Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»

Физический факультет

Кафедра общей физики

УМ25-01-45-2014

рег. № _______дата 27.06.2014

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан факультета
____________Соболь В.Р.	____________Соболь В.Р.
25.04 2014 г.	28.04 2014 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «Методы обработки результатов измерений»

для специальностей:

1-02 05 02 Физика и информатика;

1-02 05 04 Физика и техническое творчество

Составители:

Ч.М. Федорков, канд. пед. наук, доцент

А.Н. Редько, преподаватель

Рассмотрено и утверждено

на заседании Совета БГПУ 26.06.2014 г.   протокол № 9

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Методы обработки результатов измерений» предназначен для научно-методического обеспечения профессиональной подготовки будущих учителей физики и информатики. Учебно-методический комплекс составлен с учетом специфики подготовки дипломированных специалистов и требованиями образовательного стандарта для специальностей 1-02 05 02 «Физика и информатика» и кодекса Республики Беларусь об образовании (2010 г.).

Учебная дисциплина «Методы обработки результатов измерений» рассматривается в качестве важного компонента подготовки будущих учителей физики к профессиональной деятельности, формирования у них умений и навыков применять теоретические знания на практике в процессе выполнения лабораторных работ. Изучение дисциплины «Методы обработки результатов измерений» предполагает поэтапное формирование у студентов целостных, системных знаний о сущности и содержании типов измерений, видов погрешностей и их учета, приближенных вычислений и оценки результатов измерений. Данная учебная дисциплина имеет выраженный практический характер. Она предполагает повышение уровня теоретических знаний и формирование практических умений по их применению.

Целью данного учебно-методического комплекса является оказание помощи студентам в овладении методикой физического эксперимента, привитие навыков оценки результатов измерений.

Комплекс тем самым является надежным средством формирования профессиональной компетенции будущего учителя физики в области проведения прямых и косвенных измерений.

Задачами учебно-методического комплекса являются:

– раскрыть требования к содержанию учебной дисциплины «Методы обработки результатов измерений», к образовательным результатам, средствам их достижения и оценки;

– обеспечить эффективное освоение учебного материала по учебной дисциплине «Методы обработки результатов измерений»;

– обеспечить систему управления самостоятельной работой обучающихся при изучении учебного материала по дисциплине «Методы обработки результатов измерений»;

– способствовать формирование у студентов предпосылок для овладения в будущем всей требуемой совокупностью физических понятий, законов, принципов и теорий о физической сущности явлений в природе и технике;

– содействовать формированию у студентов измерительных умений, необходимых для проведения физического эксперимента.

В соответствии с положением об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования (2011 г.), учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Методы обработки результатов измерений» имеет следующую структуру:

– *теоретический раздел,* который содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины в объеме, установленном типовым учебным планом;

– *практический раздел,* который содержит материалы для организации и проведения лабораторных работ (методические указания к лабораторным работам).

– *раздел контроля знаний,* который содержит материалы текущей и итоговой аттестации (контрольный тест в пяти вариантах), позволяющие определить соответствие результатов учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации образовательных программ;

– *вспомогательный раздел,* который содержит элементы программной документации образовательной программы высшего образования, учебно-методической документации, перечень учебной литературы, как основной, так и дополнительной, интернет-источники.

Данный учебно-методический комплекс, направлен на подготовку специалистов на первой ступени обучения в системе многоуровневого естественно – научного, педагогического образования. Учебный материал комплекса разработан с учетом возможности его дальнейшего использования в процессе изучения курса общей физики, при проведении лабораторных занятий и организации самостоятельной исследовательской работы студентов.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Тема 1. Измерения и обработка результатов измерений

Измерение физических величин и получение их числовых значений являются непосредственной задачей большинства физических экспериментов. Однако результаты всех измерений, как бы тщательно они не выполнялись, всегда получаются с некоторыми погрешностями. Кроме того, результаты эксперимента или наблюдения зачастую представляют собой набор статистических данных, которые необходимо уметь правильно обрабатывать и интерпретировать. Это касается, безусловно, не только физического эксперимента, но и любой науки, оперирующей какими-либо экспериментальными или наблюдательными данными, в частности, таких областей, как медицина, экономика, социология и т. д.

Анализ и оценка погрешностей составляют предмет отдельной науки – теории ошибок, а теорией обработки статистических данных занимается тесно связанная с ней дисциплина – математическая статистика.

Умение работать с погрешностями, или «ошибками», является важной частью любого научного эксперимента на всех его этапах. Так, при подготовке и проведении эксперимента необходимо знать точность используемых приборов, уметь находить пути возможного уменьшения ошибок, разумно организовать сами измерения и правильно оценивать точность полученных значений. На этапе обработки возникает необходимость пересчитывать возможную ошибку в конечных результатах по известным оценкам погрешностей в исходных данных. А на самом важном этапе – интерпретации результатов эксперимента или наблюдения – без знания точности проведённых измерений и без корректной статистической обработки невозможно делать обоснованные выводы в пользу той или иной физической модели, той или иной гипотезы.

Здесь мы приводим лишь краткую выдержку самых базовых понятий теории ошибок и обработки экспериментальных данных, необходимых для работы в учебной физической лаборатории. Для более глу-бокого изучения данного предмета и разъяснения непонятных моментов рекомендуем обращаться к специальным руководствам, например, к прекрасной книге Дж. Тейлора [2], снабжённой множеством практических примеров и пояснений.

1.1. Измерения и их погрешности

Измерения делятся на прямые и косвенные.

Прямые измерения производятся с помощью приборов, которые измеряют непосредственно саму исследуемую величину. Так, массу тела можно найти с помощью весов, длину измерить линейкой, а время – секундомером.

К *косвенным* относятся измерения таких физических величин, для нахождения которых необходимо использовать теоретическую связь с другими, полученными в прямых измерениях, величинами, например, нахождение объёма тела по его линейным размерам, нахождение плотности тела по измеренным массе и объёму, расчёт сопротивления проводника по показаниям вольтметра и амперметра.

Качество измерений определяется их точностью. При прямых измерениях точность опытов устанавливается из анализа точности метода и прибора, а также из повторяемости результатов измерений. Точность косвенных измерений определяется погрешностью исходных прямых измерений и структурой соответствующей расчётной формулы.

Точность измерений характеризуется их погрешностями. Абсолютной погрешностью измерений называют разность между найденным на опыте $x_{\text{изм}}$ и истинным $x_{\text{ист}}$ значением физической величины. Обозначая абсолютную погрешность измерения величины x символом Δx, получим

$$\Delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}. \qquad (1)$$

Заметим, что по данной формуле значение погрешности вычислить невозможно, поскольку истинное значение физической величины $x_{\text{ист}}$ неизвестно. Напротив, погрешность Δx должна *оцениваться* из точности приборов, разброса экспериментальных данных, методики измерения и т. д. И именно на основании этой оценки мы можем делать вывод о значении $x_{\text{ист}}$ по измеренному $x_{\text{изм}}$. Если $\Delta x_{\text{оц}}$ – оценка погрешности измерения ($\Delta x_{\text{оц}} > 0$), то результат измерения можно представить в виде

$$x_{\text{ист}} = x_{\text{изм}} \pm \Delta x_{\text{оц}}, \qquad (2)$$

что означает, что $x_{\text{ист}}$ лежит в интервале $x_{\text{изм}} - \Delta x_{\text{оц}} < x_{\text{ист}} < x_{\text{изм}} + \Delta x_{\text{оц}}$ с некоторой достаточно высокой вероятностью (см. подробнее раздел 1.4).Кроме абсолютной погрешности Δx; часто бывает важно знать относительную погрешность ε_x измерений, которая равна отношению абсолютной погрешности к значению измеряемой величины:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} = \frac{x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}}{x_{\text{ист}}} \approx \frac{\Delta x_{\text{оц}}}{x_{\text{изм}}}. \qquad (3)$$

Качество измерений часто определяется именно относительной, а не абсолютной погрешностью. Например, одна и та же погрешность в 1 мм при измерении длины комнаты (для бытовых целей) не играет роли, при измерении ширины стола может быть существенна, а при определении диаметра болта совершенно недопустима. Это происходит потому, что относительная погрешность измерений в первом случае составляет $\sim 2 \cdot 10^{-4}$, во втором $\sim 10^{-3}$ $\sim 10^{-3}$, а в третьем может составлять 0,1 и более.

