие 3.1. Пусть $(G, \cdot)$ – группа порядка n .

(а) Порядок любого элемента в G является делителем n .

(б) $a^n = e$ для любого $a \in G$. ■

§ 4. Применения теории групп в теории чисел

Теорема 4.1 (теоремы Эйлера и Ферма). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого натурального числа a , взаимно простого с n , $\text{res}_n a^{\varphi(n)} = 1$. В частности, если p – простое и p не делит n , то $\text{res}_p a^{p-1} = 1$. ■

Теорема 4.2 (мультипликативность функции Эйлера). Для любых взаимно простых натуральных чисел n и m $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. ■

Следствие 4.1 (вычисление функции Эйлера).

(а) Если p – простое число, то $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

(б) Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ – каноническое разложение натурального числа n , то $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})$. ■

Теорема 4.3 (китайская теорема об остатках). Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} \text{res}_{n_1} x = a_1, \\ \text{res}_{n_2} x = a_2, \\ \vdots \\ \text{res}_{n_r} x = a_r \end{cases} \quad (4.1)$$

в которой $n_1, \dots, n_r$ – попарно взаимно простые натуральные числа, отличные от 1, $i = 1, \dots, r$, $a_1, \dots, a_r$ – произвольные натуральные числа, меньшие $n_1, \dots, n_r$

соответственно. Положим: $N = n_1 \cdot \dots \cdot n_r$, $N_i = \frac{N}{n_i}$, $m_i = \text{res}_{n_i}(N_i)$, $t_i = m_i^{-1}$ в

группе $\mathbb{Z}_{n_i}^*$, Тогда $x = \text{res}_N \sum_{i=1}^r a_i N_i t_i$ единственное натуральное решение системы (4.1), меньшее N . ■

Теорема 4.4 (линейные уравнения в мультипликативной группе по модулю n). Пусть дано линейное уравнение

$$\text{res}_n(ax) = b, \quad (4.2)$$

где $a, b \in \mathbb{N}$, $b < n$, $a < n$. Обозначим $d = |\text{НОД}(a, n)|$. Если b не делится на d , то уравнение (4.2) не имеет решений. Если $b \mid d$, то положим $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$, $n_1 = \frac{n}{d}$, a_1^{-1} – обратный для a_1 элемент в группе $\mathbb{Z}_{n_1}^*$, $c = a_1^{-1}b_1$ в $\mathbb{Z}_{n_1}^*$. И в этом случае уравнения (4.2) имеет точно d натуральных решений $x = c + n_1 t$, $t = 0, 1, \dots, d-1$, меньших n . ■

Пусть g и c – элементы мультипликативной группы $\mathbb{Z}_m^*$. Дискретным логарифмом $\text{ind}_g c$ элемента c по основанию g называется наименьшее неотрицательное целое число s , что $g^s = c$ в группе $\mathbb{Z}_m^*$. По определению $g^{\text{ind}_g c} = c$. Если группа $\mathbb{Z}_m^*$ циклическая, но g не является ее образующим, то дискретные логарифмы существуют не для всех $c \in \mathbb{Z}_m^*$. Если g является образующим элементом циклической группы $\mathbb{Z}_m^*$, то каждый элемент $c \in \mathbb{Z}_m^*$ является степенью g и потому число $\text{ind}_g c$ существует.

Из §1-3 следует, что если $m = p$ – простое число, то мультипликативная группа $\mathbb{Z}_p^* = \{1, \dots, p-1\}$ циклическая, причем она имеет ровно $\varphi(p-1)$ образующих элементов. Если g – один из них, то $\mathbb{Z}_p^* = \{g^0, g^1, \dots, g^{p-2}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$. Таким образом, каждому элементу c из $\{1, 2, \dots, p-1\}$ соответствует один и только один дискретный логарифм $\text{ind}_g c$ из множества целых чисел $\{0, 1, \dots, p-2\}$.

Для небольших значений p разработаны таблицы, позволяющие при некотором образующем элементе g определять дискретный логарифм $\text{ind}_g c$, и наоборот, по дискретному логарифму $\text{ind}_g c$ находить соответствующий элемент c .

Теорема 4.5 (решения нелинейного уравнения в мультипликативной группе по простому модулю). Пусть p – простое нечетное число, где $a, b \in \mathbb{N}$, $b < p$, $a < p$, g – образующий элемент мультипликативной группы $\mathbb{Z}_p^*$. Тогда x является натуральным решением уравнения

$$\text{res}_p(ax^n) = b, \quad (4.3)$$

меньшим числа p , если и только если $y = \text{ind}_g x$ – решение линейного уравнения

$$\text{res}_{p-1}(ny) = \text{res}_{p-1}(\text{ind}_g b - \text{ind}_g a) \quad (4.4)$$

в группе $\mathbb{Z}_{p-1}^*$. При этом различным решениям x уравнения (4.3), меньшим p , соответствуют различные решения $y = \text{ind}_g x$ уравнения (4.4) (Все дискретные логарифмы определяются в группе $\mathbb{Z}_p^*$.) ■

§ 5. Кольца и поля

Вспомним: Полем $(P, +, \cdot)$ называется непустое множество P с двумя бинарными операциями – сложением $+$ и умножением $\cdot$, обладающими следующими свойствами:

(а) P аддитивная абелева группа $(P, +)$ относительно сложения ;
 (б) $P \setminus \{0\}$ мультипликативная абелева группа $(P \setminus \{0\}, \cdot)$ относительно умножения.

(в) Операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения на множестве P : $a(b + c) = ab + ac$ для любых $a, b, c \in P$

Если (б) переформулировать так: P - мультипликативная полугруппа $(P, \cdot)$. То получим определение коммутативного кольца. Единичный элемент полугруппы $(P, \cdot)$, если он существует, называется единицей кольца и обозначается 1.

Как мы уже знаем, множество всех обратимых элементов P^* полугруппы $(P, \cdot)$ с единицей является группой, которая называется мультипликативной группой кольца P . Поэтому кольцо P – поле, если его мультипликативная группа R^* содержит все ненулевые элементы. Очевидно, кольцо, состоящее только из двух элементов – 0 и 1, будет полем.

Теорема 5.1 (*простейшие свойства кольца*). Пусть дано кольцо $(R, +, \cdot)$. Тогда: (а) $c(b - a) = cb - ca$, $(b - a)c = bc - ac$ для любых $a, b, c \in R$.

(б) $a0 = 0a = 0$ для любого $a \in R$.

(в) $a(-b) = (-a)b = -ab$ для любых $a, b \in R$. ■

Теорема 5.2. Кольцо $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ является полем, если и только если n – простое число. ■

Определение. Пусть даны кольца $(R, +, \cdot)$ и $(S, +, \cdot)$. Изоморфизмом φ из R в S называется биективное отображение $\varphi: R \rightarrow S$ такое, что $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любых $a, b \in R$.

Очевидно, если R и S – поля, то их изоморфизм φ является изоморфизмом аддитивных групп $(R, +)$ и $(S, +)$ и мультипликативных групп R^* и S^* ; если R и S – кольца, то их изоморфизм φ является изоморфизмом аддитивных групп $(R, +)$ и $(S, +)$ и мультипликативных полугрупп $(R, \cdot)$ и $(S, \cdot)$.

Теорема 5.3 (*критерий подполя*). Непустое подмножество S элементов поля $(F, +, \cdot)$ является подполем поля F , если и только если $b - a \in S$ для любых $a, b \in S$ и $a^{-1}b \in S$ для любых ненулевых $a, b \in S$. ■

7. Многочлены

§ 1. Делимость в кольце многочленов над произвольным полем

Пусть F – произвольное поле. Многочленом $f(x)$ степени n (от одной переменной x) над полем F называется выражение вида $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – элементы поля F , называемые коэффициентами многочлена $f(x)$, коэффициент a_n называется старшим и он отличен от нуля 0 поля F . Элемент 0 считается нулевым многочленом, степень которого не определена. Если коэффициент $a_i = 1$ при $i > 0$, то вместо $1x^i$ будем писать x^i . Если $a_i = 0$, то одночлен $a_i x^i$ опускается. Если $a_n = 1$, то $f(x)$ называется нормированным многочленом.

Два многочлена считаются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях x . Знак $=$ между многочленами будет пониматься именно в этом алгебраическом смысле. В частности, никакой многочлен, хотя бы один коэффициент которого отличен от 0 , не может нулевым.

Введем две операции над многочленами: сложение $+$ и умножение $\cdot$. Рассмотрим многочлен $g(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0$ степени k , где $k \leq n$. Суммой $f(x) + g(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен степени n , коэффициенты которого получаются сложением коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стоящих при одинаковых степенях переменной x , причем в случае $k < n$ коэффициенты $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n$ считаются равными 0 .

Произведением $f(x) \cdot g(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен $c_{n+k} x^{n+k} + c_{n+k-1} x^{n+k-1} + \dots + c_1 x^1 + c_0$ степени $n+k$ коэффициенты которого определяются по формулам $c_i = \sum_{s+l=i} a_s b_l$, $i = 0, 1, \dots, n+k$. В частности, $c_0 = a_0 \cdot b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_{n+k} = a_n b_k$. Знак $\cdot$ умножения многочленов будем опускать.

Относительно введенных операций множество всех многочленов является коммутативным кольцом с единицей и обозначается $F[x]$.

Теорема 1.1 (о делении многочленов с остатком). Для любых $f(x), g(x)$, где $g(x) \neq 0$, существуют, и притом единственные, многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad (1.1)$$

причем в случае $r(x) \neq 0$ степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$.

Представление многочлена $f(x)$ в виде (1.1) называется делением $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком, при этом $q(x)$ и $r(x)$ называются соответственно частным и остатком. Если $r(x) = 0$, то говорят, что $f(x)$ делится на $g(x)$ и $g(x)$ является делителем $f(x)$; этому будет соответствовать запись $f(x) \mid g(x)$.

Следствие 1.2 (основные свойства делимости). Пусть даны ненулевые многочлены $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Тогда:

$$(a) \quad f(x) \mid h(x), \quad g(x) \mid h(x) \Rightarrow (f(x) \pm g(x)) \mid h(x).$$

$$(б) \quad \text{в представлении (1.1)} \quad f(x) \mid h(x), \quad g(x) \mid h(x) \Leftrightarrow g(x) \mid h(x), \quad r(x) \mid h(x).$$

$$(в) \quad \text{если } f(x), \quad g(x) \text{ нормированные, то } f(x) \mid g(x), \quad g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

(г) всякий многочлен делится на любой многочлен нулевой степени.

(д) если $f(x) \mid h(x)$, то $f(x) \mid ch(x)$ для любого отличного от 0 элемента $c \in F$.

(е) всякий делитель одного из двух многочленов $f(x)$, $cf(x)$ ($c \in F$, $c \neq 0$) является делителем другого. ■

Наибольшим общим делителем $\text{НОД}(f(x), g(x))$ двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, по крайней мере один из которых ненулевой, называется нормированный многочлен $d(x)$, являющийся их общим делителем, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов.

Следующий алгоритм последовательного деления с остатком – алгоритм Евклида – позволяет найти $d(x) = \text{НОД}(f(x), g(x))$. Пусть при деления $f(x)$ на $g(x)$ получается остаток $r_1(x)$. Если $r_1(x) = 0$, то $d(x) = g(x)$. В противном случае разделим $g(x)$ на $r_1(x)$ с остатком $r_2(x)$. Если $r_2(x) = 0$, то $d(x) = r_1(x)$. В противном случае разделим $r_1(x)$ на $r_2(x)$ с остатком $r_3(x)$ и т.д. Так как степени остатков с каждым шагом убывают, то через конечное число шагов при делении $r_{k-1}(x)$ на $r_k(x)$ получится нулевой остаток:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)q_1 + r_1(x) \\ g(x) &= r_1(x)q_2 + r_2(x) \\ r_1(x) &= r_2(x)q_3 + r_3(x) \\ &\vdots \\ r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)q_k + r_k(x) \\ r_{k-1}(x) &= r_k(x)q_{k+1} + 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Теорема 1.2 (об алгоритме Евклида) $\text{НОД}(f(x), g(x))$ равен многочлену, полученному из $r_k(x)$, делением всех коэффициентов на старший коэффициент (приведение многочлена к $r_k(x)$ нормированному виду). ■

Следствие 1.2 (о линейном представлении НОД). Пусть $d(x) = \text{НОД}(f(x), g(x))$. Тогда существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$, причем если степени многочленов $g(x)$ и $f(x)$ отличны от нуля, то степень $u(x)$ меньше степени $g(x)$, а степень $v(x)$ меньше степени $f(x)$. ■

Два ненулевых многочлена называются взаимно простыми, если их НОД равен 1.

Следствие 1.3 (*критерий взаимной простоты*). Многочлены $g(x)$ и $f(x)$ взаимно просты, если и только если существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $1 = f(x)u(x) + g(x)v(x)$. ■

Следствие 1.4 (*основные свойства взаимно простых многочленов*). Пусть даны ненулевые многочлены $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Тогда:

(а) Если $f(x)$ взаимно прост с каждым из многочленов $g(x)$, $h(x)$, то $f(x)$ взаимно просто с их произведением.

(б) Если $(f(x)g(x)) \mid h(x)$, $f(x)$ и $h(x)$ взаимно просты, то $g(x) \mid h(x)$.

(в) Если $f(x) \mid g(x)$, $f(x) \mid h(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ взаимно просты, то $f(x) \mid (g(x)h(x))$. ■

Значением многочлена $f(x)$ при $x = \alpha$ называется элемент $f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha^1 + a_0$ поля F , полученный подстановкой вместо x элемента $\alpha \in F$ с последующим выполнением всех указанных операций сложения и умножения в поле F . Элемент $\alpha \in F$ называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(\alpha) = 0$.

Следствие 1.5. Элемент $\alpha \in F$ является корнем многочлена $f(x)$, если и только если $f(x)$ делится на $x - \alpha$. ■

Пусть $f(x)$ – произвольный нормированный многочлен отличный от 1. Если $f(x)$ делится только на 1 и на самого себя, то он называется простым (или неприводимым) в кольце $F[x]$. В противном случае он называется приводимым. Другими словами, $f(x)$ простой, если и только если он имеет хотя бы один делитель степени большей 0, но меньшей n . Многочлен 1 исключается из этого определение подобно тому, как число 1 исключалось из определения простого и составного числа.

Следствие 1.6 (*элементарные свойства простых многочленов*).

(а) Если $p(x)$ – простой многочлен, то произвольный многочлен $f(x)$ либо делится на $p(x)$, либо взаимно прост с ним. В частности, неравные простые многочлены взаимно просты.

(б) Если произведение $f(x)g(x)$ делится на простой многочлен $p(x)$, то хотя бы один из сомножителей $f(x)$, $g(x)$ делится на $p(x)$.

Определение. Каноническим разложением многочлена $f(x)$ ненулевой степени называется представление его в виде

$$f(x) = a_n p_1(x)^{k_1} p_2(x)^{k_2} \dots p_l(x)^{k_l}, \quad (1.3)$$

где $p_1(x), \dots, p_l(x)$ – попарно различные простые многочлены, показатели $k_1, \dots, k_l$ – натуральные числа, называемые кратностями соответствующих многочленов $p_1(x), \dots, p_l(x)$, a_n – старший коэффициент многочлена $f(x)$. Многочлен $p_i(x)$ называется k_i -кратным простым делителем многочлена $f(x)$, $i = 1, \dots, l$.

Теорема 1.3 (основная теорема делимости многочлена). Каждый многочлен $f(x)$ ненулевой степени имеет каноническое разложение, и это разложение единственное с точностью до порядка сомножителей. ■

Следствие 1.7. Пусть поле $\bar{F}$ является расширением поля F , $a(x), b(x) \in F[x]$.

(а) НОД многочленов $a(x)$ и $b(x)$ в кольце $F[x]$ будет таким же как и НОД этих многочленов в кольце $\bar{F}[x]$. В частности, если $a(x)$ является делителем $b(x)$ в кольце $F[x]$, то это же свойство сохраняется и в кольце $\bar{F}[x]$.

(б) Если $a(x)$ и $b(x)$ являются различными простыми многочленами в кольце $F[x]$, то в кольце $\bar{F}[x]$ $a(x)$ и $b(x)$ взаимно просты. ■

Теорема 1.4 (о числе корней многочлена).

(а) Любой ненулевой многочлен $f(x)$ степени n может иметь не более n корней, если даже каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

(б) Если значения многочленов $g(x)$ и $f(x)$, степени которых не превосходят n , равны более чем при n различных значениях $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ переменной x и $m > n$, то $f(x) = g(x)$. ■

§ 2. Кольцо многочленов по модулю $m(x)$

Пусть $m(x)$ - многочлен ненулевой степени над полем F . Будем называть остаток от деления многочлена $a(x) \in F[x]$ на многочлен $m(x)$ остатком $a(x)$ по модулю $m(x)$, обозначая его через $\text{res}_{m(x)} a(x)$. Множество остатков по модулю $m(x)$ обозначим через $F[x]_{m(x)}$. Определим на множестве $F[x]_{m(x)}$ операции сложения и умножения по модулю $m(x)$, которые временно будем обозначать $+_{m(x)}$ и $\cdot_{m(x)}$: $a(x) +_{m(x)} b(x) = \text{res}_{m(x)}(a(x) + b(x))$, $a(x) \cdot_{m(x)} b(x) = \text{res}_{m(x)}(a(x)b(x))$. Эти операции коммутативные и ассоциативные.