Отметим, что вместо того чтобы говорить об абсолютной и относительной *погрешности* измерений, часто говорят об абсолютной и относительной *ошибке*. Между терминами «погрешность» и «ошибка» нет никакого различия, и мы будем пользоваться ими обоими.

Без указания оценки погрешности результат измерения имеет малую ценность. Существенное занижение или завышение этой оценки относительно реальной точности проведённых измерений недопустимо, поскольку ведёт к неправильным выводам.

1.2. Классификация погрешностей

Говоря о погрешностях измерений, необходимо прежде всего упомянуть о *грубых погрешностях* (промахах), возникших вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. Грубых ошибок следует избегать. Если установлено, что они произошли, соответствующие измерения нужно отбросить.

Не связанные с грубыми ошибками погрешности опыта делятся на систематические и случайные.

Систематические погрешности сохраняют свою величину и знак или закономерно изменяются во время эксперимента. Они могут быть связаны с ошибками приборов (неправильная шкала, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта, неравные плечи весов) и с неправильной физической моделью, используемой при интерпретации опыта, например, при взвешивании тела малой плотности без учёта выталкивающей архимедовой силы воздуха, которая систематически занижает вес тела.

*Случайные погрешности м*еняют величину и знак от опыта к опыту. Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что довольно часто их результаты не в точности равны друг другу, а «пляшут» вокруг некоторого среднего значения.

Случайные погрешности эксперимента исследуются путём сравнения результатов, полученных при нескольких измерениях, проведённых в одинаковых условиях. Если при двух-трёх измерениях результаты совпали, то на этом следует остановиться. Если они расходятся, нужно попытаться понять причину расхождения и устранить её. Если устранить причину не удаётся, следует произвести 10–12 измерений и, записав все результаты, обработать их в соответствии с полученной закономерностью разброса величин.

Заметим, что различие между систематическими и случайными погрешностями является условным и связано с постановкой опыта. Например, производя измерение тока не одним, а несколькими одинаковыми амперметрами, мы превращаем систематическую ошибку, связанную с неточностью шкалы, в случайную ошибку, величина и знак которой зависят от того, какой поставлен амперметр в данном опыте.

Кроме того, можно разделить погрешности по происхождению на естественные (связанные со случайным характером изучаемого процесса), методические (связанные с несовершенством метода измерения или теоретической модели явления) и *инструментальные* (или приборные). Такое разделение также весьма условно, ибо, к примеру, любой прибор подвержен случайным факторам, а в основе его работы всегда лежит некий естественный процесс, который описывается некоторой, возможно несовершенной, теорией.

1.3. Систематические погрешности

К систематическим погрешностям относятся, как уже отмечалось, такие, которые обязаны своим происхождением действию неизменных по своей величине и направлению факторов. Эти погрешности невозможно обнаружить (а также исключить или уменьшить) просто путём многократного повторения опыта. Их условно можно разделить на несколько групп:

– Погрешности, природа которых известна и которые могут быть достаточно точно определены. Такие погрешности могут быть изучены и учтены путём прямого внесения поправок в расчётные формулы или в результаты измерений.

Например, при измерении напряжения или тока в цепи бывает необходимо учитывать неидеальность приборов (т. е. наличие малого, но не нулевого сопротивления у амперметра, или большого, но не бесконечного сопротивления у вольтметра).

– Погрешности известного происхождения, но неизвестной величины. Например, возможный сдвиг нуля шкалы некоторого прибора или отставание измеренной температуры тела от истинной при быстром нагревании тела. От такой погрешности можно избавиться, модифицируя методику измерения.

– Погрешности, о существовании которых мы не подозреваем, но которые могут существенно искажать результаты измерений. Такие погрешности самые опасные – они могут возникать в сложных измерениях и малоизученных областях исследования. Исключить их можно только независимой многократной проверкой измерений разными методами и в разных условиях.

Если систематическая погрешность опыта слишком велика, то обычно оказывается проще использовать новые, более точные приборы, чем исследовать погрешность старых.

Оценку систематических погрешностей экспериментатор проводит, анализируя особенности методики, паспортную точность прибора и проводя контрольные опыты.

В учебном практикуме учёт систематических ошибок ограничивается, как правило, лишь случаем инструментальных погрешностей (см. раздел 1.7).

1.4. Случайные погрешности

Случайные погрешности могут быть обнаружены при простом многократном повторении опыта. При определённых условиях статистические методы обработки данных могут помочь уменьшить результирующую ошибку. Случайные погрешности бывают связаны, например,

– с ***особенностями используемых приборов:*** с сухим трением (из-за которого стрелка прибора вместо того, чтобы останавливаться в правильном положении, «застревает» вблизи него), с люфтом в механических приспособлениях, с тряской, которую в городских условиях трудно исключить и т. д.

– с особенностью или несовершенством процесса измерения: например, при считывании экспериментатором показаний прибора, если стрелка находится в промежуточном положении между делениями, или при измерении времени секундомером, когда ошибка возникает ввиду конечного времени реакции человека;

– с несовершенством объекта измерений: например, при измерении диаметра проволоки, которая из-за случайных причин, возникающих при изготовлении, имеет не вполне круглое сечение;

– со случайным характером самой измеряемой величины: например, число космических частиц, регистрируемых счётчиком за 1 минуту, есть случайная величина. Повторяя измерения, найдём, что в разных опытах получаются разные числа, хотя и не слишком отличающиеся друг от друга, колеблющиеся около некоторого среднего значения.

Остановимся несколько подробнее на двух последних случаях. Они отличаются тем, что разброс данных в них порождён внешними по отношению к используемым приборам причинам, т. е. по причинам, которые можно назвать «естественными». При этом если погрешности приборов малы и значения физических величин могут быть измерены достаточно точно, то «ошибка», или «погрешность», возникает лишь при замене истинных значений (имеющих естественный разброс) на некоторое среднее и характеризует не столько точность измерения, сколько сам исследуемый процесс. Однако с *математической точки зрения естественные и приборные погрешности неразличимы* – глядя на одни только экспериментальные данные невозможно выяснить, что именно явилось причиной их отклонения от среднего. Для исследования природных случайных процессов необходимо отдельно исследовать и оценить имеющиеся инструментальные погрешности и убедиться, что они достаточно малы.

Случайные величины, к которым относятся случайные погрешности, изучаются в теории вероятностей и в математической статистике. Мы опишем – с пояснениями, но без доказательств – основные свойства и правила обращения с такими величинами в том объёме, который необходим для обработки результатов измерений, полученных в лаборатории.

Предположим, что мы проделали n измерений какой-либо величины x в условиях, когда промахи и систематические ошибки устранены и можно рассматривать только случайные ошибки. В результате этих измерений мы получим ряд значений $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Важнейшими характеристиками полученного набора величин является их среднее значение *(среднее арифметическое)*:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \tag{4}$$

и мера их разброса относительно среднего, в качестве которого берётся так называемое *среднеквадратичное отклонение*:

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{\text{ср}}\right)^2}\,. \tag{5}$$

Здесь индекс «отд» означает, что это погрешность отдельного измерения (ср. с разделом 1.5).

Если отклонения исследуемой величины происходят в положительную и отрицательную сторону с примерно равной вероятностью, то естественно предположить, что при суммировании в (4) они будут взаимно уничтожаться. В строгой форме это предположение доказывается в теории вероятностей: при некоторых достаточно общих предположениях об изучаемой случайной величине справедлив так называемый *закон больших чисел*, утверждающий, что при больших значениях n (т. е. $n \to \infty$) сумма (4) стремится к некоторому значению x_0^1:

$$\lim_{n\to\infty} x_{\text{ср}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0\,,$$

которое можно назвать «истинным» средним для данной случайной величины (в математике его называют *математическим ожиданием*). На практике обычно можно сделать лишь небольшое количество измерений, поэтому если разброс данных не слишком велик, т.е. ($\sigma_{\text{отд}} \ll x_{\text{ср}}$), то измеренное $x_{\text{ср}}$ можно отождествить с x_0:

$$x_0 \approx x_{\text{ср}}\,,$$

и при этом сделать вывод о том, что результат каждого отдельного измерения будет лежать с некоторой вероятностью P в интервале $\left(x_{\text{ср}} - \sigma_{\text{отд}},\, x_{\text{ср}} + \sigma_{\text{отд}}\right)$. Перейдём к теоретическому расчёт этой вероятности.

Распределение Гаусса. Чтобы оценить достоверность полученных результатов, необходимо обратиться к теоретическому рассмотрению случайных погрешностей отдельных измерений. Одним из центральных результатов теории вероятностей является так называемая *центральная предельная теорема*, которая утверждает, что сумма достаточно большого количества независимых (или слабо зависимых) случайных величин, каждая из которых вносит достаточно малый вклад в общую сумму, подчиняется так называемому *нормальному распределению* (или распределению Гаусса). А именно, вероятность того, что значение некоторой случайной величины окажется в интервале $\left(x, x + dx\right)$, равна:

$$dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{\left(x - x_0\right)^2}{2\sigma^2}} dx\,, \tag{6}$$

где x_0 и σ – параметры нормального распределения: x_0 соответствует среднему и наиболее вероятному значению x, а σ – среднеквадратичному отклонению. Величину σ^2 принято называть *дисперсией* распределения. Функцию

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

в физике обычно называют *функцией распределения*, а в математике – *плотностью вероятности* распределения Гаусса. В общем случае смысл её таков: если необходимо найти вероятность, с которой случайная величина лежит в интервале $(a,\ b)$, необходимо взять интеграл от соответствующей функции распределения f по x:

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Графики закона нормального распределения с различными значениями σ изображены на рис. 1. Распределение представляет из себя «колокол», положение вершины которого соответствует среднему и наиболее вероятному значению x_0, а ширина которого по порядку величины равна σ. При удалении x от центра, значение функции Гаусса очень быстро убывает, так что вероятность встретить достаточно большие отклонения от среднего крайне мала.

Точки $|x-x_0|=\sigma$ есть точки перегиба кривой Гаусса. Параметр σ есть мера рассеяния случайных погрешностей $\Delta x=|x-x_0|$. Если результаты измерений x группируются вблизи наивероятнейшего значения x_0 и значения случайных погрешностей δ в основном малы, то мала и величина σ (график 1, $\sigma=\sigma_1$). Наоборот, если случайные погрешности δ имеют большие значения и сильно рассеяны, то кривая становится более размытой (график 2, $\sigma=\sigma_2$) и $\sigma_2>\sigma_1$. Величина σ количественно отражает разброс значений измеряемой величины.

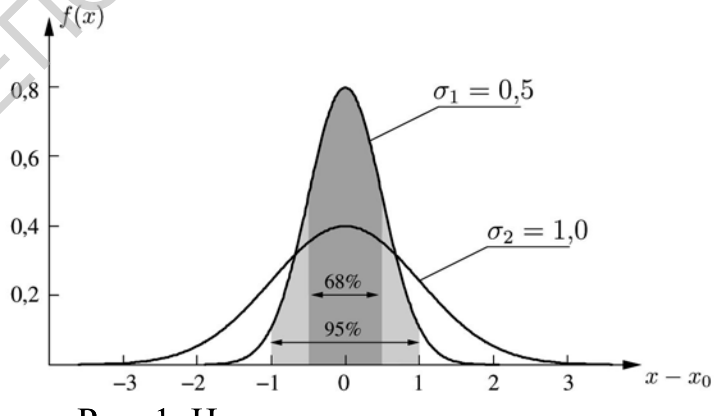

Рис. 1. Нормальное распределение

Обратимся теперь к расчёту упомянутой выше вероятности P для формулы (2). Значение интеграла

$$\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} f(x)\,dx,$$

равное отношению площади под кривой Гаусса, ограниченной значениями $\Delta x = \pm\sigma$ (на рис. 1 эта площадь заштрихована для $\sigma_1 = 0,5$, ко всей площади под кривой для любого σ, составляет 0,68, и запись

$$x = x_0 \pm \sigma \tag{7}$$

говорит о том, что любое проведённое измерение x с вероятностью $P = 0,68$ (68%) лежит в этом интервале.

Вероятность попадания любого проведённого измерения в промежуток $x = x_0 \pm 2\sigma$ составляет 0,95, а для $x = x_0 \pm 3\sigma$ вероятность равна 0,997.

Распределение Гаусса применимо в ситуациях, когда результирующая величина является суммой множества случайных и независимых факторов. Такая ситуация очень часто имеет место в научных экспериментах и наблюдениях, поэтому не случайно, что именно распределение Гаусса выбрано для определения вероятности отклонения при *стандартной записи результата* (2) – при этом в физике обычно под записью $\pm\Delta x$ имеется в виду одно стандартное отклонение и вероятность $P = 68\%$, а в технических измерениях, как правило, принимается, что $\pm\Delta x = \pm 2\sigma$ и соответственно $P = 95\%$.

Поправки при малом числе измерений. Если n – невелико (на практике, $n < 10$), то вычисленное по небольшому набору данных среднее $x_{ср}$ может заметно отличаться от искомого x_0, и поскольку в формулу для погрешности (5) мы подставляем именно $x_{ср}$, а не x_0 (которое нам не известно), то (5) даёт довольно грубую (заниженную) оценку $\sigma_{отд}$ (так, при $n = 1$ получаем $\sigma = 0$). Согласно математической статистике рекомендуется использовать следующую формулу (так называемая «несмещённая оценка» параметра σ):

$$\sigma_{отд} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{ср}\right)^2}\,.$$

Здесь $\sigma_{отд}$ – среднеквадратичная погрешность отдельного измерения или стандартная погрешность (стандартное отклонение), полученная путём измерений. Достоверность вычислений $\sigma_{отд}$ увеличивается с увеличением числа измерений n.