Итак, нетрудно заметить, что множество $F[x]_{m(x)}$ относительно введенных выше операций сложения и умножения по модулю $m(x)$ является кольцом. Очевидно также, что подмножество в $F[x]_{m(x)}$ всех многочленов нулевой степени совпадает с полем F . Этот факт дает право считать $\bar{F} = F[x]_{m(x)}$ расширением поля F в случае, когда $F[x]_{m(x)}$ — само является полем.

Теорема 2.1 (о мультипликативной группе кольца $F[x]_{m(x)}$). Пусть степень многочлена $m(x)$ равна n . Тогда мультипликативная группа $F[x]_{m(x)}^*$ состоит из всех тех многочленов кольца $F[x]$, которые взаимно просты с $m(x)$ и степень которых меньше n . ■

Теорема 2.2 (о поле многочленов по модулю $m(x)$). Пусть $m(x)$ — нормированный многочлен. Тогда кольцо $F[x]_{m(x)}$ является полем

(называемым полем многочленов по модулю $m(x)$), если и только если $m(x)$ – простой многочлен в кольце $F[x]$. ■

Теорема 2.3 (о существовании корня). Пусть $m(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0$ – простой многочлен кольца $F[x]$, $\bar{F} = F[x]_{m(x)}$. Тогда многочлен $m(x)$ в кольце $\bar{F}[x]$ имеет корень, и им будет элемент $\alpha = \text{res}_{m(x)} x \in \bar{F}$. ■

Пример. Если $m(x) = x + c$, то поле $\bar{F} = F[x]_{x+c}$ совпадает с полем F , т.е. «расширения» здесь не происходит. Очевидно, $m(x)$ имеет корень $-c \in F$. Это вполне согласуется с теоремой 2.3, поскольку $\alpha = \text{res}_{m(x)}(x) = \text{res}_{x+c}(x) = -c$.

Следствие 2.1 (о существовании корня). Если многочлен $f(x) \in F[x]$ ненулевой степени не имеет корней в поле F , то существует расширение $\bar{F}$ этого поля, в котором $f(x)$ будет иметь хотя бы один корень. ■

Пусть $f(x) \in F[x]$ – многочлен ненулевой степени n . Минимальное расширение $\bar{F}$ поля F , в котором $f(x)$ имеет ровно n корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность, называется полем разложения многочлена $f(x)$.

Следствие 2.2 (поле разложения). Произвольный многочлен $f(x) \in F[x]$ ненулевой степени n обладает полем разложения $\bar{F}$. ■

Следствие 2.3 (теорема Виета). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – все n корней (не обязательно различных) многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0 \in F[x]$ из кольца в его поле разложения $\bar{F}$. Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n), \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ \frac{a_{n-3}}{a_n} &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n), \\ &\vdots \\ \frac{a_1}{a_n} &= (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\alpha_n + \dots + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n), \\ \frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n, \end{aligned}$$

где в k -м равенстве ($k = 1, \dots, n$) стоит сумма всевозможных произведений по k корней, взятая со знаком плюс или минус в зависимости от четности или нечетности k . ■

Следствие 2.4 (структура поля многочленов по модулю $m(x)$). Пусть $m(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ – простой многочлен кольца $F[x]$, $\bar{F} = F[x]_{m(x)}$, $t = x$. Тогда $\bar{F} = \{b_0 + b_1t^1 + \dots + b_{n-1}t^{n-1} \mid b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in F\}$, где элемент

t удовлетворяет соотношению $a_0 + a_1 t^1 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n = 0$, (не забываем, что сложение и умножение в поле $\bar{F}$ осуществляется, как сложение и умножение по модулю $m(t)$ многочленов от переменной t). Кроме того, каждый элемент поля $\bar{F}$ однозначно представляется в виде $b_0 + b_1 t^1 + \dots + b_{n-1} t^{n-1}$. ■

Следствие 2.5 (размерность расширения). Поле $\bar{F} = F[x]_{m(x)}$ является линейным пространством размерности n над полем F , т.е. $F[x]_{m(x)} : F = n$.

Пример. Поскольку многочлен $m(x) = x^2 + 1$ является простым в кольце $\mathbb{Z}_3[x]$, то поле $\bar{F} = \mathbb{Z}_3[x]_{x^2+1}$ имеет вид:

$$\bar{F} = \{a + bt \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\} = \{0, 1, 2, t, 1+t, 2+t, 2t, 1+2t, 2+2t\}, \text{ причем } t^2 + 1 = 0.$$

Следствие 2.6 (единственность поля комплексных чисел). Пусть $m(x) = x^2 + 1$ — многочлен кольца $\mathbb{R}[x]$. Тогда поля $\mathbb{R}[x]_{x^2+1}$ и $\mathbb{C}$ изоморфны. ■

Следствие 2.6 гарантирует, что операции сложения и умножения по модулю $m(x) = x^2 + 1$ в поле $\mathbb{R}[x]_{x^2+1}$ идентичны операциям сложения и умножения комплексных чисел. Что касается сложения, то эта идентичность очевидна, поскольку $(a + bi) +_{m(i)} (c + di) = (a + c) + (b + d)i$. Проверим умножение: в поле $\mathbb{R}[x]_{x^2+1}$

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot_{m(i)} (c + di) &= \text{res}_{m(i)}(ac + adi + bci + bdi^2) = \\ &= \text{res}_{m(i)}((ac - bd) + (ad + bc)i + bd(i^2 + 1)) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \end{aligned}$$

что вполне согласуется с операцией умножения комплексных чисел.

Наименьшее расширение поля F , содержащее корень ε простого многочлена $m(x)$ из кольца $F[x]$, обозначается $F(\varepsilon)$. Например, для $m(x) = x^2 + 1$ из кольца $\mathbb{R}[x]$ $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ — наименьшее расширение поля $\mathbb{R}$, содержащее корень i этого многочлена, причем оно изоморфно полю $\mathbb{R}[x]_{x^2+1}$. Оказывается, этот изоморфизм не случаен.

Следствие 2.7 (о минимальности поля многочленов по модулю $m(x)$). Пусть $m(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$ — простой многочлен кольца $F[x]$, ε — произвольный корень этого многочлена. Тогда $F(\varepsilon) = \{a_0 + a_1 \varepsilon^1 + \dots + a_{n-1} \varepsilon^{n-1} \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in F\}$, и отображение $\varphi : F[x]_{m(x)} \rightarrow F(\varepsilon)$, при котором $\varphi(a_0 + a_1 t^1 + \dots + a_{n-1} t^{n-1}) = a_0 + a_1 \varepsilon^1 + \dots + a_{n-1} \varepsilon^{n-1}$, является изоморфизмом полей $F[x]_{m(x)}$ и $F(\varepsilon)$. ■

§ 3. Фундаментальная теорема алгебры

Многочленом $f(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных $x_1, \dots, x_n$ над полем F называется выражение вида $f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} + \dots + a_r x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$, где $a_1, \dots, a_r$ — элементы поля F , называемые коэффициентами при одночленах $a_1 x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \dots$,

$a_r x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$ показатели в степенях переменных – целые неотрицательные числа (при нулевом показателе соответствующую степень можно опускать). По аналогии с многочленами от одной переменной естественным путем определяются операции сложения и умножения n переменных. Степенью одночлена $a_1 x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ называется упорядоченный набор $(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Степенью многочлена от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется лексикографически наибольшая из степеней его одночленов. Одночлен многочлена, степень которого является степенью многочлена, называется старшим одночленом. Нетрудно убедиться, что старший одночлен произведения многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ равен произведению старших одночленов сомножителей.

Среди многочленов от n переменных симметрическими являются те, которые не меняются ни при какой перестановке переменных. А так как любая перестановка распадается в произведение простейших перестановок пар переменных (называемых транспозициями), то при доказательстве симметричности достаточно проверить неизменность многочлена ни при какой транспозиции двух переменных. Заметим, что степень любого симметрического многочлена имеет вид $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, где $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$. Очевидно, сумма и произведение симметрических многочленов есть симметрический многочлен. Поэтому если $f(y_1, \dots, y_n)$, $g(x_1, \dots, x_n)$, ..., $g(x_1, \dots, x_n)$ – симметрические многочлены, то их суперпозиция $f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n))$ также симметрический многочлен от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Следующие n симметрических многочленов от n переменных называются элементарными:

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ s_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ s_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n, \quad \dots, \\ s_{n-1} &= x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 x_3 \dots x_n, \quad s_n = x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \end{aligned}$$

Очевидно, степень многочлена s_i равна $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, где число 1 равно i .

Теорема 3.1 (о симметрических многочленах). Всякий симметрический многочлен с коэффициентами из поля F является многочленом от элементарных симметрических многочленов с коэффициентами из поля F . ■

Лемма 3.1 (о существовании корня многочлена нечетной степени). Любой многочлен нечетной степени $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ из кольца $\mathbb{R}[x]$ имеет хотя бы один действительный корень. ■

Теорема 3.2 (фундаментальная теорема алгебры I) Всякий многочлен из кольца $\mathbb{R}[x]$ имеет хотя бы один комплексный корень. ■

Теорема 3.3 (фундаментальная теорема алгебры II) Всякий многочлен из кольца $\mathbb{C}[x]$ имеет хотя бы один комплексный корень. ■

§ 4. Применение алгебры к классическим задачам геометрии

Правила построения с помощью циркуля и линейки. Пусть на плоскости имеется множество точек F . F -линией назовем или прямую, проходящую через две произвольные точки из F , или окружность с центром в произвольной точке из F и радиусом, равным длине произвольного отрезка с концами из F . Скажем, что точка $t = (a, b) = a + bi$ построима из F , если она является пересечением двух F -линий.

В качестве базы для построения берутся две точки $(0;0)$ и $(0;1)$, которые называются построимыми. Любая другая точка также называется построимой (с помощью циркуля и линейки), если она построима из множества точек, построимость которых уже доказана. Таким образом, многократное повторение следующих трех действий позволяет строить новые точки из уже построенных:

- 1) проведение прямой через любые две ранее построенные точки;
- 2) проведение окружности с центром в одной из ранее построенных точек, проходящую через другую уже построенную точку;
- 3) получение точек пересечения двух прямых, прямой и окружности или двух окружностей, получены в результате действий предыдущих действий.

Построение циркулем и линейкой – любая конечная последовательность действий 1, 2 и 3. Прямые, окружности и точки, которые могут быть получены в результате таких построений, а также соответствующими этим точкам числа, называются построимыми.

Утверждение 4.1. Любое целое число построимо.

Утверждение 4.2. Число $a + bi$ построимо, если и только если a и b построимы.

Утверждение 4.3. Если построимы комплексные числа α и β , то построимы и числа $\alpha \pm \beta$.

Утверждение 4.4. Если положительное действительное число a построимо, то построим и арифметический корень второй степени из этого числа.

Утверждение 4.5 Пусть построимы прямые l_1 и l_2 , образующие угол с построимой вершиной A . Тогда построима и биссектриса этого угла.

Утверждение 4.6. Если построимы коэффициенты квадратного уравнения, то построимы и его корни.

Утверждение 4.7. Если построимы все числа поля $F \subset \mathbb{C}$ и корень ε простого многочлена $m(x)$ из кольца $F[x]$, то построимы и все числа поля $F(\varepsilon)$.

Теорема 4.1 (о расширении поля построимых точек). Пусть дано поле F построимых точек, координаты которых также принадлежат F , $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{C}$. Если некоторая точка $t = (a, b) = a + bi$ является построимой из F , то существует такое расширение $\bar{F} \supset F$ построимых точек, что $t \in \bar{F}$, координаты всех точек из $\bar{F}$ принадлежат $\bar{F}$ и $\bar{F} : F \in \{1, 2, 4\}$ ■

Следствие 4.1 (о существовании расширения степени 2^n). Если число t построимо, то существует такое расширение $\bar{F} \supset \mathbb{Q}$, содержащее t , что $\bar{F} : \mathbb{Q} = 2^n$ для некоторого целого неотрицательного числа n . ■

Следствие 4.2 (о степени простого многочлена с построенным корнем). Если число t построимо, $m(x)$ - простой многочлен степени k из $\mathbb{Q}[x]$, корнем которого является, то $k = 2^l$ для некоторого натурального числа l . ■

Теорема 4.2 (о неразрешимости классических задач на построение). С помощью циркуля и линейки невозможно решить следующие задачи:

- (а) трисекция произвольного угла (т.е. разбить угол на три равные части);
- (б) удвоение единичный куб (т.е. построение ребро куба, объем которого равен двум;
- (в) построение правильный n -угольник при $n \in \{7, 9, 11, 13\}$.
- (г) квадратура круга (т.е. построение стороны квадрата, площадь которого равна площади круга единичного радиуса). ■

§ 5. Многочлены над полями комплексных и действительных чисел

Теорема 5.1 (описание простых многочленов кольца $\mathbb{C}[x]$). В кольце $\mathbb{C}[x]$ простыми являются только все многочлены степени 1. ■

Следствие 5.1 (о каноническом разложении в кольце $\mathbb{C}[x]$). Каноническое разложение произвольного многочлена $f(x)$ степени n имеет вид

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l} \quad (5.1)$$

где $k_1, \dots, k_l$ - натуральные числа, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ различные комплексные числа - корни многочлена $f(z)$, $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$. ■

Следствие 5.2 (о числе корней многочленов в кольце $\mathbb{C}[x]$). Любой многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ненулевой степени n имеет ровно n комплексных корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность. ■

Теорема 5.2 (описание простых многочленов кольца $\mathbb{R}[x]$). В кольце $\mathbb{R}[x]$ простыми являются только все многочлены 1-й степени и все те многочлены 2-й степени, чьи дискриминанты меньше нуля. ■

Следствие 5.3 (о каноническом разложении в кольце $\mathbb{R}[x]$). Каноническое разложение произвольного многочлена степени n в кольце $\mathbb{R}[x]$ имеет вид

$$f(x) = a_n (x - r_1)^{k_1} \dots (x - r_l)^{k_l} (x^2 - p_1 x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 - p_s x + q_s)^{m_s}, \quad (5.2)$$

где $k_1, \dots, k_l, m_1, \dots, m_s$ - натуральные числа, $r_1, \dots, r_l$ - различные действительные числа, $x^2 - p_1 x + q_1, \dots, x^2 - p_s x + q_s$ - различные квадратные

трехчлены с отрицательными дискриминантами,
 $k_1 + \dots + k_l + 2m_1 + \dots + 2m_s = n$. ■

Следствие 5.4. Если степень n многочлена (5.2) нечетная, то он имеет по крайней мере один действительный корень. ■

§ 6. Многочлены над полем рациональных чисел

Обозначим через $\mathbb{Z}[x]$ подмножество всех многочленов из кольца $\mathbb{Q}[x]$, все коэффициенты которых целочисленные.

Скажем, что многочлен ненулевой степени $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ приводим над кольцом $\mathbb{Z}$, если его можно представить в виде произведения двух многочленов ненулевой степени из $\mathbb{Z}[x]$; в противном случае $f(x)$ будем называть неприводимым над кольцом $\mathbb{Z}$.

Неприводимость многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ над кольцом $\mathbb{Z}$, равносильна неприводимости $f(x)$ над полем $\mathbb{Q}$.

Теорема 6.1 (достаточный признак неприводимости над полем $\mathbb{Q}$). Пусть дан многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ ненулевой степени n из $\mathbb{Z}[x]$. Предположим, что существует такое простое число p , что a_n не делится на p , $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ делятся на p , но a_0 не делится на p^2 . Тогда $f(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$. ■

Следствие 6.1. (о неприводимости многочленов $\Phi_p(x)$). Если p – простое число, то многочлен $\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$ простой в кольце $\mathbb{Q}[x]$. ■

Теорема 6.2 (1-й необходимый признак наличия корня). Если $\alpha = \frac{k}{l}$ – рациональный корень многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, где $\frac{k}{l}$ – несократимая дробь, то старший коэффициент $f(x)$ делится на l и свободный член $f(x)$ делится на k . ■

Таким образом, если многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ с целыми коэффициентами обладает рациональным корнем, то для его поиска необходимо перебрать все такие несократимые дроби $\frac{k}{l}$, что k – делитель a_0 , а l – делитель a_n . При этом, проверяя число $\frac{k}{l}$ по методу Горнера, вычисления можно прекращать сразу, как только начнут появляться нецелые числа – коэффициенты частного.

Теорема 6.3 (2-й необходимый признак). Если $\alpha = \frac{k}{l}$ – рациональный корень многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\frac{k}{l}$ – несократимая дробь, то числа $\frac{f(1)}{l-k}, \frac{f(-1)}{l+k}$ целые. ■

Практический раздел

1. Линейная алгебра

Теория определителей и систем линейных уравнений является частью линейной алгебры – математической дисциплины, имеющей широкое применение в решении и исследовании многих теоретических и практических вопросов. Определители и системы линейных уравнений широко используются в аналитической геометрии и векторной алгебре.

Обучающие задачи

Вычисление определителей

Задача 1. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение

Воспользуемся правилом Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot (-4) + (-5) \cdot 2 \cdot 1 - (-5) \cdot 0 \cdot (-4) - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = \\ = 0 + 12 - 10 - 0 + 4 - 18 = -12.$$

Ответ: -12.

Задача 2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение

Шаг 1. Выбираем разрешающий элемент $a_{11} = 5$, который символически будем обозначать заключенным в рамку. Строку, содержащую разрешающий элемент, будем называть разрешающей, а столбец — разрешающим. Элементы разрешающей строки переписываем без изменения; элементы разрешающего столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, заменяем нулями. Все другие элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\begin{array}{cccc} \boxed{a_{ks}} & \cdots & a_{kj} & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{is} & \cdots & a_{ij} & \end{array} \quad a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{ks} - a_{kj}a_{is}}{a_{ks}}.$$

Так как каждая строка, кроме разрешающей, будет содержать обратную величину разрешающего элемента, то этот множитель можно вынести за знак определителя. Получим:

$$\begin{vmatrix} \boxed{5} & 6 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^3} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & \boxed{-23} & -31 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -16 & -27 & 26 \end{vmatrix} = \otimes^1)$$

¹⁾ $\otimes$ – знак окончания (начала) преобразований (вычислений).