1.5. Погрешность среднего арифметического результата измерения

Практически нас больше интересует не точность каждого из измерений, а то, насколько измеренное нами среднее арифметическое $x_{ср}$ (вычисленное по формуле (4)) отличается от «истинного» среднего x_0.

Представим, что мы провели m серий по n измерений, и для каждой j-й серии, $j = 1..m$, нашли своё $x_{ср,\ j}$. Эти значения колеблются случайным образом около некоторого значения x_0 и их среднеквадратичное отклонение от этого значения определяется по формуле

$$\sigma_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{\text{ср},\,j} - x_0\right)^2} \text{ при } m \to \infty.$$

Несложно доказать (см. раздел 1.8), что если измеряемая величина имеет распределение Гаусса, то средняя квадратичная погрешность результата $\sigma_{\text{ср}}$ связана со средней квадратичной погрешностью отдельного измерения $\sigma_{\text{отд}}$ следующим образом:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Исходя из этого, на практике можно по одной проведённой серии из n измерений сделать вывод, что среднеквадратичная ошибка измеренного среднего равна

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{n}} \approx \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{\text{ср}}\right)^2}, \tag{10}$$

и результат многократного измерения величины x может быть представлен в виде

$$x = x_{\text{ср}} \pm \sigma_{\text{ср}}. \tag{11}$$

Эта запись утверждает, что наивероятнейшее значение измеряемой величины x с вероятностью 0,68 (68%) лежит в интервале $x_{\text{ср}} \pm \sigma_{\text{ср}}$.

Погрешность $\sigma_{\text{ср}}$ обычно называют стандартной *погрешностью опыта*, а её квадрат – дисперсией.

Если исходить из гипотезы о нормальности распределения, то погрешность результата измерений только в 5% случаях превосходит $2\sigma_{\text{ср}}$ и почти всегда оказывается меньше $3\sigma_{\text{ср}}$.

Следует иметь в виду, что при $n \sim 10$ измерение $\sigma_{\text{ср}}$ определяется с точностью до 20–30%. Поэтому расчёт погрешностей следует выполнять с точностью до двух знаков, не более.

1.6. О квадратичном сложении погрешностей

В теории вероятностей доказывается следующая теорема (см. [2], с. 132). Пусть имеются две *независимые* случайные величины x и y, каждая из которых подчиняется нормальному закону распределения со средними x_0 и y_0 и дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2. Тогда случайная величина $z = x + y$ также *подчиняется нормальному закону* со средним $z_0 = x_0 + y_0$ и дисперсией

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \tag{12}$$

Заметим, что формула (12) имеет место и для суммы произвольных (имеющих конечную дисперсию, не обязательно нормально распределённых) *независимых* случайных x и y.

В самом деле: пусть Δx и Δy – отклонения x и y от среднего. Тогда в силу независимости $\langle \Delta x \cdot \Delta y \rangle = \langle \Delta x \rangle \cdot \langle \Delta y \rangle = 0$, а значит:

$$\sigma_z^2 = \left\langle \left(\Delta x + \Delta y \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\Delta x \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\Delta y \right)^2 \right\rangle + \left\langle 2\Delta x \Delta y \right\rangle = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Кроме того, исходя из (12) несложно доказать формулу (9). Обозначая $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ и учитывая, что $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \ldots = \sigma_x$ (так как измеряется одна и та же физическая величина), получаем согласно данной теореме (в предположении, что измерения произведены независимо друг от друга), что

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \sigma_x^2} = \sqrt{n}\,\sigma_x.$$

откуда, поскольку $x_{\text{ср}} = s/n$, заключаем, что

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

1.7. Инструментальные погрешности

Погрешности измерительных приборов могут иметь как систематическую, так и случайную составляющую. Можно говорить о некоторой единой оценке погрешности прибора $\sigma_{\text{инстр}}$, которая учитывает обе составляющие.

Рассмотрим в качестве простейшего примера измерение длины линейкой. Один из источников погрешности – это необходимость выбора некоторого значения (интерполяции) между метками шкалы, и эта погрешность, называемая *погрешностью отсчёта* по шкале, очевидно, случайна (мы можем с равной вероятностью как переоценить, так и недооценить результат). С другой стороны, имеется вероятность того, что линейка дефектна (растянута или сжата, неточно нанесены штрихи), что, возможно, будет приводить к систематической погрешности.

В качестве другого типичного примера рассмотрим измерение напряжения вольтметром. Во-первых, погрешность $\sigma_{\text{приб}}$ прибора определяется производителем и указывается в паспорте или при маркировке (см. ниже), она представляет из себя оценку максимальной систематической ошибки при измерениях. Во-вторых, неизбежно существует погрешность отсчёта $\sigma_{\text{отсч}}$, которая для стрелочных приборов может быть оценена как половина цены деления, а для электронных – как величина, соответствующая последнему разряду на циферблате. Обычно, хотя и не всегда, производитель старается согласовывать погрешность отсчёта по шкале и погрешность прибора. И, наконец, при снятии показаний стрелка прибора или цифры на циферблате могут колебаться относительно некоторого значения. Это может быть связано, как уже говорилось, и с разного рода шумами внутри прибора, и с колебаниями измеряемой величины. Если мы записываем некоторое среднее значение колеблющегося напряжения, то разброс показаний прибора должен быть учтён в виде оценки случайной погрешности $\sigma_{\text{случ}}$. Как следует из предыдущего раздела, чтобы получить результирующую погрешность измерения, необходимо сложить отдельные составляющие среднеквадратичным образом:

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{приб}} + \sigma^2_{\text{отсч}} + \sigma^2_{\text{случ}}}\ .$$

Погрешности стрелочных электроизмерительных приборов (амперметров, вольтметров, потенциометров и т. п.) определяются их классом точности, который выражает абсолютную погрешность прибора в процентах от максимального значения включённой шкалы. Пусть на шкале вольтметра с диапазоном показаний от 0 до 10 В в кружке стоит цифра 1. Эта цифра показывает, что класс точности вольтметра 1 и предел его допустимой погрешности равен 1% от максимального значения включённой шкалы, т. е. равен ±0,1 В. Кроме того, надо иметь в виду, что наносить деления на шкале принято с таким интервалом, чтобы величина абсолютной погрешности прибора не превышала половины цены деления шкалы.

Класс точности стрелочных электроизмерительных приборов (как и полцены деления шкалы) определяет максимальную (предельную) абсолютную погрешность, величина которой не меняется вдоль всей шкалы. Относительная же погрешность при этом резко меняется, поэтому приборы обеспечивают лучшую точность при отклонении стрелки почти на всю шкалу. Отсюда следует рекомендация: *выбирать прибор (или шкалу многошкального прибора) так, чтобы стрелка прибора при измерениях находилась во второй половине шкалы*.

В последнее время широко используются цифровые универсальные приборы, в том числе и электроизмерительные, отличающиеся высокой точностью и многоцелевым назначением. В отличие от стрелочных приборов систематические погрешности цифровых электроизмерительных приборов оцениваются по формулам, приводимым в инструкциях по эксплуатации. Так, например, значение относительной погрешности в процентах универсального цифрового вольтметра В7-34, работающего на включённом пределе 1 В, оценивается по формуле

$$\varepsilon_x = \left[0{,}015 + 0{,}002\left(\frac{U_{kx}}{U_x}\right) - 1\right]\cdot\left[1 + 0{,}1\cdot\left|t - 20\right|\right],$$

где U_{kx} [В] – значение предела измерения (максимальное измеряемое напряжение), U_x [В] – значение измеряемой величины, t [°C] – температура.