Шаг 2. Выбираем разрешающий элемент $a'_{22} = -23$. Первую и вторую строки переписываем без изменения. Элементы разрешающего столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, заменяем нулями. Все другие элементы вычисляем по правилу прямоугольника, вынося общие множители третьей и четвертой строк за знак определителя:

$$\otimes = \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{(-23)^2} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & -23 & -31 & 3 \\ 0 & 0 & -15 & 135 \\ 0 & 0 & 125 & -550 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{(-23)^2} \cdot (-15) \cdot 25 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & -23 & -31 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -22 \end{vmatrix} = \otimes.$$

Шаг 3. Умножаем третью строку на 5 и вычитаем из четвертой строки. Получим определитель верхнетреугольного вида, который равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\otimes = \frac{-3}{23^2} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & -23 & -31 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} = \frac{-3}{23^2} \cdot 5 \cdot (-23) \cdot 1 \cdot 23 = 15.$$

Ответ: 15.

Задача 3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}.$$

Решение

Шаг 1. Умножим 1-ю строку на 4, 2-ю – на 2, 3-ю – на 6, 4-ю – на 10. Исходный определитель будет равен

$$\frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10} \begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 & -20 \\ 2 & -4 & 3 & 16 \\ 5 & -8 & 8 & 28 \\ 4 & -8 & 5 & 24 \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Разделим 2-й столбец на 4, 4-й столбец – на 4. Тогда исходный определитель

$$\text{равен } \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 8 & 7 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Шаг 3. К 1-й строке прибавим вторую, умноженную на 2, к 3-й строке прибавим вторую, умноженную на –2, к 4-й строке прибавим вторую, умноженную на –2. Исходный определитель не изменится и будет равен

$$\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Шаг 4. Разложим этот определитель по второму столбцу:

$$\frac{1}{30} \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Шаг 5. К 1-й строке прибавим 2-ю, умноженную на -7 и разложим затем определитель по 1-му столбцу:

$$-\frac{1}{30} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{30} ((-10) \cdot (-2) - (-1) \cdot 10) = 1.$$

Ответ: 1.

Операции над матрицами

Задача 4. Найти матрицы X и X^T , где $X = 3(AB) + 2C$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение

Поскольку размеры матриц A и B равны 3×3 и 3×2 , соответственно, размер матрицы AB равен 3×2 . Пусть

$AB = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix}$. Элемент d_{11} равен скалярному произведению 1-й строки матрицы A на 1-й столбец

матрицы B , т. е. $d_{11} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = -1$; элемент d_{12} равен скалярному произведению 1-й строки матрицы A на 2-й столбец матрицы B , т. е. $d_{12} = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 1$. Аналогично находим остальные элементы матрицы AB :

$$d_{21} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = -1, \quad d_{22} = 0 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 0 = 1,$$

$$d_{31} = (-1) \times 1 + 1 \times 1 + (-2) \times (-1) = 2, \quad d_{32} = (-1) \times 2 + 1 \times 1 + (-2) \times 0 = -1.$$

$$\text{Итак, } AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Умножим все элементы матрицы } AB \text{ на 3: } 3(AB) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}. \text{ Далее: } 2C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Складывая элементы матрицы $3(AB)$ с соответствующими элементами матрицы $2C$, найдем матрицу X :

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-2 & 3-2 \\ -3-4 & 3-4 \\ 6+2 & -3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -7 & -1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Меняя строки и столбцы местами, найдем транспонированную матрицу X^T :

$$X^T = \begin{bmatrix} -5 & -7 & 8 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Задача 5. Предприятие производит продукцию трёх видов P_1, P_2, P_3 и использует сырьё трёх типов S_1, S_2, S_3 . Нормы затрат сырья (по строкам) на единицу продукции каждого вида (по столбцам) заданы матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Стоимость единицы сырья каждого типа S_1, S_2, S_3 задана матрицей $B = (25 \ 20 \ 10)$. Каковы общие затраты предприятия на производство 200, 300 и 350 единиц продукции вида P_1, P_2, P_3 соответственно?

Решение

Шаг 1. Определим стоимость сырья для производства единицы продукции каждого вида, умножив матрицу-строку стоимости единицы сырья B на матрицу норм затрат сырья A :

$$\begin{aligned} C = B \cdot A &= \begin{bmatrix} 25 & 20 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= (25 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 1 \quad 25 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 5 \quad 25 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 6) = \\ &= (125 \quad 180 \quad 265). \end{aligned}$$

Шаг 2. Составим матрицу объёмов производства продукции $Q = (200 \quad 300 \quad 350)^T$.

Шаг 3. Определим общие затраты предприятия, умножив матрицу C на матрицу Q :

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} 125 & 180 & 265 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 350 \end{bmatrix} = 125 \cdot 200 + 180 \cdot 300 + 265 \cdot 350 = \\ &= 25000 + 54000 + 92750 = 171750. \end{aligned}$$

Ответ: 171750.

Задача 6. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1} .

Решение

Шаг 1. Вычисляем определитель матрицы A :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot (-3) - 3 \cdot (-2) \cdot (-1) = \\ &= -27 - 8 - 10 - 24 + 15 - 6 = -60. \end{aligned}$$

Шаг 2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} заданной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 + 8) = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 12 = -17; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 + 2) = 1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 4) = 7;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - 10) = 16;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4.$$

Шаг 3. Составляем присоединенную матрицу C , записав алгебраические дополнения элементов строк в столбцы:

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 1 & -8 \\ 7 & -17 & 16 \\ -17 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Шаг 4. Находим обратную матрицу A^{-1} , умножив элементы присоединенной матрицы C на обратную

величину определителя:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C = -\frac{1}{60} \begin{bmatrix} -11 & 1 & -8 \\ 7 & -17 & 16 \\ -17 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} & \frac{2}{15} \\ -\frac{7}{60} & \frac{17}{60} & -\frac{4}{15} \\ \frac{17}{60} & -\frac{7}{60} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}.$$

Шаг 5. Выполним проверку правильности вычисления обратной матрицы, т.е. вычислим произведение $A^{-1} \cdot A$ или $A \cdot A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} & \frac{2}{15} \\ -\frac{7}{60} & \frac{17}{60} & -\frac{4}{15} \\ \frac{17}{60} & -\frac{7}{60} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{60} \cdot 3 - \frac{1}{60} \cdot 5 + \frac{2}{15} \cdot 4 & \frac{11}{60} \cdot 1 - \frac{1}{60} \cdot 3 + \frac{2}{15} \cdot (-1) & \frac{11}{60} \cdot 2 - \frac{1}{60} \cdot (-2) + \frac{2}{15} \cdot (-3) \\ -\frac{7}{60} \cdot 3 + \frac{17}{60} \cdot 5 - \frac{4}{15} \cdot 4 & -\frac{7}{60} \cdot 1 + \frac{17}{60} \cdot 3 - \frac{4}{15} \cdot (-1) & \frac{7}{60} \cdot 2 + \frac{17}{60} \cdot (-2) - \frac{4}{15} \cdot (-3) \\ \frac{17}{60} \cdot 3 - \frac{7}{60} \cdot 5 - \frac{1}{15} \cdot 4 & \frac{17}{60} \cdot 1 - \frac{7}{60} \cdot 3 - \frac{1}{15} \cdot (-1) & \frac{17}{60} \cdot 2 - \frac{7}{60} \cdot (-2) - \frac{1}{15} \cdot (-3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\begin{bmatrix} \frac{11}{60} & -\frac{1}{60} & \frac{2}{15} \\ -\frac{7}{60} & \frac{17}{60} & -\frac{4}{15} \\ \frac{17}{60} & -\frac{7}{60} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}.$

Задача 7. Пусть задана табл. 1 «Затраты — выпуск»

Таблица 1. Затраты — выпуск

Производственный сектор	Потребляющий сектор			государственный сектор (конечный спрос) Y	Всего X
	сельское хозяйство	промышленность	трудовые ресурсы		
Сельское хозяйство (т)	8	6	4	12	30
Промышленность (машин)	10	2	4	24	40
Трудовые ресурсы	6	4	4	46	60

Требуется определить, каковы должны быть трудовые ресурсы и уровни выпусков продукции в каждом производственном секторе, если предполагается потребить 50 тыс. тонн продукции сельского хозяйства, 70 тыс. машин и нанять 60 тыс. работников в следующем периоде.

Решение

Шаг 1. Определяем элементы матрицы A коэффициентов прямых материальных затрат, которые характеризуют количество продукта i , используемое при производстве единицы продукции j . Для этого воспользуемся предположением о пропорциональной зависимости между затратами и объёмами

производства $x_{ij} = a_{ij}x_j$. Тогда $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$:

$$a_{11} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}; \quad a_{21} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad a_{31} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}; \quad a_{12} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}; \quad a_{22} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}; \quad a_{32} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}; \quad a_{13} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15};$$

$$a_{23} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}; \quad a_{33} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}.$$

Составляем матрицу A :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{3}{20} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{20} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Проверяем продуктивность матрицы A :

$$a_{11} = \frac{4}{15} < 1; \quad a_{22} = \frac{1}{20} < 1; \quad a_{33} = \frac{1}{15} < 1;$$

$$a_{12} \cdot a_{21} = \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{20} < 1; \quad a_{13} \cdot a_{31} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{75} < 1; \quad a_{23} \cdot a_{32} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{150} < 1;$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = \frac{4}{15} + \frac{3}{20} + \frac{1}{15} = \frac{29}{60} < 1;$$

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} = \frac{9}{20} < 1;$$

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{11}{30} < 1;$$

$$\text{Норма матрицы } A \quad \|A\| = \max \left\{ \frac{29}{60}; \frac{9}{20}; \frac{11}{30} \right\} = \frac{29}{60} < 1.$$

Значит, матрица A продуктивна и для любой неотрицательной матрицы конечного продукта Y существует неотрицательная матрица валовых выпусков X , удовлетворяющая матричному уравнению $X = AX + Y$.

Шаг 3. Определяем элементы матрицы $(E - A)$:

$$(E - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{3}{20} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{20} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{19}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{bmatrix}.$$

Шаг 4. Вычисляем определитель матрицы $(E - A)$:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{19}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = \frac{11}{15} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{14}{15} - \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{15} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{5} -$$

$$-\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{10} - \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{15} = \frac{2618}{4500} \approx 0,58.$$

Шаг 5. Вычисляем алгебраические дополнения матрицы $(E - A)$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \frac{19}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = \frac{19}{20} \cdot \frac{14}{15} - \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{266}{300} - \frac{1}{150} = \frac{264}{300} \approx 0,88;$$

$$\dot{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = -\left(\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{14}{15} - \left(-\frac{1}{15}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = -\left(-\frac{14}{45} - \frac{1}{75}\right) = \frac{73}{225} \approx 0,324;$$

$$\dot{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{19}{20} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{30} + \frac{19}{100} = \frac{67}{300} \approx 0,223;$$

$$\dot{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -\frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{10} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = -\left(\left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \frac{14}{15} - \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)\right) = \frac{42}{300} + \frac{1}{150} = \frac{44}{300} \approx 0,147;$$

$$\dot{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} \end{vmatrix} = \frac{11}{15} \cdot \frac{14}{15} - \left(-\frac{1}{15}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{154}{225} - \frac{1}{75} = \frac{151}{225} \approx 0,671;$$

$$\dot{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{vmatrix} = -\left(\frac{11}{15} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) - \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{11}{150} + \frac{3}{100} = \frac{31}{300} \approx 0,103;$$

$$\dot{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -\frac{3}{20} & -\frac{1}{15} \\ \frac{19}{20} & -\frac{1}{15} \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) - \left(-\frac{1}{15}\right) \cdot \frac{19}{20} = \frac{3}{300} + \frac{19}{300} = \frac{22}{300} \approx 0,073;$$

$$\dot{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \end{vmatrix} = -\left(\frac{11}{15} \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) - \left(-\frac{1}{15}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{11}{225} + \frac{1}{45} = \frac{16}{225} \approx 0,071;$$

$$\dot{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \frac{11}{15} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{3} & \frac{19}{20} \end{vmatrix} = \frac{11}{15} \cdot \frac{19}{20} - \left(-\frac{3}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{209}{300} - \frac{3}{60} = \frac{194}{300} \approx 0,647.$$

Шаг 6. Составляем матрицу $\tilde{C}$ из алгебраических дополнений A_{ij} , причем алгебраические дополнения строк записываем в столбцы:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{21} & \dot{A}_{31} \\ \dot{A}_{12} & \dot{A}_{22} & \dot{A}_{32} \\ \dot{A}_{13} & \dot{A}_{23} & \dot{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,88 & 0,147 & 0,073 \\ 0,324 & 0,671 & 0,071 \\ 0,223 & 0,103 & 0,647 \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Вычисляем обратную матрицу $(E - A)^{-1}$:

$$(\dot{A} - \dot{A})^{-1} = \frac{1}{|\dot{A} - \dot{A}|} \tilde{N} = \frac{1}{0,58} \begin{bmatrix} 0,88 & 0,147 & 0,073 \\ 0,324 & 0,671 & 0,071 \\ 0,223 & 0,103 & 0,647 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,513 & 0,252 & 0,126 \\ 0,558 & 1,154 & 0,122 \\ 0,384 & 0,178 & 1,112 \end{bmatrix}.$$

Шаг 8. Вычисляем объёмы валовой продукции X , умножая матрицу $B = (E - A)^{-1}$ полных затрат на матрицу нового конечного продукта Y :

$$\tilde{O} = (\tilde{A} - \tilde{A})^{-1} \cdot Y = \begin{bmatrix} 1,513 & 0,252 & 0,126 \\ 0,558 & 1,154 & 0,122 \\ 0,384 & 0,178 & 1,112 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100,84 \\ 115,966 \\ 98,319 \end{bmatrix}.$$

Ответ: для удовлетворения новых показателей спроса необходимо будет произвести примерно 101 тыс. т продукции сельского хозяйства, 116 тыс. машин и нанять 98 тыс. работников.

Решение систем линейных уравнений

Задача 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение

Шаг 1. Составляем расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \end{array} \right].$$

Шаг 2. Выбираем разрешающий элемент $a_{11} = 2 \neq 0$ и выполняем первый шаг метода Гаусса: первую строку переписываем без изменения; элементы первого столбца, кроме разрешающего элемента, заменяем нулями; все другие элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \end{array} \right].$$

Шаг 3. Выбираем разрешающий элемент $a_{22} = -1 \neq 0$ и выполняем второй шаг метода Гаусса: вторую строку переписываем без изменения; элементы второго столбца, кроме разрешающего, заменяем нулями; все другие элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -10 \end{array} \right].$$

Шаг 4. Выбираем разрешающий элемент $a_{33} = 6 \neq 0$ и выполняем третий шаг метода Гаусса: третью строку переписываем без изменения; элементы третьего столбца, кроме разрешающего, заменяем нулями; все другие элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -12 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \end{array} \right].$$

Шаг 5. Элементы первой строки делим на «-12»; второй — на «-6»; третьей — на «6»:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array} \right].$$

Шаг 6. Выписываем решение системы:

$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{2}{3}; \quad x_3 = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{2}{3}; \quad x_3 = \frac{5}{3}.$

Задача 9. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 4 \\ 5x_1 - 6x_2 + 18x_3 + x_4 = -7 \end{cases}.$$

Решение:

Составим расширенную матрицу данной системы уравнений и элементарными преобразованиями приведем ее к эквивалентному виду, содержащему базис переменных:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 11 & 4 & -2 \\ 2 & -8 & 4 & 9 & 4 \\ 5 & -6 & 18 & 1 & -7 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -4 & 7 & 6 \\ 0 & -16 & -2 & -4 & -2 \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -6 \end{array} \right] &\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 31/2 & 10 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Вторая матрица получена из первой путем поочередного умножения 1-й строки на (-3) , (-2) , (-5) и прибавления соответственно ко 2-й, 3-й и 4-й строкам первой матрицы. Третья же матрица получена из предыдущей путем поочередного умножения 2-й строки на $1/2$, -3 , -4 и прибавления соответственно к 1-й, 3-й и 4-й строкам. Четвертая матрица получена из предыдущей путем поочередного умножения третьей строки на $7/2$, -1 , 2 и прибавления соответственно к 1-й, 2-й и 4-й строкам. Последней матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{31}{2}x_4 = 10 \\ -4x_2 - 3x_4 = -2 \\ -x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 - \frac{31}{2}x_4 \\ -4x_2 = -2 + 3x_4 \\ -x_3 = 3 - 4x_4 \end{cases},$$

в которой имеется базис переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$. Переменная x_4 является свободной. Поэтому исходная система имеет следующие решения:

$$x_1 = 10 - \frac{31}{2}x_4, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_4, \quad x_3 = -3 + 4x_4, \quad x_4, \quad \text{где } x_4 \text{ — любое действительное число.}$$

Ответ: $\left(10 - \frac{31}{2}x_4, \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_4, \quad -3 + 4x_4, \quad x_4 \right), \quad \text{где } x_4 \in \mathbb{R}.$

Разложение вектора по заданному базису

Задача 10. Показать, что векторы $\vec{a} = (3; 4; 3)$, $\vec{b} = (-2; 3; 1)$ и $\vec{c} = (4; -2; 3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d} = (-17; 18; -7)$ в этом базисе.