Несколько слов о точности линеек. Металлические линейки относительно точны: миллиметровые деления наносятся с погрешностью не более ±0,05 мм, а сантиметровые не более чем с точностью 0,1 мм, так что считывание результата измерения можно проводить с помощью лупы, снабжённой дополнительной шкалой. Деревянными или пластмассовыми линейками лучше не пользоваться: их погрешности неизвестны и могут оказаться неожиданно большими. Исправный микрометр обеспечивает точность 0,01 мм, а погрешность измерения штангенциркулем определяется точностью, с которой может быть сделан отсчёт, т. е. точностью нониуса. У штангенциркулей цена делений нониуса составляет обычно 0,1 или 0,05 мм.

1.8. Сложение инструментальной и случайной погрешностей

Погрешность приборов зачастую имеет в своей основе систематическую составляющую. Однако мы обычно имеем дело только с оценкой погрешности и не знаем ни её знак, ни её величину. Можно говорить о вероятности нахождения измеренной величины x в некотором интервале $x \pm \sigma_{\text{инстр}}$. Поэтому при сложении с другими погрешностями опыта инструментальная погрешность учитывается наравне со случайной:

$$\sigma^2_{\text{полн}} = \sigma^2_{\text{инстр}} + \sigma^2_{\text{случ}}. \qquad (13)$$

Обратим внимание на важную особенность формулы (13). Пусть одна из ошибок, например, $\sigma_{\text{случ}}$ в 2 раза меньше другой – в нашем случае $\sigma_{\text{инстр}}$. Тогда

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{инстр}} + \sigma^2_{\text{случ}}} = \sqrt{\frac{5}{4}}\sigma_{\text{инстр}} \approx 1{,}12\sigma_{\text{инстр}}.$$

В нашем примере $\sigma_{\text{полн}} \approx \sigma_{\text{инстр}}$ с точностью 12%. Таким образом, меньшая погрешность почти ничего не добавляет к большей, даже если она составляет половину от неё. Следовательно, в том случае, когда случайная ошибка опытов хотя бы вдвое меньше инструментальной (систематической), нет смысла производить многократные измерения, так как полная погрешность опыта при этом практически не уменьшается. Измерения достаточно произвести 2–3 раза, чтобы убедиться, что случайная ошибка действительно мала.

То же самое относится и к любым двум погрешностям, складываемым среднеквадратично (см., например, ниже формулу для погрешности суммы): если одна из ошибок в два или более раза меньше другой, то меньшую ошибку можно считать пренебрежимо малой и отбросить ее.

1.9. Обработка результатов при косвенных измерениях

Погрешность суммы. Если исследуемая величина представляет собой сумму или разность двух измеренных величин

$$z = x \pm y, \qquad (14)$$

то наилучшее значение величины а равно сумме (или разности) наилучших значений слагаемых: $z_{\text{наил}} = x_{\text{наил}} \pm y_{\text{наил}}$, или, считая средние значения величин наилучшими,

$$z_{\text{наил}} = \langle x \rangle \pm \langle y \rangle. \qquad (15)$$

Здесь и в дальнейшем будем пользоваться стандартными в физике обозначениями: угловые скобки (или черта сверху) означают усреднение. Вместо того, чтобы писать $x_{\text{ср}}$, будем пользоваться обозначением $\langle x \rangle$ (или $\overline{x}$) и т. д.

Среднеквадратичная погрешность σ_z, если величины x и y независимы, находится, как уже было сказано, по формуле

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\,. \qquad (16)$$

Погрешность произвольной функции одной переменной. Если величина x измерена с малой погрешностью Δx $(\Delta x << x)$, то отклонение значения функции $z = f(x)$ от среднего при $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ может быть, согласно определению производной, записано как

$$\Delta z \approx \frac{df}{dx}\Delta x\,.$$

Тогда для среднеквадратичного отклонения можно записать:

$$\sigma_z = \left|\frac{df}{dx}\right|\sigma_x\,.$$

Например,

$$\sigma_{\ln x} = \frac{\sigma_x}{x},\ \sigma_{e^x} = e^x\sigma_x\,.$$

Погрешность в общем случае. Пусть $z = f(x, \mathrm{y}, \ldots)$. Тогда для наилучшего значения имеем

$$z_{\text{наил}} = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \ldots).$$

Согласно математическому анализу, малые приращения функций многих переменных складываются независимо, и для функции многих переменных справедливо разложение

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \ldots,$$

где под символом $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ понимается частная производная, т. е. обычная производная от f по x, взятая при условии, что все остальные аргументы функции f, кроме x, считаются константами. Отсюда формулу для расчёта результирующей погрешности нетрудно получить комбинируя (16) и (17):

$$\sigma_z = \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 \sigma_x^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 \sigma_y^2 + \ldots} \qquad (18)$$

Выпишем часто встречающийся частный случай формулы (18), когда

$$z = x^\alpha \cdot y^\beta \cdot \ldots \qquad (19)$$

Вводя относительные среднеквадратичные ошибки $\varepsilon_x = \sigma_x / x$ и $\varepsilon_y = \sigma_y / y$ подставляя (19) в (18), можно после некоторых преобразований получить

$$\varepsilon_z^2 = \alpha^2\varepsilon_x^2 + \beta^2\varepsilon_y^2 + \ldots \qquad (20)$$

Произведение и частное. В простейших случаях

$$z = xy \ \text{ и } \ z = x/y$$

имеем

$$\varepsilon_z^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2,$$

или

$$\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2. \qquad (21)$$

Таким образом, при вычислении произведения или частного относительные среднеквадратичные погрешности складываются квадратично.

Рассмотрим некоторые следствия, которые могут быть получены из анализа формул, приведённых в этом разделе. Прежде всего заметим, что следует избегать измерений, при которых искомая величина находится как разность двух больших чисел. Так, толщину стенки трубы лучше измерять непосредственно, а не определять, вычитая внутренний диаметр из внешнего (и, конечно, деля результат пополам). Относительная погрешность измерения, которая обычно представляет главный интерес, при этом сильно увеличивается, так как измеряемая величина – в нашем случае толщина стенки – мала, а ошибка в её определении находится путём сложения погрешностей измерения обоих диаметров и поэтому возрастает. Следует также помнить, что погрешность измерения, которая составляет, например, 0,5% от величины внешнего диаметра, может составить 5% и более от толщины стенки.

При измерениях, которые затем обрабатываются по формуле (21) (например, при определении плотности тела по его массе и объёму), следует определять все измеряемые величины с приблизительно одинаковой относительной точностью. Так, если объем тела измерен с погрешностью 1%, то при взвешивании с погрешностью 0,5% его плотность определяется с точностью 1,1%, а при взвешивании с погрешностью 0,01% – с точностью 1%, т. е. с той же практически точностью. Тратить силы и время на измерение массы тела с точностью 0,01% в этом случае, очевидно, не имеет смысла.

При измерениях, которые обрабатываются по формуле (19), следует обращать главное внимание на точность измерения величины, входящей в расчётную формулу с наибольшим показателем степени (см. формулу (20)).

Прежде чем приступить к измерениям, всегда нужно подумать о последующих расчётах и выписать формулы, по которым будут рассчитываться погрешности. Эти формулы позволят понять, какие измерения следует производить особенно тщательно, а на какие не нужно тратить больших усилий.

Тема 2. Представление результатов работы

2.1. Правила округления

Запись числовых значений, полученных в результате измерений, отличается от стандартной записи чисел, принятой в арифметике. При десятичной записи результата важно следить за тем, какие цифры соответствуют реально измеренным в эксперименте, а какие возникли исключительно в результате математических операций и находятся за пределами точности опыта.

Все цифры, начиная с первой ненулевой, называют значащими. Для корректной записи результата необходимо следить, чтобы количество значащих цифр было согласовано с погрешностью измерения. Перечислим правила, которыми необходимо руководствоваться при записи результатов:

– сама величина погрешности обычно лишь оценивается и определена с точностью не более 20%, поэтому величину ошибки нужно округлять до одной-двух значащих цифр:

правильно:	±3,	±0,2,	±0,08,	±0,14
неправильно:	±3,2,	±0,239,	±0,084,	±0,14349.

Величину ±0,14 не следует округлять до ±0,1, так как при этом округлении погрешность изменяется на 40%.

– последняя цифра записи результата измерения должна быть того же разряда, что и в погрешности:

правильно:	1,2430 ± 0,0012,	1,24 ±0,03,	5,2 ± 0,2
неправильно:	1,243 ± 0,0012,	1,243 ±0,03,	5,2 ± 2.

– Ноль на конце десятичного числа является значащей цифрой! Запись $l = 1,4$ м не эквивалентна $l = 1,40$ м, т.к. последняя подразумевает в 10 раз большую точность измерения. Также не эквивалентны, например, $m = 1$ т и $m = 1000$ кг.

– Если выбранная система единиц не позволяет удовлетворить вышеизложенным правилам, то необходимо воспользоваться нормальной формой записи числа (называемой также иногда научной или экспоненциальной) – например, если вес тела определён с точностью 0,5 кг и составляет 58,3±0,5 кг, то его можно выразить в граммах: $(583 \pm 5) \cdot 10^2$ г. Некорректно было бы написать 58300±500 г, поскольку такая запись формально подразумевает превышение точности как в измеренной величине, так и в оценке погрешности.

– Если погрешность физической величины не указана, то подразумевается, что она измерена с точностью до изменения последней значащей цифры на единицу. Например, запись $l = 1,42$ м эквивалентна $l = 1,42 \pm 0,01$ м или $l = 142 \pm 1$ см (но не эквивалентна $l = 1420$ мм или $l = 1420 \pm 10$ мм).

В промежуточных вычислениях, проводимых вручную, необходимо сохранять одну лишнюю значащую цифру, чтобы избежать ненужных ошибок округления. При вычислениях на калькуляторе необходимо следить, чтобы значащие цифры не вышли за пределы разрядности, для этого необходимо пользоваться только инженерными/научными калькуляторами, которые не имеют ограничений по разрядности и способны к представлению чисел в экспоненциальном (научном) виде. При использовании таких простых компьютерных средств обработки данных, как электронные таблицы (типа Excel), также необходимо следить, чтобы в результате промежуточных вычислений не потерялись значащие цифры (специализированные средства обработки статистических и экспериментальных данных об этом заботятся сами).

2.2. Анализ результатов эксперимента

По измеренным в учебной лаборатории результатам обычно необходимо сделать вывод о справедливости некоторого закона или сравнить измеренное значение с табличными данными. Сравнение должно осуществляться на основании оценки погрешности σ вашего эксперимента, с учётом того, что табличные данные есть тоже результат некоторого эксперимента, обычно существенно более точного, чем учебный.

Если отклонение полученного вами результата от ожидаемого превышает 2σ, то (при условии, что σ – погрешность конечного результата – оценена вами правильно) можно говорить о том, что с вероятностью 95% в эксперименте обнаружено отклонение от исследуемого закона или табличного значения измеренной вами величины. В таком случае имеет смысл задуматься над тем, какие особенности вашего опыта могли бы послужить причиной такого расхождения.

Заметим, что если значения отличаются от ожидаемых в несколько раз или тем более на несколько порядков, то в первую очередь необходимо искать ошибки в своих вычислениях (типичная ошибка студента – неправильный расчёт размерностей физических величин).

2.3. Построение и обработка графиков

Для построения графиков вручную следует использовать специальную бумагу: в клетку, миллиметровую, логарифмическую или полулогарифмическую. Размер графика не должен быть очень малым или очень большим. Лучше если он будет иметь размер от четверти до половины листа А4.

Для построения графиков с помощью компьютера необходимо использовать специализированное программное обеспечение, предназначенное для обработки экспериментальных данных и способное отображать не только экспериментальные точки, но и «кресты» погрешностей, проводить наилучшую прямую по методу наименьших квадратов (см. ниже), оценивать результирующую погрешность и т. д.

Приведённые ниже советы касаются в равной степени как построения графиков вручную, так и при помощи компьютера.

При построении графика, прежде чем наносить точки, нужно выбрать подходящий масштаб и начало отсчёта на осях координат. Желательно, чтобы наносимые точки располагались на всей площади листа.

По осям координат должны быть обозначены откладываемые функции и единицы измерения. Не обязательно наименовать все деления шкалы, но надо сделать столько надписей, чтобы ими было легко и удобно пользоваться. Писать их лучше на внешней стороне осей координат. Если используется бумага с сеткой, имеющей линии различной толщины, то на жирных линиях лучше располагать круглые значения величин. Наименование величины, откладываемой по оси абсцисс, пишется снизу у конца оси, а по оси ординат – вверху слева. Через запятую указывается единица измерения.

Точки, наносимые на график, должны изображаться чётко и ясно – лучше использовать специальные символы (звездочки, квадратики и т.д.), чтобы отличить экспериментальные точки от случайно поставленных помарок. Их следует наносить карандашом, чтобы можно было исправить при обнаружении ошибок. Не следует делать никаких загромождающих график больших пояснительных надписей или указывать около точек их числовые значения. Если пояснения необходимы, то точка или линия обозначаются цифрой и в тексте или на полях графика делается соответствующее пояснение. Точки, полученные в различных условиях, например, при нагревании и охлаждении, при увеличении и уменьшении нагрузки и т.д., полезно наносить различными значками или цветами.

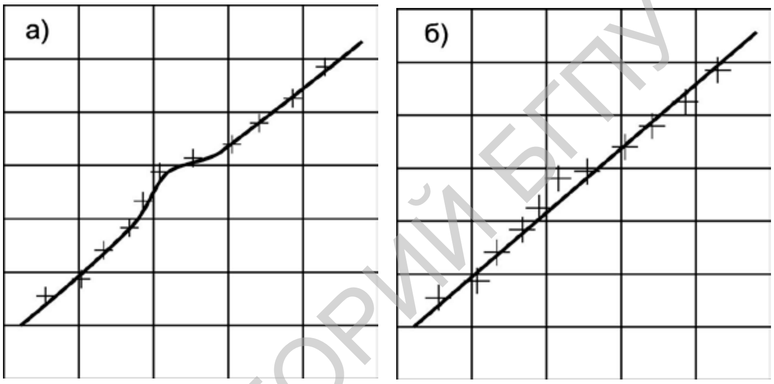

Рис. 2. Проведение линии по экспериментальным точкам

При нанесении на график экспериментальных точек, для которых известны погрешности, ***необходимо указывать эти погрешности*** отрезками линий, величина которых соответствует величине погрешности по каждой из переменных, определяющих точку. В таком случае *экспериментальной точке на графике соответствует крест*. Половина размера креста по горизонтали должна быть равна погрешности по оси абсцисс, а половина размера по вертикали – погрешности по оси ординат. В том случае, если одна из погрешностей – из-за своей малости – не может быть изображена графически, результаты изображаются чёрточками, вытянутыми на $\pm\sigma$ в том направлении, где погрешность не мала. Такое изображение экспериментальных точек необходимо для корректного анализа результатов, в частности, поиска зависимостей, наилучшим способом их описывающих, сравнение с теоретическими расчётами или результатами других исследований.