Решение:

Шаг 1. Составляем матрицу A из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. При помощи элементарных преобразований вычисляем ранг матрицы A :

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{17} & 9 \\ 0 & -22 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 147 \end{bmatrix}.$$

На главной диагонали последней матрицы три ненулевых элемента. Следовательно, ранг матрицы равен 3. Значит, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы и, так как они принадлежат трехмерному пространству, то они образуют базис.

Шаг 3. Составляем векторное равенство:

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} -17 \\ 18 \\ -7 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

и равносильную ему систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta + 4\gamma = -17, \\ 4\alpha + 3\beta - 2\gamma = 18, \\ 3\alpha + \beta + 3\gamma = -7. \end{cases}$$

Шаг 4. Решаем систему методом Гаусса:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -17 \\ 4 & 3 & -2 & 18 \\ 3 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -17 \\ 0 & 17 & -22 & 122 \\ 0 & 9 & -3 & 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -17 \\ 0 & \boxed{17} & -22 & 122 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \end{bmatrix} \sim \\ \sim \begin{bmatrix} 51 & 0 & 24 & -45 \\ 0 & 17 & -22 & 122 \\ 0 & 0 & 49 & -196 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 51 & 0 & 0 & 51 \\ 0 & 17 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Из последней матрицы получаем решение системы: $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = -4$.

Шаг 5. Записываем разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}; \quad \vec{d} = (1; 2; -4).$$

Ответ: векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис; координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе — $(1; 2; -4)$.

Задача 11. Дополнить данную линейно независимую систему векторов до базиса соответствующего пространства: $\vec{a} = (2, 0, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 1, 3, -2)$.

Решение

Шаг 1. Вначале найдем ненулевой вектор $\vec{c}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для этого необходимо решить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 & -1/2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4, \\ x_2 = -\frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = x_4 = 1$, тогда $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Вектор $\vec{c} = (-2, -3, 1, 1)$ — искомый, причем система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независима.

Шаг 2. Найдем теперь ненулевой вектор $\vec{d}$, ортогональный векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Для этого необходимо решить однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{d} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 10 & -5 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -5x_3 \\ x_2 = -6x_3 \\ x_1 = 7x_3 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 1$, тогда $x_4 = -5$, $x_2 = -6$, $x_1 = 7$. Вектор $\vec{d} = (7, -6, 1, -5)$ — искомый, причем система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ линейно независима. Но тогда эта система является базисом пространства $\square^4$.

Ответ: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = (-2, -3, 1, 1)$, $\vec{d} = (7, -6, 1, -5)$ — базис пространства $\square^4$.

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейных операторов

Задача 12. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение

Шаг 1. Составляем характеристическое уравнение матрицы A : $|A - \lambda E| = 0$, т.е.

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Шаг 2. Вычисляем определитель по правилу Саррюса. В результате последовательных упрощений уравнения находим его корни — собственные значения λ матрицы A :

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) + 3 + 3 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - 9(5-\lambda) = 0;$$

$$(1-\lambda)^2(5-\lambda) + 6 - 2(1-\lambda) - 9(5-\lambda) = 0;$$

$$(5 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 9) + 2(3 - (1 - \lambda)) = 0;$$

$$(3 - (1 - \lambda))(-(5 - \lambda)(3 + (1 - \lambda)) + 2) = 0;$$

$$(2 + \lambda)((\lambda - 5)(4 - \lambda) + 2) = 0;$$

$$(2 + \lambda)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0;$$

$$-(2 + \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0.$$

$$\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 6.$$

Шаг 3. Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$. Для этого подставив $\lambda_1 = -2$ в систему, получим:

$$\begin{bmatrix} 1+2 & -3 & -1 \\ -3 & 1+2 & 1 \\ -1 & 1 & 5+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Первое и второе уравнения отличаются множителем «-1», поэтому оставляем первое из них и система примет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Выразим x_1 из второго уравнения системы: $x_1 = x_2 + 7x_3$ и подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 7x_3, \\ 3x_2 + 21x_3 - 3x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = x_2 + 7x_3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда находим решение: $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$. Следовательно, собственному значению $\lambda_1 = -2$ соответствует

собственный вектор $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, где x_1 — произвольное действительное число, не равное нулю.

Шаг 4. Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -3 & -1 \\ -3 & 1-3 & 1 \\ -1 & 1 & 5-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $x_2 = -x_1$, $x_3 = x_1$. Следовательно, собственному значению $\lambda_2 = 3$ соответствует собственный вектор

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \text{ где } x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Шаг 5. Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{bmatrix} 1-6 & -3 & -1 \\ -3 & 1-6 & 1 \\ -1 & 1 & 5-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} -5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $x_2 = -x_1$, $x_3 = -2x_1$. Следовательно, собственному значению $\lambda_3 = 6$ соответствует собственный вектор

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix},$$

где $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ответ: собственные значения $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$; собственные векторы $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \\ \beta \end{bmatrix}$;

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma \\ -2\gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

В основе темы лежит понятие вектора и его координат на плоскости и в пространстве.

Обучающие задания

Операции над векторами

Задача 1. Найти координаты вектора $4\vec{a} - 5\vec{b} + 7\vec{c}$, если $\vec{a} = (-1; 4; 3)$, $\vec{b} = (3; 7; 10)$, $\vec{c} = (5; 6; 7)$.

Решение

Шаг 1. Подставляем координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в линейную комбинацию $4\vec{a} - 5\vec{b} + 7\vec{c} = 4(-1; 4; 3) - 5(3; 7; 10) + 7(5; 6; 7)$.

Шаг 2. Пользуемся алгебраическими операциями умножения вектора на число и сложения векторов:

$$(-4; 16; 12) - (15; 35; 50) + (35; 42; 49) = (16; 23; 11).$$

Ответ: $4\vec{a} - 5\vec{b} + 7\vec{c} = (16; 23; 11)$.

Задача 2. Фирма продаёт изделия по ценам, которые характеризуются вектором $\vec{p} = (10; 21; 15; 17)$, а объёмы продаж по регионам определяются вектором $\vec{q} = (300; 150; 100; 180)$. Найти прибыль фирмы, если издержки на реализацию составляют 1000 ден.ед.

Решение

Шаг 1. Так как объём продаж фирмы определяется скалярным произведением векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, то находим их скалярное произведение:

$$(\vec{p} \cdot \vec{q}) = 10 \cdot 300 + 21 \cdot 150 + 15 \cdot 100 + 17 \cdot 180 = 10710 \text{ (ден.ед.)}$$

Шаг 2. Прибыль фирмы равна разности между объёмом продаж и издержками на реализацию:

$$P = 10710 - 1000 = 9710 \text{ (ден.ед.)}$$

Ответ: прибыль фирмы равна 9710 ден.ед.

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Задача 3. Определить внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C в треугольнике ABC с вершинами

$A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$.

Решение

Шаг 1. Определим внутренний угол A . Для этого найдём векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (1-3)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Аналогично найдём $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\text{Тогда } \cos \angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{0}{9} = 0. \text{ Т.е. } \angle A = \frac{\pi}{2}.$$

Шаг 2. Определим внешний угол при вершине C . Для этого рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \text{ и } \overrightarrow{CB} = (1-0)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (1-5)\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}.$$

Обозначим искомый угол $\angle C_1$. Тогда

$$\cos \angle C_1 = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{(-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1+16}} = \frac{-9}{3\sqrt{18}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } \angle C_1 = \frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: $\angle A = \frac{\pi}{2}, \angle C_1 = \frac{3\pi}{4}.$

Задача 4. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, если $\vec{a} = (2, 3, 4)$ и $\vec{b} = (6, 2, 2)$.

Решение

Воспользуемся формулой нахождения площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(6-8) - \vec{j}(4-24) + \vec{k}(4-18) = -2\vec{i} + 20\vec{j} - 14\vec{k}.$$

Таким образом,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 20^2 + (-14)^2} = 5\sqrt{6} \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $5\sqrt{6}$ кв. ед.

Задача 5. Вычислить объем пирамиды, построенной на векторах

$\vec{a} = (2, 3, 4)$, $\vec{b} = (6, 2, 2)$, $\vec{c} = (3, 7, 1)$ как на сторонах.

Решение

Так как объем пирамиды вычисляется по формуле $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-14) - 3(6-6) + 4(42-6) = 120.$$

Значит, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20$ (куб. ед.)

Ответ: 20 куб. ед.

Прямая на плоскости

Задача 6. Дан треугольник ABC с вершинами $A(6;5)$, $B(5;-4)$, $C(-5;4)$.

Изобразить треугольник ABC в прямоугольной декартовой системе координат XOY .

Написать:

уравнение прямой AB ;

уравнение биссектрисы BL угла B ;

уравнение высоты CN , опущенной из вершины C ;

уравнение медианы AM , проведенной из вершины A .

Найти:

острый угол между высотой CN и медианой AM ;

точку пересечения медиан;

площадь треугольника ABC .

Задать системой неравенств множество точек треугольника ABC .

Решение

Шаг 1. Изобразим треугольник ABC (рис. 9.1) в прямоугольной декартовой системе координат XOY .

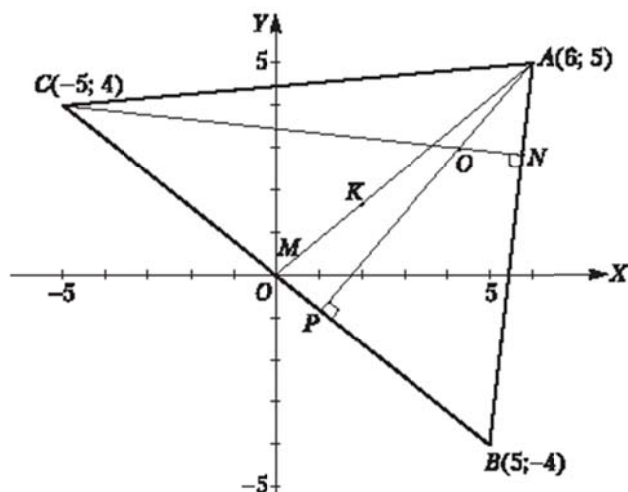


Рис. 9.1

Шаг 2. Напишем уравнение прямой AB , используя для этого координаты точек A и B , лежащих на этой прямой:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x - 6}{5 - 6} = \frac{y - 5}{-4 - 5} \Leftrightarrow 9x - y - 49 = 0.$$

Шаг 3. Уравнение биссектрисы BL угла B .

Поскольку координаты точки B известны, остается лишь найти координаты точки L — точки пересечения биссектрисы BL со стороной AC .

Как известно, биссектриса BL делит сторону AC на части AL и LC , длины которых пропорциональны длинам прилежащих сторон треугольника, т.е. $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$.

Поскольку

$$AB = \sqrt{(5 - 6)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{1 + 81} = \sqrt{82},$$
$$BC = \sqrt{(-5 - 5)^2 + (4 + 4)^2} = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164},$$

$$\text{то } \frac{AL}{LC} = \frac{\sqrt{82}}{\sqrt{164}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим сонаправленные векторы $\overline{AL}$ и $\overline{LC}$. Из соотношения их длин следует, что $\sqrt{2}\overline{AL} = \overline{LC}$. Запишем это равенство в координатах, обозначая $(x_L; y_L)$ — координаты точки L :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(x_L - 6; y_L - 5) &= (-5 - x_L; 4 - y_L) \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \sqrt{2}x_L - 6\sqrt{2} = -5 - x_L, \\ \sqrt{2}y_L - 5\sqrt{2} = 4 - y_L \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_L(1 + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} - 5, \\ y_L(1 + \sqrt{2}) = 5\sqrt{2} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x_L = \frac{6\sqrt{2} - 5}{\sqrt{2} + 1}, \\ y_L = \frac{5\sqrt{2} + 4}{\sqrt{2} + 1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 17 - 11\sqrt{2}, \\ y_L = 6 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, точка $L(17 - 11\sqrt{2}; 6 - \sqrt{2})$ найдена. Осталось написать уравнение прямой BL , проходящей через две данные точки:

$$\frac{x - x_B}{x_L - x_B} = \frac{y - y_B}{y_L - y_B} \Leftrightarrow \frac{x - 5}{17 - 11\sqrt{2} - 5} = \frac{y + 4}{6 - \sqrt{2} + 4} \Leftrightarrow \frac{x - 5}{12 - 11\sqrt{2}} = \frac{y + 4}{10 - \sqrt{2}} \quad \text{— каноническое уравнение биссектрисы } BL.$$

Шаг 4. Найдем уравнение высоты CN . Поскольку CN перпендикулярна AB , используем угловой коэффициент прямой AB для нахождения углового коэффициента прямой CN .

Запишем уравнение $9x - y - 49 = 0$ прямой AB (см. шаг 2) в равносильном виде $y = 9x - 49$,

тогда угловой коэффициент $k_{AB} = 9$.

Поскольку угловые коэффициенты перпендикулярных прямых при умножении дают (-1) , то $k_{AB} \cdot k_{CN} = -1 \Leftrightarrow 9 \cdot k_{CN} = -1 \Leftrightarrow k_{CN} = -\frac{1}{9}$.

Таким образом, уравнение прямой CN найдем по известным угловому коэффициенту k_{CN} и точке C , т.е. в виде

$$y - y_C = k_{CN}(x - x_C) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{1}{9}(x + 5) \Leftrightarrow x + 9y - 41 = 0.$$

Шаг 5. Уравнение медианы AM напомним, используя уравнение прямой, проходящей через две известные точки A и $M(x_M; y_M)$:

$$\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A}.$$

Найдем координаты точки M , являющейся серединой стороны BC , по формулам:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Откуда $x_M = 0$, $y_M = 0$.

Тогда уравнение медианы AM примет вид:

$$\frac{x-6}{0-6} = \frac{y-5}{0-5} \Leftrightarrow \frac{x-6}{6} = \frac{y-5}{5} \Leftrightarrow 5x-6y=0.$$

Шаг 6. Острый угол φ между высотой CN и медианой AM найдем, используя формулу для тангенса угла между прямыми с известными угловыми коэффициентами k_1 и k_2 :

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

В нашем случае угловой коэффициент k_1 прямой CN , найденный на шаге 4, равен $k_1 = -\frac{1}{9}$; угловой коэффициент k_2 прямой AM , найденный на шаге 5, равен $k_2 = \frac{5}{6}$. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{9}}{1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{9}} = \frac{51}{49}. \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{51}{49}.$$

Шаг 7. Для нахождения точки K пересечения медиан нам понадобится точка $M(0; 0)$ — середина стороны BC . Известно, что точка K делит отрезок AM в отношении $\lambda = 2:1$, считая от вершины A . Тогда, в соответствии с формулами деления отрезка AM в отношении $\lambda = 2:1$, получаем

$$x_K = \frac{x_A + \lambda x_M}{1 + \lambda}, \quad y_K = \frac{y_A + \lambda y_M}{1 + \lambda}, \text{ т.е. } x_K = \frac{6 + 2 \cdot 0}{1 + 2} = 2, \quad y_K = \frac{5 + 2 \cdot 0}{1 + 2} = \frac{5}{3}.$$

Значит, точка пересечения медиан $K\left(2; \frac{5}{3}\right)$.

Шаг 8. Для нахождения площади S треугольника AMB вычислим: 1) расстояние a между точками M и B (длина основания $\square AMB$); 2) расстояние h от точки A до прямой BC (высота $\square AMB$). Тогда $S = \frac{1}{2} ah$.

$$\text{Находим } a = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}.$$

Для нахождения расстояния h от точки A до прямой BC напишем уравнение этой прямой

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}.$$

В нашем случае уравнение принимает вид:

$$\frac{x-5}{-5-5} = \frac{y+4}{4+4} \Leftrightarrow \frac{x-5}{-10} = \frac{y+4}{8} \Leftrightarrow 4x+5y=0.$$

Расстояние h вычислим по формуле:

$$h = \frac{|4 \cdot x_A + 5 \cdot y_A|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{4 \cdot 6 + 5 \cdot 5}{\sqrt{41}} = \frac{49}{\sqrt{41}}.$$

$$\text{В итоге } S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{41} \cdot \frac{49}{\sqrt{41}} = \frac{49}{2} = 24,5 \text{ (кв. ед.).}$$

Шаг 9. Для того, чтобы задать множество внутренних и граничных точек $\square ABC$ системой неравенств, нам потребуются уравнения всех сторон треугольника.

На шаге 2 было получено уравнение прямой AB : $9x - y - 49 = 0$.

Множество точек $\square ABC$ расположено по ту же сторону от прямой AB , что и начало координат, т.е. находится в полуплоскости $9x - y - 49 \leq 0$.

На шаге 8 было получено уравнение прямой BC : $4x + 5y = 0$.

Множество точек $\square ABC$ расположено по ту же сторону от прямой BC , что и точка $L(1; 0)$, т.е. искомое множество расположено в полуплоскости $4x + 5y \geq 0$.

Напишем уравнение прямой AC :

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \Leftrightarrow \frac{x - 6}{-5 - 6} = \frac{y - 5}{4 - 5} \Leftrightarrow x - 11y + 49 = 0.$$

Множество точек $\square ABC$ расположено по ту же сторону от прямой AC , что и начало координат, т.е. находится в полуплоскости $x - 11y + 49 \geq 0$.