На рис. 2а, б, на которых изображены одни и те же экспериментальные точки при разных погрешностях измерений, график 2а, несомненно, указывает на нерегулярный ход изучаемой зависимости. Эта зависимость изображена на рисунке кривой линией. Те же данные при больших погрешностях опыта (рис. 2б) с успехом описываются прямой линией, так как только одно измерение отступает от этой прямой больше, чем на стандартную погрешность (и меньше, чем на две такие погрешности). То обстоятельство, что данные на рис. 2а требуют проведения кривой линии, а на рис. 2б не требуют, проясняется лишь при изображении результатов в виде креста погрешностей.

Функциональные зависимости. Часто измерения проводятся с целью получения или подтверждения зависимостей между измеряемыми величинами. В этих случаях необходимо по экспериментальным точкам провести соответствующую зависимость и, если нужно, найти погрешности измеряемых величин по разбросу экспериментальных точек. Легче всего по экспериментальным точкам проводить прямую линию. Поэтому если из теории или некоторых предположений известна возможная зависимость между измеряемыми величинами, то по осям координат надо отложить такие функции измеряемых величин, которые лучше соответствуют линейной зависимости.

Например, при исследовании зависимости времени падения t в поле тяжести от высоты h, с которой оно падает, по осям нужно отложить h и t^2, так как в однородном поле тяжести без учёта сопротивления воздуха квадрат времени падения пропорционален высоте падения: $h = gt^2/2$. Тогда ускорение определится из графика $h\left(t^2\right)$ просто как удвоенный угловой коэффициент наклона прямой.

Другой пример – часто встречающаяся (например, в химии) зависимость $y = A\,exp\left(-a/x\right)$. Чтобы определить коэффициенты A и a необходимо построить график в координатах (u, υ), где $u = \ln y$, $\upsilon = 1/x$. Тогда несложно получить, что $u = \ln A - a\upsilon$, и экспериментальные точки на графике в этих координатах должны ложиться на прямую.

Отметим особо логарифмический и полулогарифмический масштаб, когда по одной или по каждой из осей откладываются логарифмы соответствующих величин. Он удобен, в частности, в случае степенных зависимостей и больших диапазонов изменения переменных. Получающиеся линейные зависимости позволяют по графику найти показатель степенной зависимости.

Отдельно стоит вопрос о том, можем ли мы по измеренным на опыте значениям считать, что предполагаемая теоретическая зависимость подтверждена или опровергнута. Это один из важнейших вопросов теории обработки экспериментальных данных, существуют разные критерии для ответа на этот вопрос – из самых распространённых можно назвать *критерий* χ^2 *(хи-квадрат)*. Желающие могут ознакомиться с ним по соответствующим учебникам [2, 3].

2.3.1. Проведение наилучшей прямой

Графический метод. Существуют различные методы проведения прямых линий через экспериментальные точки. Самый простой способ, пригодный для оценки результатов, состоит в использовании прозрачной линейки или прозрачного листа с нарисованной на нем прямой линией. Благодаря прозрачности линейки видно, сколько точек находится по обе стороны от проводимой линии. Её надо провести так, чтобы по обе стороны было одинаковое количество экспериментальных точек. Параметры этой линии (наклон, пересечения с осями координат) измеряются непосредственно на графике. В результате получаем аналитическое выражение прямой $y = a + bx$, которая в общем случае при a, не равном нулю, не проходит через начало координат.

Случайные погрешности определения a и b можно оценить по графику следующим образом. Для оценки погрешности a находим величины, на которые надо параллельно сместить линию, чтобы число точек по обе стороны относилось, как 1:2 (рис. 3). То есть при смещении линии вверх по y на Δa_1 выше линии находится в два раза меньше точек, чем ниже её, а при смещении вниз на Δa_2 ниже её находится в два раза меньше точек, чем выше. Если всего экспериментальных точек n, то для оценки погрешности a имеем

$$\sigma_a = \frac{\Delta a}{\sqrt{n}}.$$

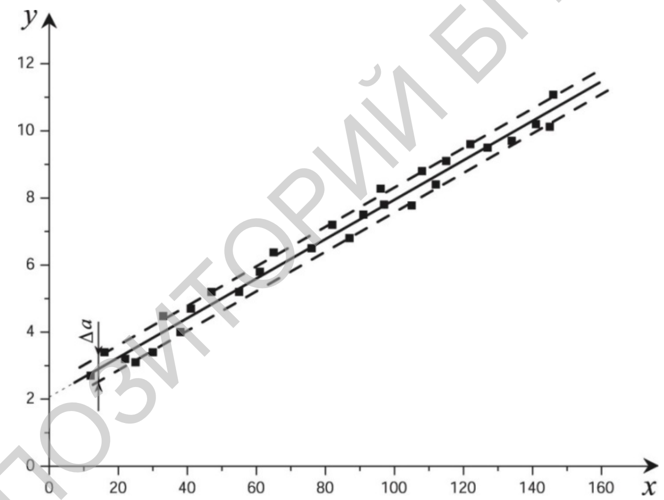

Рис. 3. Графический метод обработки результатов.
Оценка случайной погрешности параметра a

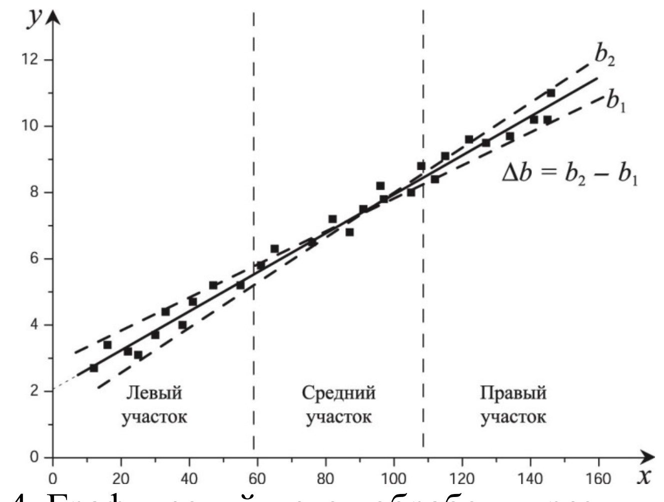

Рис. 4. Графический метод обработки результатов.
Оценка случайной погрешности параметра b