Окончательно получаем, что множество точек $\square ABC$ одновременно принадлежит всем трем указанным полуплоскостям, а значит, удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{cases} 9x - y - 49 \leq 0, \\ 4x + 5y \geq 0, \\ x - 11y + 49 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: 2) AB : $9x - y - 49 = 0$; 3) BL : $\frac{x - 5}{12 - 11\sqrt{2}} = \frac{y + 4}{10 - \sqrt{2}}$; 4) CN : $x + 9y - 41 = 0$; 5) AM : $5x - 6y = 0$; 6)

$$\varphi = \arctg \frac{51}{49}; 7) K\left(2; \frac{5}{3}\right); 8) S=24,5; 9) \begin{cases} 9x - y - 49 \leq 0, \\ 4x + 5y \geq 0, \\ x - 11y + 49 \geq 0. \end{cases}$$

Прямая и плоскость в пространстве

Задача 7. Даны четыре точки $A_1(0; -1; 1), A_2(3; 5; 1), A_3(1; -3; -1), A_4(1; 4; -2)$.

Выяснить, лежат ли эти точки в одной плоскости. Если лежат, то составить уравнение этой плоскости. Если не лежат, то сделать следующее.

- 1) Составить уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.
- 2) Найти расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.
- 3) Написать уравнение перпендикуляра к плоскости $A_1A_2A_3$, проходящего через точку A_4 .
- 4) Найти острый угол, образованный этим перпендикуляром и прямой A_3A_4 .
- 5) Вычислить косинус угла между координатной плоскостью XOY и плоскостью $A_1A_2A_3$.
- 6) Вычислить синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.
- 7) Выяснив взаимное расположение прямых A_1A_3 и A_2A_4 , найти расстояние между ними.

Решение

Шаг 1. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ компланарны, что, в свою очередь, равносильно условию $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = 0$. Вычислим смешанное произведение векторов:

$$\begin{aligned} \overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_1 A_3} \cdot \overline{A_1 A_4} &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5+1 & 1-1 \\ 1 & -3+1 & -1-1 \\ 1 & 4+1 & -2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot (6+10) - 6 \cdot (-3+2) = 54 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, точки A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в одной плоскости.

Шаг 2. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3)$ записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставив в это равенство координаты точек A_1, A_2, A_3 , получим

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 3 & 5+1 & 1-1 \\ 1 & -3+1 & -1-1 \end{vmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -12x + 6(y+1) - 12(z-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x - y + 2z - 3 = 0. \end{aligned}$$

Получено уравнение плоскости $A_1 A_2 A_3$.

Шаг 3. Расстояние от точки $A_4(x_4; y_4; z_4)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В нашем случае расстояние от точки $A_4(1; 4; -2)$ до плоскости $A_1 A_2 A_3$ с уравнением $2x - y + 2z - 3 = 0$ будет равно

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Шаг 4. Уравнение прямой, проходящей через точку $A_4(x_4; y_4; z_4)$ перпендикулярно плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, запишем в каноническом виде:

$$\frac{x - x_4}{A} = \frac{y - y_4}{B} = \frac{z - z_4}{C}.$$

Для плоскости $A_1 A_2 A_3$, имеющей уравнение $2x - y + 2z - 3 = 0$ и точки $A_4(1; 4; -2)$ уравнения прямой принимают вид:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z + 2}{2}.$$

Шаг 5. Поскольку острый угол между прямыми определяется как острый угол между их направляющими векторами, то следует найти направляющие векторы прямой $A_3 A_4$ и прямой, перпендикулярной к плоскости $A_1 A_2 A_3$, найденной на шаге 4. Последняя прямая имеет направляющий вектор $\vec{s}_1 = (2; -1; 2)$. Для прямой $A_3 A_4$ в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{s}_2 = \overline{A_3 A_4} = (1 - 1; 4 - (-3); -2 - (-1)) = (0; 7; -1)$.

Найдем косинус угла между векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{2 \cdot 0 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 7^2 + (-1)^2}} = \frac{-9}{3\sqrt{50}} = -\frac{3}{5\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что прямые образуют пару вертикальных углов, равных $\pi - \arccos \frac{3}{5\sqrt{2}}$ и $\arccos \frac{3}{5\sqrt{2}}$.

Следовательно, острый угол между прямыми равен $\arccos \frac{3}{5\sqrt{2}}$.

Шаг 6. Угол между плоскостями определяется как угол между векторами нормалей к этим плоскостям. Возьмем вектор нормали $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$ к плоскости $ХОУ$ и вектор нормали $\vec{n}_2 = (2, -1, 2)$ к плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда косинус угла ψ между плоскостями $ХОУ$ и $A_1A_2A_3$ равен

$$\cos \psi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Шаг 7. Если нужно найти синус угла α между прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p)$ и плоскостью с вектором нормали $\vec{n} = (A, B, C)$, то используется следующая формула:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Направляющим вектором прямой A_1A_4 будет вектор $\overrightarrow{A_1A_4} = (1, 5, -3)$. Вектором нормали к плоскости $A_1A_2A_3$ является вектор $\vec{n} = (2, -1, 2)$. Тогда

$$\sin \alpha = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2|}{\sqrt{1 + 25 + 9} \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{3\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Шаг 8. Чтобы проверить, являются ли данные прямые A_1A_3 и A_2A_4 параллельными, пересекающимися или скрещивающимися, нужно установить взаимное расположение следующих трех векторов: $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, (где $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ — направляющие векторы этих прямых, $\overrightarrow{M_1M_2}$ — вектор, соединяющий любые две точки M_1 и M_2 , принадлежащие разным прямым). В нашем случае $\vec{s}_1 = \overrightarrow{A_1A_3} = (1, -2, -2)$, $\vec{s}_2 = \overrightarrow{A_2A_4} = (-2, -1, -3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_4} = (1, 5, -3)$. Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 54.$$

Поскольку $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overrightarrow{A_1A_4} \neq 0$, то векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ некомпланарны, а значит, прямые A_1A_3 и A_2A_4 скрещиваются. Расстояние d_1 между скрещивающимися прямыми находится по формуле:

$$d_1 = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overrightarrow{A_1A_4}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{54}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

$$\text{где } \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k}, \quad |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-5)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Таким образом, расстояние между прямыми A_1A_3 и A_2A_4 равно $d_1 = \frac{54}{3\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}}$.

Ответ: Точки A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в одной плоскости;

1) $A_1A_2A_3 : 2x - y + 2z - 3 = 0$; 2) $d = 3$; 3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{2}$; 4) $\varphi = \arccos \frac{3}{5\sqrt{2}}$; 5) $\cos \psi = \frac{2}{3}$; 6)

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}; \quad 7) \quad d_1 = \frac{18}{\sqrt{10}}.$$

Основные фигуры второго порядка на плоскости

Задача 8. Составить уравнение кривой, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $F(4;5)$ к расстоянию до прямой $x = -5$ равно $\lambda = \frac{5}{4}$. Привести это уравнение к каноническому виду и определить тип кривой.

Решение

Шаг 1. Расстояние от произвольной точки $A(x; y)$ до точки F вычисляется по формуле:

$$p_F = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}.$$

Шаг 2. Расстояние от произвольной точки до прямой $x = -5$.

Координаты точек на прямой $x = -5$ имеют вид $M(-5; y)$. Следовательно, расстояние от произвольной точки $A(x; y)$ до точки M определяется выражением:

$$p_{x=-5} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x+5)^2} = |x+5|.$$

Шаг 3. Уравнение кривой.

Согласно условию задачи

$$\frac{p_F}{p_{x=-5}} = \lambda \Leftrightarrow p_F = \lambda \cdot p_{x=-5}.$$

Подставим найденные значения p_F и $p_{x=-5}$ и найдем уравнение кривой, отвечающей условию задачи.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} &= \frac{5}{4} \cdot |x+5| \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 = \frac{25}{16} \cdot |x+5|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = \frac{25}{16} \cdot (x^2 + 10x + 25) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16x^2 - 128x + 16y^2 - 160y + 656 = 25x^2 + 250x + 625 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16x^2 - 128x + 16y^2 - 160y + 656 - 25x^2 - 250x - 625 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -9x^2 - 378x + 16y^2 - 160y + 31 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9x^2 + 378x - 16y^2 + 160y - 31 = 0. \end{aligned}$$

Приведем уравнение кривой к каноническому виду:

$$\begin{aligned} 9 \cdot (x^2 + 42x) - 16 \cdot (y^2 + 10y) &= 31 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 \cdot (x+21)^2 - 9 \cdot 21^2 - 16 \cdot (y+5)^2 + 16 \cdot 5^2 &= 31 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 \cdot (x+21)^2 - 16 \cdot (y+5)^2 &= 3600 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{9 \cdot (x+21)^2}{9 \cdot 16} - \frac{16 \cdot (y+5)^2}{9 \cdot 16} &= \frac{3600}{9 \cdot 16} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x+21)^2}{16} - \frac{(y+5)^2}{9} &= 25 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+21)^2}{\frac{16}{25}} - \frac{(y+5)^2}{\frac{9}{25}} = 1.$$

Шаг 4. Тип кривой.

Известно, что графиком кривой, имеющей каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

является гипербола.

Полученное нами уравнение

$$\frac{(x+21)^2}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} - \frac{(y+5)^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$$

соответствует каноническому уравнению гиперболы с центром в точке $O_1(-21; -5)$.

Ответ: уравнение кривой: $\frac{(x+21)^2}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} - \frac{(y+5)^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$; тип кривой — гипербола.

РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

по дисциплине «Алгебра и геометрия»

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Даны два множества, состоящие из матриц:

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ e & f & g \end{bmatrix}, a, b, c, d, e, f, g \in R \right\}; \quad Y = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & d \\ -b & -d & g \end{bmatrix}, a, b, d, g \in R \right\}..$$

Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X ? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.
3. Определить ранг системы векторов $\{A, B, C\}$ пространства квадратных матриц 2-го порядка: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.
4. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений.
5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,71 \end{bmatrix}$ продуктивной.
6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — поворот пространства R^3 на угол $\frac{\pi}{3}$ относительно оси Oz в положительном направлении. Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 2

1. Даны два множества X и Y , состоящие из многочленов:

$X = \{\alpha x^6 + \beta x^4 + \gamma x^2, \alpha, \beta, \gamma \in R\}$; $Y = \{\alpha x^6 - \alpha x^4 + \alpha x^2, \alpha \in R\}$. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X ? Доказать.

2. Исследовать систему функций $\{x, (1+x)^2, 1+x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.
3. Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ пространства

- многочленов, если $P_1(x) = 2x^2$, $P_2(x) = x^3 + 4$; $P_3(x) = 3x - 1$.
- Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений.
 - Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0,56 & 0,1 \\ 0,25 & 0,64 \end{bmatrix}$ продуктивной.
 - Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — проектирование пространства R^3 на плоскость Oxz . Найти его матрицу в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
 - Привести уравнение кривой 2-го порядка $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 3

- Даны два множества X и Y , состоящие из матриц:

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, a, b, c, d, e, f \in R \right\}; \quad Y = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 2a & e \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, a, b, d, e \in R \right\}.$$
 Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X ? Доказать.
- Исследовать систему функций $\{1; \operatorname{tg} x; \operatorname{ctg} x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(0; \pi/2)$.
- Определить ранг системы векторов $\{\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}\}$ пространства R^5 , если $\vec{x} = (1, 2, 1, 3, 4)$, $\vec{y} = (3, 4, 2, 6, 8)$, $\vec{z} = (1, 2, 1, 3, 4)$.
- Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений.
- Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0,63 & 0,2 \\ 0,3 & 2,8 \end{bmatrix}$ продуктивной.
- Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — поворот пространства R^3 относительно оси Oy на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
- Привести уравнение кривой 2-го порядка $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 4

1. Пусть X — множество многочленов от x , степень которых не превосходит 5; Y — множество всех многочленов степени 3. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X ? Доказать.
2. Исследовать систему функций $\{1; x; 1/x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(0; 1)$.
3. Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x), P_5(x)\}$ пространства многочленов, если $P_1(x) = x^2 + x + 2$, $P_2(x) = 3x^2 - 2x + 11$, $P_3(x) = 5x^2 + 3x + 12$, $P_4(x) = 7x^2 - 4x + 25$, $P_5(x) = 9x^2 + 5x + 22$.
4. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений.
5. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,3 \\ 0,34 & 0,65 \end{bmatrix}$ продуктивной.
6. Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — зеркальное отражение пространства R^3 относительно плоскости Oxz . Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
7. Привести уравнение кривой 2-го порядка $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 5

1. Пусть $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ -b & a & c \\ -c & -b & a \end{bmatrix}, a, b, c \in R \right\}$; Y — множество таких же матриц с определителем, равным 0. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X ? Доказать.
2. Исследовать систему функций $\{1, e^x, e^x + e^{-x}\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.
3. Определить ранг системы векторов $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
4. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

- $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$
- Определить размерность линейного пространства решений.
- Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,51 & 1,2 \end{bmatrix}$ продуктивной.
 - Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — поворот пространства R^3 относительно оси Oz на $\angle \frac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
 - Привести уравнение кривой 2-го порядка $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 6

- Даны два множества X и Y , состоящие из многочленов:
 $X = \{\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2, \alpha, \beta \in R\}$; $Y = \{\beta xy, \beta \in R\}$. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X ? Доказать.
- Исследовать систему функций $\{1 + x + x^2; 1 + 2x + x^2; 1 + 3x + x^2\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.
- Определить ранг системы векторов $\vec{u}_1 = (1, 2, 5)$, $\vec{u}_2 = (5, -1, 3)$, $\vec{u}_3 = (4, 2, 8)$, $\vec{u}_4 = (3, -1, 1)$, $\vec{u}_5 = (1, 0, 1)$.
- Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений.
- Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0,53 & 0,15 \\ 0,21 & 0,65 \end{bmatrix}$ продуктивной.
- Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — зеркальное отражение пространства R^3 относительно плоскости Oxy . Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
- Привести уравнение кривой 2-го порядка $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 7

- Пусть X — множество всех кососимметричных матриц 3-го порядка с действительными элементами; Y — множество таких же матриц с положительным определителем. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$

подпространство в X ? Доказать.

- Исследовать систему функций $\{e^x, e^{-x}, e^{2x}\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.
- Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$, состоящей из многочленов $P_1(x) = x^2 - 2x + 4$, $P_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$, $P_3(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 14$.
- Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений системы.
- Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 2,1 & 0,8 \\ 0,17 & 1,2 \end{bmatrix}$ продуктивной.
- Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — проектирование пространства R^3 на плоскость Oyz . Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
- Привести уравнение кривой 2-го порядка $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 8

- Пусть X — множество всех непрерывных на отрезке $[-1; 1]$ функций; Y — множество всех квадратичных функций, определенных на $[-1, 1]$. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X ? Доказать.
- Исследовать систему функций $\{\cos x, \sin x, \sin 2x\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$.
- Определить ранг системы векторов $\{A, D, C, D, F\}$ пространства квадратных матриц 3-го порядка, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
- Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений.
- Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0,68 & 0,21 \\ 0,19 & 0,54 \end{bmatrix}$ продуктивной.

- Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — поворот пространства R^3 относительно оси Ox на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
- Привести уравнение кривой 2-го порядка $4xy + 4x + 4y + 1 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 9

- Пусть X — множество всех нечетных и дифференцируемых на отрезке $[-1; 1]$ функций; Y — множество функций из X с условием $y'(0) = 0$. Образуется ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образуется ли множество $Y \subseteq X$ подпространство в X ? Доказать.
- Исследовать систему функций $\{1; x; x^2; (1+x)^2\}$ на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.

- Определить ранг системы векторов $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$,

$$\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений.
- Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 1,35 & 0,4 \\ 0,27 & 1 \end{bmatrix}$ продуктивной.
- Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — проектирование пространства R^3 на ось Oy . Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
- Привести уравнение кривой 2-го порядка $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Вариант 10

- Пусть X — множество всех непрерывных на отрезке $[-1; 1]$ функций; Y — множество всех функций из X с условием $y(0) = 1$. Образуется ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на

- число? Образуется ли множество $Y \subseteq X$ подпространством в X ? Доказать.
- Исследовать систему функций на линейную зависимость в промежутке $(-\infty; +\infty)$.
 - Определить ранг системы векторов $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)\}$ пространства многочленов, если $P_1(x) = 3x^5 + 3x^4 + 4x^2 - 2x - 5$; $P_2(x) = 8x^5 + 6x^4 + 12x^2 - x$; $P_3(x) = 7x^5 + 9x^4 + 8x^2 - 9x - 25$; $P_4(x) = x^5 + 3x^4 - 5x - 15$.
 - Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$
 Определить размерность линейного пространства решений.
 - Выяснить, является ли матрица $A = \begin{bmatrix} 0,66 & 0,33 \\ 0,22 & 0,55 \end{bmatrix}$ продуктивной.
 - Доказать линейность оператора $f: R^3 \rightarrow R^3$, где f — зеркальное отражение пространства R^3 относительно плоскости Oyz . Найти матрицу оператора в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, определить геометрически (и/или аналитически) собственные векторы и собственные значения оператора.
 - Привести уравнение кривой 2-го порядка $-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Контрольная работа «Векторная алгебра»

Вариант 1

- Разложить вектор $\vec{c}(1, -7)$ по базису $\vec{a}(4, -2)$ и $\vec{b}(3, 5)$.
- Вычислить работу силы $\vec{F}(3, -2, -5)$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2, -3, 5)$ в положение $B(3, -2, -1)$.
- Найти единичный вектор, перпендикулярный одновременно оси абсцисс и вектору $\vec{a}(3, 6, 8)$.
- Для каких ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} - \vec{b}$?
- Определить координаты концов отрезка AB , который точками $P(2; 2)$ и $Q(1; 5)$ разделён на три равные части.

Вариант 2

- Разложить вектор $\vec{c}(19, 8)$ по базису $\vec{a}(5, 4)$ и $\vec{b}(-3, 0)$.
- Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$; $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$. Вычислить угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.
- Даны векторы $\vec{a}(3, -1, -2)$, $\vec{b}(1, 2, -1)$. Найти координаты вектора $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$.
- Для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется условие $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$?

5. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. Найти угол с осью Oy .

Вариант 3

1. Разложить вектор $\vec{c}(9, -3)$ по базису $\vec{a}(-6, 2)$ и $\vec{b}(4, 7)$.
2. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. При каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны?
3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(8, 4, 1)$ и $\vec{b}(2, -2, 1)$.
4. Для каких ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется условие $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{b}$?
5. На оси Ox найти точку M , расстояние от которой до точки $N(2, -3)$ равно 5.

Вариант 4

1. Разложить вектор $\vec{d}(4, 12, -3)$ по базису $\vec{a}(2, 3, 1)$, $\vec{b}(5, 7, 0)$, $\vec{c}(3, -2, 4)$.
2. Дано: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$; $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$. Вычислить $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.
3. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный оси аппликат и вектору $\vec{a} = 8\vec{i} - 15\vec{j} + 3\vec{k}$, образует острый угол с осью абсцисс. Зная, что $|\vec{m}| = 51$, найти его координаты.
4. Для каких ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется условие $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
5. Может ли вектор из R^3 составлять с координатными осями следующие углы: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$?

Вариант 5

1. Разложить вектор $\vec{d}(25, -22, 16)$ по базису $\vec{a}(5, -2, 0)$, $\vec{b}(0, -3, 4)$, $\vec{c}(-6, 0, 1)$.
2. Известно, что вектор $\vec{a} + 3\vec{b}$ ортогонален вектору $7\vec{a} - 5\vec{b}$; вектор $\vec{a} - 4\vec{b}$ ортогонален вектору $7\vec{a} - 2\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если известны координаты его вершин $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.
4. Для каких ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$?
5. На оси Oy найти такую точку P , что $\angle MPN = 90^\circ$, если известны координаты точек $M(2, 2)$, $N(5, -2)$.

Вариант 6

1. Разложить вектор $\vec{d}(0, 20, 18)$ по базису $\vec{a}(3, 5, 6)$, $\vec{b}(2, -7, 1)$, $\vec{c}(12, 0, 6)$.
2. Доказать, что вектор $\vec{d} = \vec{b} - \frac{\vec{b} - \vec{a}(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|^2}$ ортогонален вектору $\vec{a}$.
3. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. За основание взят параллелограмм, построенный на

векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Для каких ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется условие: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$?
5. Вектор $\vec{a} \in R^3$ составляет с осью Ox угол $\alpha = 60^\circ$, с осью Oy угол $\beta = 120^\circ$. Найти его координаты, если $|\vec{a}| = 2$.

Вариант 7

1. Дан вектор $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Определить разложение по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вектора $\vec{d}$, противоположно направленного вектору $\vec{c}$, при условии, что $|\vec{d}| = 75$.
2. Вычислить тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.
3. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, удовлетворяющие условию: $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, компланарны.
4. Для каких ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется условие: $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
5. Может ли вектор составлять с осями координат углы: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$?

Вариант 8

1. Два вектора $\vec{a}(2, -3, 6)$ и $\vec{b}(-1, 2, -2)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.
2. Сила $\vec{R}(1, -8, -7)$ разложена по трем взаимно перпендикулярным направлениям, одно из которых задано вектором $\vec{a}(2, 2, 1)$. Найти составляющую силы $\vec{R}$ в направлении вектора $\vec{a}$.
3. Доказать, что $|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|$. В каком случае имеет место равенство?
4. Для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется условие $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}$?
5. Может ли вектор составлять с осями координат углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

Вариант 9

1. Вершины четырехугольника заданы радиус-векторами $A: \vec{r}_1 = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; $B: \vec{r}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $C: \vec{r}_3 = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$; $D: \vec{r}_4 = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$. Найти радиус-векторы вершин, если начало координат перенесено в точку C .
2. Известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.
3. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины, если известно, что она лежит на оси Oy .
4. Для каких ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется условие: $\vec{a} + |\vec{b}|\vec{b} = \vec{0}$?
5. Может ли вектор составлять с координатными осями углы: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$,

$$\gamma = 60^\circ ?$$

Вариант 10

1. Проверить, являются ли точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ вершинами трапеции.
2. Даны два вектора: $\vec{a}(3, -1, 5)$, $\vec{b}(1, 2, -3)$. Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что он ортогонален оси Oz и удовлетворяет равенствам $(\vec{x}, \vec{a}) = 9$, $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.
3. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ векторы $\overrightarrow{AB}(0, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC}(2, -1, 4)$ определяют основание, а вектор $\overrightarrow{AA'}(-3, 2, 2)$ направлен по боковому ребру. Найти объем и высоту призмы.
4. Для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\vec{a} + \vec{b}$ делит угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пополам?
5. Определить координаты точки M , если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые острые углы и его модуль равен 3.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок длиной 3.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 3; -1)$ и прямую $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = 1 - 3t$.
3. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2} = -z$ и $\begin{cases} x - 2y + 2z - 8 = 0, \\ x + 6z - 6 = 0. \end{cases}$
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график: $3x^2 - 4y^2 + 18x + 15 = 0$.
5. Найти расстояние от точки $P(7; 9; 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

Вариант 2

1. Найти проекцию точки $A(-8; 12)$ на прямую, проходящую через две данные точки $B(2; -3)$ и $C(-5; 1)$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 2; 3)$ и $N(-3; 4; -5)$ параллельно оси Oz .
3. Доказать что прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график: $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$.
5. Показать, что прямые $x + 3 = \frac{y+1}{2} = z + 1$ и $\begin{cases} x = 3z - 4, \\ y = z + 2 \end{cases}$ пересекаются и найти точку

А их пересечения.

Вариант 3

1. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок длиной 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$.
2. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-3}{-9}$ параллельна плоскости $x - 3y - 2z = 1$, а прямая $x = -t - 7$, $y = t - 2$, $z = -2t - 1$ лежит в этой плоскости.
3. Найти точку, симметричную точке $M(4; 3; 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график: $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24 = 0$.
5. Даны вершины $\triangle ABC: A(4; 1; -2), B(2; 0; 0), C(-2; 3; 5)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

Вариант 4

1. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(3; 6), B(5; 2), C(-1; -3), D(-5; 5)$ является трапецией.
2. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(1; -3; 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$.
3. При каком значении n прямые $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = z$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z = 8 \end{cases}$ параллельны?
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график: $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.
5. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми: $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = z$ и $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$.

Вариант 5

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; 1)$ перпендикулярно прямой BC , где $B(2; 5), C(1; 0)$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; -1; 2)$ и $B(2; 1; 4)$ параллельно вектору $\vec{a}(5; -2; -1)$.
3. Лежат ли данные точки $A(0; 0; 2), B(4; 2; 5), C(12; 6; 11)$ на одной прямой?
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график: $x^2 - 10x + 9 = 0$.
5. Дан куб, длина ребра которого равна 1. Вычислить расстояние от вершины куба до его диагонали, не проходящей через эту вершину.

Вариант 6

1. Найти точку, симметричную точке $M(2; -1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной двум плоскостям: $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$.
3. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график:
 $x^2 + 3y^2 + 2x - 18y + 31 = 0$.
5. Даны уравнения стороны ромба $x + 3y - 8 = 0$ и его диагонали $2x + y + 4 = 0$.
Написать уравнения остальных сторон ромба, если известна точка $A(-9; -1)$, которая лежит на стороне, параллельной данной.

Вариант 7

1. Найти точку O пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, если известны координаты его вершин: $A(-1; -3)$, $B(3; 5)$, $C(5; 2)$, $D(3; -5)$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 3; -4)$ параллельно двум данным векторам $\vec{a}(4; 1; -1)$ и $\vec{b}(2; -1; 2)$.
3. Показать, что данные прямые $x = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$ перпендикулярны.
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график:
 $x^2 + 8x + y + 15 = 0$.
5. Составить уравнение сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2; -4)$ и уравнения биссектрис двух его углов: $x + y = 2$ и $x - 3y = 6$.

Вариант 8

1. Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$ и $2x + 5y + 8 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 0)$ и $B(2; -1; -1)$ перпендикулярно плоскости $5x + 2y + 3z = 7$.
3. При каком значении α прямая $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ x + 4y - z + \alpha = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oz ?
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график:
 $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$.
5. Составить уравнение сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4; 2)$ и уравнения двух медиан: $3x - 2y + 2 = 0$ и $3x + 5y - 12 = 0$.

Вариант 9

1. В треугольнике ABC известны уравнения стороны AB : $4x + y = 12$ и двух его высот BH : $5x - 4y = 12$ и AM : $x + y = 6$. Написать уравнения двух других сторон треугольника.
2. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3; 2; -5)$.

3. При каком значении p прямые $\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = 2 - t, \\ z = pt - 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ параллельны?
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график:
 $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.
5. Прямые $3x + 4y - 30 = 0$ и $3x - 4y + 12 = 0$ касаются окружности радиусом $R = 5$. Вычислить площадь четырёхугольника, образованного этими касательными и радиусами круга, проведёнными в точки касания.

Вариант 10

1. Написать уравнения высот треугольника ABC , проходящих через вершины A и B , если известны координаты вершин: $A(-4; 2)$, $B(3; -5)$, $C(5; 0)$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:
 $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z}{2}$.
3. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x + 2y - z + 5 = 0$ с плоскостью, проходящей через точку $M(5; 3; 2)$ и ось Oy .
4. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить её график:
 $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$.
5. Составить параметрические уравнение прямой, которая проходит параллельно двум плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$ и $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$ и $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

Тесты

Введение в алгебру

Вариант 1.

1. Разделите число -15 на 4 с остатком.

$$\begin{aligned} -15 &= 4 \cdot (-3) - 3 \\ + \quad -15 &= 4 \cdot (-4) + 1 \\ -15 &= 4 \cdot (-5) + 5 \\ -15 &= 4 \cdot (-3) - 3 \end{aligned}$$

2. Разделите число 9 на 12 с остатком.

$$\begin{aligned} 9 &= 12 \cdot 1 - 3 \\ 9 &= 12 \cdot (-1) + 21 \\ + \quad 9 &= 12 \cdot 0 + 9 \\ \frac{9}{12} &= 0,75 \end{aligned}$$

3. Даны два отрицательных целых числа m и n . Известно, что любое из них делится на другое. Какое из следующих утверждений верно:

+ 1) m и n равны; 2) m и n взаимно просты; 3) $m = \pm n$; 4) $n = \pm m$.

4. Найдите НОД (21594, 28914).

$$\begin{aligned} &1 \\ &6 \\ &\pm 61 \\ + \quad &-366 \\ \text{5. Найдите НОК}(84, 60). \\ &6 \\ + \quad &\pm 420 \\ &\pm 840 \\ &5040 \end{aligned}$$

6. Даны канонические разложения двух чисел a и b : $a = 2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^1 \cdot 23^{13}$,
 $b = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 13^8 \cdot 23^3$. Чему равен их НОД?

$$\begin{aligned} + \quad &2^4 \cdot 5^3 \cdot 23^3 \\ &2^6 \cdot 5^7 \cdot 23^{13} \\ &2^4 \cdot 5^3 \cdot 11^1 \cdot 13^8 \cdot 23^3 \\ &2^6 \cdot 5^7 \cdot 11^1 \cdot 13^8 \cdot 23^{13} \end{aligned}$$

7. Даны канонические разложения двух чисел a и b : $a = 2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^1 \cdot 23^{13}$,
 $b = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 13^8 \cdot 23^3$. Чему равен их НОК?

$$\begin{aligned} &2^4 \cdot 5^3 \cdot 23^3 \\ &2^6 \cdot 5^7 \cdot 23^{13} \end{aligned}$$

$$2^4 \cdot 5^3 \cdot 11^1 \cdot 13^8 \cdot 23^3$$

$$+ 2^6 \cdot 5^7 \cdot 11^1 \cdot 13^8 \cdot 23^{13}$$

8. Какое из следующих представлений не является каноническим разложением целого числа:

1) $-2^5 \cdot 5^3 \cdot 17$; 2) $53 \cdot 2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^{12}$; + 3) $5^3 \cdot 13^7 \cdot 1517^3$; 4) -1889 .

9. Какое из следующих чисел является простым:

1) 1517; + 2) 3571; 3) 188912345013; 4) 51.

10. Дано два множества $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{1, 2\}$. Найти $A \times B$.

$\{(1, 2, 3, 5)\}$

$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 3), (1, 5), (5, 1), (2, 5), (5, 2)\}$

$\{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\}$

+ $\{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\}$

11. На множестве целых чисел задано отношение эквивалентности $\equiv_7$ - сравнение по модулю 7. Найти наибольшее отрицательное число в классе эквивалентности, содержащем число 101.

-11

-9

+ -4

-2

12. На множестве целых чисел задано отношение эквивалентности $\equiv_{12}$ - сравнение по модулю 12. Найти наименьшее натуральное число в классе эквивалентности, содержащем число 4295.

9

10

+ 11

12

13. Пусть множества A и B содержат соответственно 2 и 3 различных элементов. Сколько существует различных отображения из A в B ?

5

6

8

+ 9

14. Пусть множества A и B содержат соответственно по 3 и 4 различных элемента. Сколько существует различных инъективных отображения из A в B ?

7

12

+ 24

64

15. Пусть множества A и B содержат соответственно 3 и 2 различных элементов. Сколько существует различных сюръективных отображения из A в B ?

5

+ 6
8
9

16. Какое из следующих утверждений истинно:

1) на множестве всех четных натуральных чисел операция вычитания является алгебраической;

+ 2) на множестве всех четных отрицательных целых чисел операция сложения является алгебраической;

3) на множестве всех нечетных целых чисел операция сложения является алгебраической;

4) на множестве всех отрицательных рациональных чисел операция умножения является алгебраической ?

17. Определим бинарную операцию $*$ на множестве целых чисел так: $a * b = a^2 \cdot b$, где $\cdot$ – операция обычного умножения целых чисел. Какое из следующих утверждений истинно:

1) операция $*$ коммутативна,

2) операция $*$ ассоциативна,

+ 3) операция $*$ дистрибутивна слева относительно сложения целых чисел,

4) операция $*$ дистрибутивна справа относительно сложения целых чисел ?

18. Найдите комплексное число, равное выражению $A = (2 + i)^7 + (2 - i)^7$.

+ -556
-556 + 278i
556 - 278i
228i

19. Найдите комплексное число, равное i^{199} .

1
-1
+ -i
i

20. Используя тригонометрическую форму представления комплексных чисел, найдите комплексное число, равное выражению

$$A = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - \sqrt{3}i)^{15}}{(1 + i)^{20}}.$$

64i
32
+ -64
-32i

21. Какое из следующих равенств истинно:

1) $\sqrt{-5} = -\sqrt[2]{5}$, + 2) $\sqrt{-5} = \pm \sqrt[2]{5}i$, 3) $\sqrt{-5} = \pm \sqrt{5}i$, 4) $\sqrt{-5} = \sqrt[2]{5}i$.

22. Найти все корни 3-й степени из числа i .

$$i, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i \quad -i, \pm\sqrt{3} + i \quad i, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{3}i \quad + \quad -i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Вариант 2.

1. Разделите число -11 на 4 с остатком.

$$\begin{aligned} -11 &= 4 \cdot (-2) - 3 \\ + \quad -11 &= 4 \cdot (-3) + 1 \\ -11 &= 4 \cdot (-4) + 5 \\ -11 &= 4 \cdot (-2) - 3 \end{aligned}$$

2. Разделите число 8 на 11 с остатком.

$$\begin{aligned} 8 &= 11 \cdot 1 - 3 \\ 8 &= 11 \cdot (-1) + 19 \\ + \quad 8 &= 11 \cdot 0 + 8 \\ \frac{8}{11} &= 0,72(72) \end{aligned}$$

3. Даны два положительных целых числа m и n . Известно, что любое из них делится на другое. Какое из следующих утверждений верно:

+ 1) m и n равны; 2) m и n взаимно просты; 3) $m = \pm n$; 4) $n = \pm m$.

4. Найдите НОД (18564, 14127).

$$\begin{aligned} &1 \\ &\pm 3 \\ &\pm 17 \\ + \quad &-34 \end{aligned}$$

5. Найдите НОК(168, 120).

$$\begin{aligned} &12 \\ + \quad &\pm 840 \\ &\pm 1680 \\ &20160 \end{aligned}$$

6. Даны канонические разложения двух чисел a и b : $a = 2^8 \cdot 5^{14} \cdot 11^2 \cdot 23^{26}$, $b = 2^{12} \cdot 5^6 \cdot 13^{16} \cdot 23^6$. Чему равен их НОД?

$$\begin{aligned} + \quad &2^8 \cdot 5^6 \cdot 23^6 \\ &2^{12} \cdot 5^{14} \cdot 23^{26} \\ &2^8 \cdot 5^6 \cdot 11^2 \cdot 13^{16} \cdot 23^6 \\ &2^{12} \cdot 5^{14} \cdot 11^2 \cdot 13^{16} \cdot 23^{26} \end{aligned}$$

7. Даны канонические разложения двух чисел a и b : $a = 2^8 \cdot 5^{14} \cdot 11^2 \cdot 23^{26}$, $b = 2^{12} \cdot 5^6 \cdot 13^{16} \cdot 23^6$. Чему равен их НОК?

$$2^8 \cdot 5^6 \cdot 23^6$$

$$2^{12} \cdot 5^{14} \cdot 23^{26}$$

$$2^8 \cdot 5^6 \cdot 11^2 \cdot 13^{16} \cdot 23^6$$

$$+ 2^{12} \cdot 5^{14} \cdot 11^2 \cdot 13^{16} \cdot 23^{26}$$

8. Какое из следующих представлений не является каноническим разложением целого числа:

1) $-3^5 \cdot 7^3 \cdot 23$; 2) $61 \cdot 3^5 \cdot 17^3 \cdot 13^{12}$; + 3) $7^3 \cdot 17^7 \cdot 1537^3$; 4) -1889 .

9. Какое из следующих чисел является простым:

1) 1537; + 2) 3559; 3) 989123450163; 4) 63.

10. Дано два множества $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 3, 5\}$. Найти $A \times B$.

$$\{(1, 2, 3, 5)\}$$

$$\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 1), (1, 2), (1, 5), (5, 1), (2, 5), (5, 2)\}$$

$$\{(1, 3), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$$

$$+ \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (1, 5), (2, 5)\}$$

11. На множестве целых чисел задано отношение эквивалентности $\equiv_9$ - сравнение по модулю 9. Найти наибольшее отрицательное число в классе эквивалентности, содержащем число 101.

$$-9$$

$$+ -7$$

$$-5$$

$$-2$$

12. На множестве целых чисел задано отношение эквивалентности $\equiv_{17}$ - сравнение по модулю 17. Найти наименьшее натуральное число в классе эквивалентности, содержащем число 5296.

$$8$$

$$+ 9$$

$$15$$

$$16$$

13. Пусть множества A и B содержат соответственно 3 и 2 различных элементов. Сколько существует различных отображений из A в B ?

$$5$$

$$6$$

$$+ 8$$

$$9$$

14. Пусть множества A и B содержат соответственно по 3 и 5 различных элемента. Сколько существует различных инъективных отображений из A в B ?

$$8$$

$$15$$

$$+ 60$$

$$125$$

15. Пусть множества A и B содержат соответственно 5 и 1 различных элементов. Сколько существует различных сюръективных отображений из A в B ?

$$\begin{array}{r} 0 \\ + \quad 1 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

16. Какое из следующих утверждений истинно:

- 1) на множестве всех нечетных натуральных чисел операция вычитания является алгебраической;
- 2) на множестве всех нечетных отрицательных целых чисел операция сложения является алгебраической;
- + 3) на множестве всех четных целых чисел операция сложения является алгебраической;
- 4) на множестве всех отрицательных действительных чисел операция умножения является алгебраической ?

17. Определим бинарную операцию $*$ на множестве целых чисел так: $a * b = a^3 \cdot b$, где $\cdot$ – операция обычного умножения целых чисел. Какое из следующих утверждений истинно:

- 1) операция $*$ коммутативна,
- 2) операция $*$ ассоциативна,
- + 3) операция $*$ дистрибутивна слева относительно сложения целых чисел,
- 4) операция $*$ дистрибутивна справа относительно сложения целых чисел ?

18. Найдите комплексное число, равное выражению $A = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

$$\begin{array}{r} -4 \\ + \quad 2 \\ -4i \\ 2i \end{array}$$

19. Найдите комплексное число, равное i^{299} .

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ + \quad -i \\ i \end{array}$$

20. Используя тригонометрическую форму представления комплексных чисел, найдите комплексное число, равное выражению

$$A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7.$$

$$\begin{array}{r} 2i \\ 4 \\ + \quad -1 \\ -4i \end{array}$$

21. Какое из следующих равенств истинно:

$$1) \sqrt{-14} = -\sqrt[2]{14}, \quad + 2) \sqrt{-14} = \pm \sqrt[2]{14} i, \quad 3) \sqrt{-14} = \pm \sqrt{14} i, \quad 4) \sqrt{-14} = \pm \sqrt[2]{14} i.$$

22. Найти все корни 3-й степени из числа -1 .

$$-1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$-1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$-1, \pm \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$+ \quad -1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Векторная алгебра

Вариант 1.

1. Даны векторы $\vec{a} = (3, -5, 8)$, $\vec{b} = (-1, 1, -4)$. Найдите длину их суммы.

$$\begin{array}{r} 64 \\ 8 \\ + \quad 6 \\ 14 \end{array}$$

2. Даны вершины $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4, -1, 7)$. Найдите вторую координату вершины C параллелограмма.

$$\begin{array}{r} 0 \\ + \quad 1 \\ -1 \\ -2 \end{array}$$

3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, и $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Найдите $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

$$\begin{array}{r} 12 \\ + \quad 13 \\ 14 \\ 15 \end{array}$$

4. При каком значении параметра λ векторы $\vec{a} = \lambda \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\vec{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \lambda \mathbf{k}$ ортогональны?

$$\begin{array}{r} -3 \\ -5 \\ + \quad -6 \\ 91 \end{array}$$

5. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ ортогональны, $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$. Найдите $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$.

$$\frac{5}{12} + \frac{24}{144}$$

6. Даны векторы $\vec{a} = (3, -1, -2), \vec{b} = (1, 2, -1)$. Найдите третью координату вектора $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$.

$$\frac{10}{12} + \frac{14}{28}$$

7. Даны вершины пирамиды $A(2, 3, 4), B(4, 7, 3), C(1, 2, 2), D(-2, 0, -1)$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

$$+ \frac{11}{6}$$

8. Даны вершины пирамиды $A(2, 3, 4), B(4, 7, 3), C(1, 2, 2), D(-2, 0, -1)$. Найти площадь сечения, проходящего через середины ребер AB, AC, AD .

$$+ 0.5\sqrt{17.875}$$

9. Разложить вектор $\vec{a} = (3, 4)$ по векторам $\vec{b} = (3, -1)$ и $\vec{c} = (1, -2)$.

$$+ \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

10. Найти третью координату точки M , делящей отрезок BC в отношении 4:2, где $B(2, -4, 0)$ и $C = (1, 4, 5)$.

$$+ \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{11}{3} - \frac{2}{3} - \frac{5}{3}}$$

11. Какое из следующих равенств истинно для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$+ 1) (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b},$$

$$\begin{aligned} 2) (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} &= (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} + (\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b}, \\ 3) (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} &= (\bar{b} \cdot \bar{b})\bar{a} - (\bar{c} \cdot \bar{c})\bar{b}, \\ 4) (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} &= (\bar{b} \cdot \bar{c})\bar{a} + (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b}. \end{aligned}$$

Вариант 2.

1. Даны векторы $\bar{a} = (3, -5, 8)$, $\bar{b} = (-1, 1, -4)$. Найти длину их разности.

$$\begin{aligned} &64 \\ &8 \\ &6 \\ &+ 14 \end{aligned}$$

2. Даны вершины $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4, -1, 7)$. Найдите вторую координату вершины D параллелограмма.

$$\begin{aligned} &-1 \\ &+ -5 \\ &0 \\ &4 \end{aligned}$$

3. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, и $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$. Найдите $(\bar{a} - \bar{b})^2$.

$$\begin{aligned} &12 \\ &25 \\ &+ 37 \\ &40 \end{aligned}$$

4. При каком значении параметра λ векторы $\bar{a} = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ и $\bar{b} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}$ коллинеарны?

$$\begin{aligned} &4 \\ &-2 \\ &+ -6 \\ &3 \end{aligned}$$

5. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ ортогональны, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$. Найдите $|(3\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b})|$.

$$\begin{aligned} &5 \\ &12 \\ &24 \\ &+ 60 \end{aligned}$$

6. Даны векторы $\bar{a} = (3, -1, -2)$, $\bar{b} = (1, 2, -1)$. Найдите третью координату вектора $(2\bar{a} - \bar{b}) \times (2\bar{a} + \bar{b})$.

$$\begin{aligned} &4 \\ &20 \\ &93 \end{aligned}$$

$$+ \frac{28}{34}$$

7. Даны вершины пирамиды $A(2,0,4)$, $B(0,3,7)$, $C(0,0,6)$, $D(4,3,5)$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

$$+ \frac{2}{3}$$

8. Даны вершины пирамиды $A(2,0,4)$, $B(0,3,7)$, $C(0,0,6)$, $D(4,3,5)$. Найти высоту, опущенную на грань ACD .

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}$$

9. Разложить вектор $\vec{a} = (2,6)$ по векторам $\vec{b} = (2,0)$ и $\vec{c} = (3,3)$.

$$+ \vec{a} = -2\vec{b} + 2\vec{c}$$

10. Найти третью координату точки M , делящей отрезок BC в отношении 3:1, где $B(1,4,2)$ и $C(1,-3,3)$.

$$+ \frac{1}{-\frac{5}{4} + \frac{11}{4} - \frac{5}{4}}$$

11. Какое из следующих равенств истинно для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$+ \begin{aligned} & 1) (\vec{c} \times \vec{b}) \times \vec{a} = -(\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} + (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}, \\ & 2) (\vec{c} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}, \\ & 3) (\vec{c} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b}, \\ & 4) (\vec{c} \times \vec{b}) \times \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} + (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} \end{aligned}$$

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Учебная программа по дисциплине «Алгебра и Геометрия

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности 1-02 05 02 Физика и информатика

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования первая ступень специальность 1-02 05 02 Физика и информатика (ОСВО 1-02 05 02 – 2013 года) и учебного плана специальности 1-02 05 02 Физика и информатика (регистрационный № 139 – 2013/у от 25.07.2013 г.)

СОСТАВИТЕЛЬ:

А.А.Черняк, профессор кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», доктор физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

З.Н. Примичева, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники», кандидат физико-математических наук, доцент;

Ю.А.Быкадоров, доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математики и методики преподавания математики
(протокол №13 от 29.05.2018 г.);

Заведующий кафедрой _____И.Н.Гуло

Научно – методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»
(протокол №5 от 19.06.2018 г.)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1. Цели и задачи учебной дисциплины

Данная учебная программа по дисциплине «Алгебра и геометрия», входящей в цикл специальных дисциплин типового учебного плана, предназначена для студентов, обучающихся по специальностям 1–02 05 02 Физика и информатика.

Основными *целями* дисциплины являются:

- на основе первой составляющей программы (введение в алгебру и геометрию) обеспечить постепенный переход к абстрактным структурам на основе более естественных и адаптированных понятий.
- на основе второй составляющей программы (прямые и плоскости) изучить на базе векторной алгебры уравнений прямых и плоскостей в пространстве.
- на основе третьей составляющей программы (координатные векторные пространства) оснастить будущих преподавателей физики мощным аппаратом линейной алгебры.
- на основе четвертой составляющей программы (теория многочленов) сформировать теоретическую базу и инструментарий для изучения конечномерных расширений полей и многочленов над произвольными полями, играющих ключевую роль в теории защиты информации.

Таким образом, в процессе изучения дисциплины «Алгебра и геометрия» решаются следующие *задачи*:

- освоение основных алгебраических и геометрических понятий, утверждений и методов их обоснования;
- развитие способностей увязывать абстрактные идеи и методы высшей математики с конкретными задачами школьной алгебры и геометрии;
- рассмотрение вопросов школьной программы с достаточно общих позиций;
- формирование алгебраических и геометрических умений и навыков, необходимые для успешного изучения других математических дисциплин, физики и современных проблем защиты и безопасности информации.

2. Место учебной дисциплины в учебном процессе и ее связь с другими дисциплинами

Данная учебная программа по учебной дисциплине «Алгебра и геометрия», входящей в цикл вузовских дисциплин (компонент учреждения высшего образования) учебного плана, предназначена для студентов, обучающихся по специальности 1–02 05 02 Физика и информатика.

Актуальность изучения учебной дисциплины определяется той ролью, которую играет математика в жизни современного общества, ее влиянием на темпы развития научно-технического прогресса, а для студентов — будущих учителей — профессиональной направленностью.

Проникновение информационных технологий во все отрасли человеческой деятельности становится определяющим в тенденциях развития современной фундаментальной науки. В частности, прогресс в вычислительной технике не

только привел к возникновению новых направлений математики, но и стимулировал фундаментальные исследования в тех классических разделах алгебры, теории чисел и алгебраической геометрии (группы и поля, модульная арифметика, эллиптические кривые над конечными полями, булева алгебра и т.д.), которые еще недавно считались абстрактными и оторванными от практики.

С одной стороны, данная программа учитывает современные тенденции в математике и призвана сформировать навыки профессиональной оценки математических результатов, представить математику как единое целое, заложить фундамент для освоения теоретических основ информатики и физики. С другой стороны, она является естественным углублением и обобщением школьной математики и таких ее центральных разделов, как: системы линейных уравнений с двумя или тремя переменными; квадратные уравнения с одной переменной и некоторые типы уравнений более высокой степени; координатный метод на плоскости; взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Программа соответствует первой ступени обучения в системе многоуровневого физико-математического педагогического образования. Содержание программы рассчитано на творческую межпредметную взаимосвязь с другими учебными дисциплинами, предусмотренными учебным планом специальности («Математический анализ», «Общая физика», «Информационные системы и сети»).

3. Требования к освоению учебной дисциплины

Содержание программы направлено на приобретение студентами знаний и умений по основным понятиям и методам алгебры и геометрии, формирование и развитие способностей увязывать абстрактные идеи и методы с конкретными задачами алгебры и геометрии и их приложениями в физике и информатике, смежных математических дисциплинах (математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика).

Практические занятия должны быть направлены на приобретение студентами навыков использования полученных теоретических знаний при решении математических и прикладных задач. Методика их организации и проведения должна способствовать развитию способностей каждого студента и приобретению ими навыков самостоятельной работы. При проведении занятий необходимо использовать современные информационные технологии. Особое внимание требуется уделить учебно-методическому обеспечению самостоятельной работы студентов.

Методика проведения всех видов учебных занятий должна подчиняться основной задаче – подготовке учителей физики и информатики с достаточно широким математическим кругозором. Излагать материал следует доступно, при соблюдении разумной математической строгости, без перегрузки второстепенными деталями. При обилии новых абстрактных понятий и непривычного для недавнего школьника формализма в обосновании

утверждений и теорем, целесообразно выносить из лекционного курса громоздкие доказательства и, разбивая их на отдельные этапы-задачи, рассматривать на практических занятиях, заранее снабдив студентов соответствующим методическим материалом.

Практические занятия следует строить так, чтобы на каждом из них повторялся соответствующий теоретический материал и были закреплены основные навыки и умения владения математическим аппаратом на уровне, необходимом для изучения физических и информационных дисциплин. При этом занятия должны ориентироваться на широкое использование современных компьютерных технологий и технических средств обучения.

Целесообразно переходить к аксиоматике линейных пространств только после основательной пропедевтики понятий линейной независимости, ортогональности, ранга, базы в менее абстрактных координатных n -мерных векторных пространствах.

Тема «Многочлены над произвольным полем» должна следовать за теорией чисел и предшествовать теме «Многочлены над числовыми полями», поскольку свойства делимости многочленов имеют соответствующие аналоги в кольце целых чисел и не зависят от природы поля, над которым они рассматриваются; в то же время важные для приложений теоремы о неприводимости и корневой структуре многочленов с числовыми коэффициентами существенно зависят от вида числового поля и имеют индивидуальную доказательную базу.

4. Профессиональные компетенции студента

Требования к уровню усвоения содержания дисциплины «Алгебра и геометрия» определены образовательным стандартом высшего образования по специальностям 1–02 05 02 Физика и информатика, в котором с учетом компетентностного подхода определены общенаучные умения, система предметных знаний и комплекс методологических знаний.

Изучение учебной дисциплины «Алгебра и геометрия» должно обеспечить формирование у студентов академических, социально-личностных и профессиональных компетенций.

Требования к академическим компетенциям

Студент должен:

- АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- АК-2. Владеть методами научно-педагогического исследования.
- АК-3. Владеть исследовательскими навыками.
- АК-4. Уметь работать самостоятельно.
- АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).
- АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.
- АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.
- АК-10. Уметь осуществлять учебно-исследовательскую деятельность.

- АК-11. Уметь регулировать образовательные отношения и взаимодействия в педагогическом процессе.

Требования к социально-личностным компетенциям

Студент должен:

- СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.
- СЛК-4. Владеть навыками здоровьесбережения.
- СЛК-7. Быть способным к осуществлению самообразования и самосовершенствования профессиональной деятельности.

Требования к профессиональным компетенциям

Студент должен быть способен:

Обучающая деятельность

- ПК-3. Использовать оптимальные методы, формы, средства обучения.
- ПК-4. Осуществлять оптимальный отбор и эффективно реализовывать технологии воспитания.
- ПК-5. Организовывать и проводить учебные занятия различных видов.
- ПК-6. Организовывать самостоятельную работу обучающихся.

Воспитательная деятельность

- ПК-7. Эффективно реализовывать воспитательную деятельность.

Развивающая деятельность

- ПК-13. Эффективно реализовывать развивающую деятельность в качестве учителя-предметника и классного руководителя.
- ПК-14. Развивать навыки самостоятельной работы обучающихся с учебной, справочной, научной литературой и др. источниками информации.
- ПК-17. Предупреждать и преодолевать школьную неуспеваемость.

Ценностно-ориентационная деятельность

- ПК-21. Оценивать учебные достижения учащихся, а также уровни их воспитанности и развития.
- ПК-22. Осуществлять самообразование и самосовершенствование профессиональной деятельности.

В результате изучения учебной дисциплины «Алгебра и геометрия» студент должен

знать:

- теоремы делимости целочисленной арифметики;
- матричные операции, понятия определителя и критерии совместности систем линейных уравнений;
- свойства конечномерных линейных пространств;
- основные свойства групп и полей;
- уравнения фигур первого и второго порядка на плоскости и пространстве;

- теоремы делимости в кольце многочленов над произвольным полем, структуру поля многочленов по простому модулю;
- фундаментальные теоремы алгебры.

В результате изучения учебной дисциплины «Алгебра и геометрия» студент должен

уметь:

- применять аппарат векторной алгебры;
- производить операции над комплексными числами;
- решать системы линейных уравнений;
- решать полиномиальные уравнения 2-й, 3-й и 4-й степеней с действительными коэффициентами;
- применять теорию групп при решении прикладных задач;
- находить канонические разложения многочленов над основными числовыми полями.

В результате изучения учебной дисциплины «Алгебра и геометрия» студент должен

владеть:

- основными методами линейной алгебры и аналитической геометрии;
- навыками применения математического инструментария для решения физических задач.

5. Структура учебной дисциплины

Учебный план на изучение дисциплины «Алгебра и геометрия» предусматривает 376 часов в 1–3 семестрах, из которых 164 часа составляют аудиторные занятия: лекции – 80 часов), практические занятия – 84 часа (из них 6 часов УСРС), самостоятельная работа – 140 часов.

Форма контроля: 1 семестр – экзамен, 2 семестр – зачет, 3 семестр – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

1. Введение в алгебру

Целочисленная арифметика. Принцип математической индукции. Алгоритм Евклида. Простые числа. Основная теорема арифметики. Понятия группы и поля.

Поле комплексных чисел. Операции над комплексными числами. Тригонометрическая форма комплексного числа. Корни n -й степени из комплексных чисел.

Полиномиальные уравнения с действительными коэффициентами 2-й, 3-й, 4-й степеней и методы их решения.

Матрицы и операции над ними. Алгоритм Гаусса решения систем линейных уравнений. Определители и их применение. Основные свойства обратных матриц.

2. Векторная алгебра

Сложение векторов и умножение на скаляр. Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное и смешанное произведения векторов и их свойства.

3. Аналитическая геометрия

Уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Уравнения плоскости. Линии и поверхности второго порядка.

4. Элементы линейной алгебры

Координатные векторные пространства и подпространства. Базис и ранг системы векторов. Линейные операторы. Свойства самосопряженных и ортогональных операторов. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду.

5. Многочлены

Многочлены над произвольным полем. Делимость многочленов. Алгоритм Евклида. Простые многочлены. Теорема о числе корней многочлена. Фундаментальная теорема алгебры. Описание простых многочленов над числовыми полями. Канонические разложения многочленов над числовыми полями. Кольцо многочленов по модулю простого многочлена. Метод Штурма определения числа корней (и их локализация) многочленов над полем действительных чисел. Прикладные аспекты теории групп.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия, перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов				Самостоятельная работа	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литература	Формы контроля знаний
		лекции	практические (семинарские) занятия	УСР (лекций)	УСР (практика)				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 семестр									
1	Введение в алгебру	14	20		4	32			
1.1	Целочисленная арифметика.	4	4			6			
1.1.1	Принцип математической индукции. Алгоритм Евклида.	2						[7]	
1.1.2	Простые числа. Основная теорема арифметики.		2			6		[7]	Индивид. контрольные задания
1.1.3	Понятия группы и поля.	2	2					[2,4,7]	Электронные тесты

1.2	Поле комплексных чисел	4	2			10			
1.2.1	Операции над комплексными числами.		2			10		[2,4,7]	
1.2.2	Тригонометрическая форма комплексного числа.	2					Раздаточные материалы	[2,4,7]	
1.2.3	Корни n -й степени из комплексных чисел.	2					Раздаточные материалы	[2,4,7]	Электронные тесты
1.3	Полиномиальные уравнения с действительными коэффициентами 2-й, 3-й, 4-й степеней	4	8			4			
1.3.1	Полиномиальные уравнения 2-й степени с действительными коэффициентами.		2			4		[2,4,7]	Индивид. контрольные задания
1.3.2	Полиномиальные уравнения 3-й степени с действительными коэффициентами.	2	2					[2,4,7]	Индивид. контрольные задания
1.3.3	Полиномиальные уравнения 4-й степени с действительными коэффициентами.	2	4					[2,4,7]	Индивид. контрольные задания
1.4	Системы линейных уравнений. Алгоритм Гаусса. Определители.	4	4		2	12			
1.4.1	Матрицы и операции над ними.				2	2		[1,3]	
1.4.2	Алгоритм Гаусса решения систем линейных уравнений.	2						[1,3]	Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой
1.4.3	Определители и их применение.	2	2			10		[1,3]	Рейтинговая

									контрольная работа № 1
1.4.4	Основные свойства обратных матриц.		2					[1,3,5]	Коллоквиум
2.	Векторная алгебра	4	6			8			
2.1	Сложение векторов и умножение на скаляр.	2	3			8			
2.1.1	Сложение векторов и умножение на скаляр.	2						[12,13]	
2.1.2	Скалярное произведение векторов.		1			4		[12,13]	
2.1.3	Свойства скалярного произведения векторов.		2			4		[12,13]	Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой
2.2	Векторные произведения	2	3						
1.2.3	Векторное и смешанное произведения векторов и их свойства.	2						[12,13]	Коллоквиум
1.2.4	Применение векторной алгебры в задачах школьной геометрии		3				Раздаточные материалы	[12,13]	Рейтинговая контрольная работа № 2
3	Аналитическая геометрия	10	14		2				
3.1	Уравнения прямой на плоскости и в пространстве.	4	4						
3.1.1	Каноническое уравнение прямой	2						[16,17]	
3.1.2	Различные типы уравнений прямой	2	2					[16,17]	
3.1.3	Взаимное расположение прямых.		2		2		Пособие «Геометрия.	[16,17]	Отчеты по домашним практическим

							Курс лекций»: Частка 1. Глава 1: Вектарная алгебра і метад каардынат.		упражнениям с их устной защитой
3.2	Уравнения плоскости.	2	6			10			
3.2.1	Различные типы уравнений плоскости	1	2					[16,17]	
3.2.2	Взаимное расположение плоскости и прямой	1	4			10		[16,17]	Рейтинговая контрольная работа № 3
3.3	Линии и поверхности второго порядка	4	4						
3.3.1	Эллипс и эллипсоид вращения. Сфера.	2						[16,17]	
3.3.2	Окружность и сфера		2					[16,17]	Индивид. контрольные задания
3.3.3	Гипербола и гиперболоид вращения	1						[16,17]	
3.3.4	Парабола и параболоид вращения		2					[16,17]	
3.3.5	Универсальное свойство линий второго порядка	1					Пособие «Геометрия. Курс лекций»: Частка 1.		Индивид. контрольные задания

							Глава 2: Лінійні поверхні другого порядку		
	Всего:	28	32		4	50			Экзамен
2 семестр									
4	Элементы линейной алгебры	28	32		2	30			
4.1	Координатные векторные пространства и подпространства.	14	16			10			
4.1.1	Линейная зависимость и независимость систем векторов	4	4		2			[1,3,5]	
4.1.2	Геометрические линейные пространства и подпространства	4	6			10		[1,3,5]	
4.2.3	Базис и ранг системы векторов	6	6					[1,3,5]	
4.2	Линейные операторы.	14	16			20			
4.2.1	Матрицы линейных операторов	2	2					[1,3,5]	Индивид. контрольные задания
4.2.2	Линейные операторы специального вида	4	6					[1,3,5]	
4.2.3	Самосопряженные и ортогональные операторы	4	4					[1,3,5]	
4.2.4	Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду	4	4			20		[1,3,5]	
	Всего	28	32		2	30			Зачет
3 семестр									
5	Многочлены	26	14			60			

5.1	Многочлены над произвольным полем.	12	6			20			
5.1.1	Многочлены и операции над ними.	2	2					[1,4]	
5.1.3	Основные свойства делимости многочленов.	2	2					[1,4]	Устный опрос
5.1.4	Алгоритм Евклида и линейное представление наибольшего общего делителя.	2				20	Раздаточные материалы		
5.1.5	Простые многочлены. Теорема о числе корней многочлена.	2	2					[1,4]	Рейтинговая контрольная работа № 4
5.1.6	Кольцо многочленов по модулю простого многочлена.	2	2					[1,4]	Индивид. контрольные задания
5.3.2	Фундаментальная теорема алгебры	2	2				Раздаточные материалы	[1,4]	
5.2	Многочлены над числовыми полями	14	8			40			
5.2.1	Канонические разложения многочленов над полем комплексных чисел. Простые многочлены над полем комплексных чисел	2	2					[1,4]	Устный опрос
5.2.2	Канонические разложения многочленов над полем действительных чисел. Простые многочлены над полем действительных чисел.	2	4					[1,4]	Рейтинговая контрольная работа № 5
5.2.3	Необходимые признаки наличия	4	4			20		[1,4]	

	рационального корня многочлена над полем рациональных чисел.								
5.2.4	Метод Штурма определения числа корней (и их локализация) многочленов над полем действительных чисел.	4	4			20		[1,4]	Рейтинговая контрольная работа № 6
5.2.5	Прикладные аспекты теории групп.	2	6					[1,4]	Устный опрос
	Всего:	26	14		2	60			Экзамен

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – Санкт-Петербург: Лань, 2003.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб – Москва: Просвещение, 1966.
3. Черняк А.А. Алгебра в задачах и решениях. Часть 1: Линейная алгебра / А.А. Черняк. – Минск: БГПУ, 2007. – 100 с.
4. Черняк А.А. Алгебра в задачах и решениях. Часть 2: Алгебраические структуры, целочисленная арифметика, многочлены / А.А. Черняк. – Минск: БГПУ, 2008. – 110 с.
5. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Москва: Бином, Лаборатория базовых знаний, 2005.
6. Фадеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К.Фадеев, И.С. Соминский – Санкт-Петербург: Лань, 2001.
7. Шнеперман, Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. / Л.Б. Шнеперман. – Минск, 1977. – ч. 1. – 271 с.
8. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. – Минск, 2000. – 240 с.
9. Александров, А.Д. Основания геометрии / А.Д. Александров. – М.: Наука, 1987. – 286 с.
10. Александров, А.Д. Геометрия / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – М.: Наука, 1990. – 671 с.
11. Атанасян, Л.С. Сборник задач по геометрии; в 2 ч. / Л.С. Атанасян, В. А. Атанасян – М.: Просвещение, 1974. – ч. 1. – 256 с.
12. Атанасян, Л.С. Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов: в 2 ч. / Л.С. Атанасян. – М.: Просвещение, 1973. – ч. 1. – 480 с.

- 13.Атанасян, Л.С. Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов: в 2 ч. / Л.С. Атанасян, Г.Б. Гуревич – М.: Просвещение, 1976. – ч. 2. – 447 с.
- 14.Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов вузов: в 2-х ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1986. – ч. 1. – 304 с.
- 15.Егоров, И.П. Геометрия: спец. курс для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / И.П. Егоров. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.
- 16.Кузютин, В.Ф. Геометрия: учебник для вузов / В.Ф. Кузютин, Н.А. Зенкевич, В.В. Еремеев. – СПб.: Издательство «Лань», 2003. – 416 с.
- 17.Мусхелишвили, Н.И. Курс аналитической геометрии / Н.И. Мусхелишвили. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 656 с.
- 18.Погорелов, А.В. Геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 288 с.
- 19.Основания геометрии / под общ. ред. Ю.И. Соркина– М.: Гос. уч.-пед. издательство Минпрос. РСФСР, 1961. – 326 с.
- 20.Цубербиллер, О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О.Н. Цубербиллер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 336 с.

Дополнительная литература:

1. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч. / М.В. Миланов, Р.И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск, 2001. – ч. 1. – 400 с.
2. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч. / М.В. Миланов, Р.И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск, 2001. – ч. 2. – 352 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру / А.И.Кострикин. – Москва: Физматлит, 2004.

4. Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П.С. Александров. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
5. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – М.: Наука, 1968. – 911 с.
6. Базылев, В.Т. Геометрия. Ч. I / В.Т. Базылев, К.И. Дуничев, В.П. Иваницкая – М.: Просвещение, 1974. – 351 с.
7. Бахвалов, С.В. Сборник задач по аналитической геометрии / С.В. Бахвалов, П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
8. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для студентов вузов / Д.В. Беклемишев. – М.: Высш. шк., 1998. – 320 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ

САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Управляемая самостоятельная работа студента.

Примерный перечень заданий управляемой самостоятельной работы студента:

Тема 1: Матрицы и операции над ними.

Модуль 1. Умножение матриц специального вида: скалярные, диагональные, треугольные матрицы (практический минимум).

Модуль 2. Элементарные преобразования строк и столбцов матриц как результат умножения на подстановочные матрицы (теоретический минимум).

Модуль 3. Перестановочные матрицы: определения, теоремы, алгоритмы (продвинутый уровень).

Тема 2: Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве.

Модуль 1. Теоремы о взаимном расположении прямых на координатной плоскости (теоретический минимум).

Модуль 2. Теоремы о взаимном расположении прямых и плоскости в координатном пространстве (средний уровень).

Модуль 3. Симметрия прямых и точек относительно плоскости и прямой в координатном пространстве (продвинутый уровень).

Тема 3: Линейная зависимость и независимость систем векторов.

Модуль 1. Геометрические примеры линейной независимости (теоретический минимум).

Модуль 2. Примеры линейной независимости в алгебре (средний уровень).

Модуль 3. Эквивалентные определения линейной независимости (продвинутый уровень).

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА

Самостоятельную работу следует строить так, чтобы на ее основе повторялся соответствующий теоретический материал и были закреплены основные навыки и умения владения математическим аппаратом на уровне, необходимом для изучения физических и информационных дисциплин. При этом занятия должны ориентироваться на широкое использование современных компьютерных технологий и технических средств обучения.

Тематику разделов дисциплины, рекомендованных для самостоятельного изучения, студенты должны получать от преподавателя в начале семестра. Поэтому для организации самостоятельной работы студентов целесообразно разработать комплексы индивидуальных заданий, систему индивидуальных домашних контрольных работ по основным разделам курса математического анализа. С целью стимулирования труда и развития сильных студентов в

индивидуальные задания желательно включать задачи повышенной сложности, задачи творческого характера.

На самостоятельное проработку можно выносить как отдельные темы лекций, так и их части, в частности, рекомендуется выносить для самостоятельного изучения вопросы, которые в той или иной степени отражены в школьном курсе математики (решение уравнений 2-й степени, схема Горнера, нахождение НОД и НОК с помощью канонического разложения алгоритм нахождения простых чисел и т.д.). По мере изучения курса материал, рекомендованный студентам для самостоятельного изучения, должен усложняться. Однако содержание такого материала может содержать вопросы, которые не требуют сложных теоретических выкладок.

Самостоятельная работа студентов эффективна, если она протекает в форме делового взаимодействия: студент получает непосредственные указания, рекомендации преподавателя об организации и содержании самостоятельной деятельности, а преподаватель выполняет функцию управления через учет, контроль и коррекцию ошибочных действий. Рекомендуется регулярное проведение индивидуальных консультаций.

№ п/п	Название темы, раздела	Кол-во часов на СРС	Задание	Форма выполнения
1.1	Целочисленная арифметика.	6	[7] Канонические разложения натуральных чисел	Письменный отчет с решениями не менее 10 задач
1.2	Поле комплексных чисел	10	[2,4,7] Операции над комплексными числами	Письменный отчет с решениями не менее 10 задач
1.3	Полиномиальные уравнения с действительными коэффициентами 2-й, 3-й, 4-й степеней	4	[2,4,7] Решение уравнений 2-й степени в комплексными коэффициентами	Письменный отчет с решениями не менее 10 задач
1.4	Системы линейных уравнений. Алгоритм Гаусса. Определители.	12	[1,3] Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	Доказательство теорем (в письменном виде). Письменный отчет с решениями не менее 10 задач
2.1	Сложение векторов и умножение на скаляр.	8	[12,13] Операции над векторами в алгебраическом и координатном виде	Доказательство теорем (в письменном виде). Письменный отчет с решениями не менее 10 задач
3.2	Уравнения плоскости.	10	[16-17] Решение задач на взаимное расположение плоскости и прямой	Письменный отчет с решениями не менее 10 задач
4.1	Координатные векторные пространства и подпространства.	10	[1,3,5]. Подбор примеров геометрических линейные пространств и подпространств	Примеры (в письменном виде).

4.2	Линейные операторы.	20	[1,3,5] Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду	Письменный отчет с решениями не менее 10 задач
5.1	Многочлены над произвольным полем.	20	Раздаточные материалы. Применение алгоритм Евклида и линейное представление наибольшего общего делителя.	Письменный отчет с решениями не менее 10 задач
5.2	Многочлены над числовыми полями	40	[1,4] Применение необходимых признаков наличия рационального корня многочлена над полем рациональных чисел. Применение метода Штурма для определения числа корней (и их локализация) многочленов над полем действительных чисел.	Доказательство теорем (в письменном виде). Письменный отчет с решениями не менее 10 задач

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ

Для получения объективной информации о состоянии успеваемости студента, для обоснования результатов об эффективности использования тех или иных инновационных образовательных технологий, методов, приемов, форм обучения, для проектирования собственной педагогической деятельности с определенным контингентом студентов необходимо систематически проводить различные виды контроля: опережающий, текущий, тематический, итоговый и выпускной. Каждый из них применяется на определенном этапе обучения и, кроме оценки знаний, умений и навыков, выполняет в педагогическом процессе одну из функций: стимулирующую, обучающую, диагностическую, воспитательную и др.

Диагностика компетенций может проводиться в разных формах.

В устной форме:

- устный опрос на лекциях и практических занятиях;
- коллоквиумы.

В письменной форме:

- тесты;
- контрольные работы;
- письменные работы по аудиторным (домашним) практическим упражнениям;
- письменные экзамены.

В устно-письменной форме:

- отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой;
- экзамены;
- оценивание на основе модульно-рейтинговой системы.

В технической форме:

- электронные тесты.