Для оценки погрешности коэффициента b надо диапазон изменения координаты x экспериментальных точек разделить на три равные части и поворачивать линию таким образом, чтобы в крайних частях соотношения числа точек на разных сторонах линии было 1:2 (рис. 4). То есть увеличиваем наклон линии до значения b_1 так, чтобы в левом крайнем участке над линией оказалось в два раза больше экспериментальных точек, чем под ней, а в правом крайнем участке под линией оказалось в два раза точек больше, чем над ней. Затем уменьшаем наклон линии до b_2 так, чтобы в левом крайнем участке под линией было в два раза больше точек, чем над ней, а в правом участке было под линией в два раза меньше точек, чем над ней. Для оценки погрешности b имеем

$$\sigma_b = \frac{\Delta b}{\sqrt{n}}.$$

В случае зависимости $y = kx$, проходящей через начало координат, для оценки погрешности коэффициента k также надо диапазон изменения координаты x разбить на три равные части. Точки в ближайшей к началу координат части не учитываются. Определяется k_1, при котором над линией находится точек в два раза меньше, чем под ней (из всех точек в средней и правой частях), и k_2, при котором соотношение числа точек над и под линией противоположное. Для оценки погрешности k имеем

$$\sigma_k = \frac{k_1 - k_2}{\sqrt{n}}.$$

Метод наименьших квадратов (МНК). Более точным и обоснованным методом проведения прямой линии по точкам является метод наименьших квадратов, который основан на минимизации суммы квадратов отклонений точек от прямой. Это означает, что коэффициенты a и b в линейной зависимости $y = a + bx$ находятся из условия минимума функции

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a - bx_i) \right]^2. \tag{22}$$

Здесь x_i и y_i – координаты экспериментальных точек.

Приведём окончательные формулы для a и b и их погрешностей через средние значения x_i и y_i.

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \tag{23}$$

$$a = \langle y \rangle - b \langle x \rangle. \tag{24}$$

Ошибки этих коэффициентов соответственно равны:

$$\sigma_b \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} - b^2}\,, \tag{25}$$

$$\sigma_a = \sigma_b\sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}\,. \tag{26}$$

Если известно, что точки должны описываться линейной зависимостью $y = kx$, проходящей через начало координат, то для коэффициента k и погрешности его определения получаем

$$k = \frac{\langle xy\rangle}{\langle x^2\rangle}, \tag{27}$$

$$\sigma_k \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\langle y^2\rangle}{\langle x^2\rangle} - k^2}\,. \tag{28}$$

Для ручной обработки этот метод довольно трудоёмкий, но при наличии калькулятора или компьютера он является наиболее предпочтительным.

Об ограничениях МНК. Метод наименьших квадратов имеет два существенных ограничения: во-первых, как несложно заметить, погрешность отдельного измерения никак не учитывается в МНК, во-вторых, он не способен учитывать возможную систематическую ошибку, а в- третьих, применение его обосновано лишь при достаточно большом количестве точек. Поэтому при оценке погрешности по формулам (25)–(28) следует быть осторожным: они не применимы в случае, когда количество точек мало, а погрешность измерения каждой точки велика или имеет преимущественно систематических характер. В этом случае необходимо при оценке погрешности пользоваться графическим методом (для проведения наилучшей прямой аналитические формулы (23), (24) вполне пригодны).

2.3.2. Экстраполяция и интерполяция

Бывают случаи, когда по экспериментальным точкам не надо находить описывающую их зависимость, а требуется определить лишь численное значение функции для переменной, лежащей где-то между экспериментальными точками. В таких случаях используются интерполяционные методы. В простейшем случае предполагается линейная зависимость между соседними точками и используются значения в этих точках. Для интерполяции по параболе (метод Симпсона) требуются значения в трёх точках.

Иногда возникает необходимость продолжить экспериментальный график за пределы измеренных значений. Такая операция называется экстраполяцией. Не существует каких-либо общих методов её проведения – экстраполяция должна выполняться исходя из конкретных теоретических предположений о возможном ходе функциональной зависимости. Чем дальше от экспериментальных данных проводится экстраполяция, тем, очевидно, меньше степень её достоверности.

В заключение ещё раз подчеркнём, что графики необходимы для наглядного представления результатов измерений. Они очень удобны для сравнения результатов экспериментов и теорий, выяснения качественных особенностей зависимостей, быстрых оценок характера изменения величин на отдельных участках. Однако *документом эксперимента является таблица с экспериментальными данными*.

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Лабораторный практикум

Работа 1.1. Измерение времени соударения шаров. Статистический метод оценки случайных погрешностей

Оборудование: штатив, шары, электронный счетчик-секундомер.

Введение

Измерить физическую величину – значит сравнить ее с однородной физической величиной, принятой за *единицу измерения*. Измерения, при которых искомая физическая величина определяется непосредственным сравнением, называют *прямыми*, а измерения, при которых искомая величина рассчитывается по результатам измерения других величин, связанных с ней определенной функциональной зависимостью, – *косвенными*.

Вследствие несовершенства органов чувств человека и измерительной аппаратуры при любых измерениях получаются лишь *приближенные значения измеряемых величин*. Требуется по результатам опытов найти наиболее близкое к *истинному* значение измеряемой величины и оценить допускаемую *погрешность*.

За приближенное значение принимается *среднее арифметическое* результатов n прямых измерений x_1, x_2, x_3, …, x_n

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

В соответствии с теорией вероятностей $\overline{x}$ является *математическим ожиданием измеряемой величины*.

Отклонение результата измерения x_i от истинного значения x называется *абсолютной погрешностью (ошибкой) измерения* $\Delta x_i = |x - x_i|$. Отношение абсолютной погрешности к истинному значению – *относительной погрешностью* $\delta = \Delta x_i / x$ (иногда выражается в процентах).

По характеру повторяемости погрешности измерений делятся на *систематические* и *случайные*. Погрешности, связанные с методом измерений, называют *методическими* (они могут быть как случайными, так и систематическими).

Систематическими называют погрешности, которые сохраняют или закономерно изменяют свой знак и величину от опыта к опыту. Они вызваны постоянными причинами: неправильной установкой или неисправностью прибора, неправильным отсчетом показаний, неудачно выбранным методом измерений. Систематические погрешности мы допускаем, например, при взвешивании на неравноплечных весах, при определении плотности вещества пористого тела по его массе и линейным размерам. Такие погрешности не могут быть обнаружены или уменьшены при увеличении числа измерений. Они обнаруживаются только при сравнении результатов с заведомо более точными и устраняются *поверкой* измерительных приборов или выбором более точного метода измерений.

Случайными называются погрешности, которые непредсказуемым образом меняют свой знак и величину от опыта к опыту. Они появляются вследствие несовершенства органов чувств (например, быстроты реакции), плохой повторяемости показаний приборов и многих других причин, которые не всегда можно учесть (движение окружающего воздуха, изменение температуры и т. п.). Увеличение числа измерений ведет к повышению точности результатов. Полностью устранить случайные погрешности невозможно, однако их можно оценить методами теории вероятностей, так как они подчиняются статистическим закономерностям.

Существует несколько способов оценки случайных погрешностей.

1. В простейшем случае указывается *предельная абсолютная погрешность* $\Delta x_{\text{пр}}$ – наибольшее отклонение результатов измерений от среднего арифметического. Например, если при измерении диаметра стержня получены значения: 5,2 мм, 5,8 мм, 6,0 мм, 5,1 мм, 5,4 мм, то среднее значение диаметра $\overline{x} = 5{,}5$ мм, а $\Delta x_{\text{пр}} = 0{,}5$ мм (рис. 1.1). В результате $x = (5{,}5 \pm 0{,}5)$ мм с вероятностью $\alpha = 1$ (то есть, все измеренные значения попали в интервал $\left]\overline{x} - \Delta x_{\text{пр}},\, \overline{x} + \Delta x_{\text{пр}}\right[$).

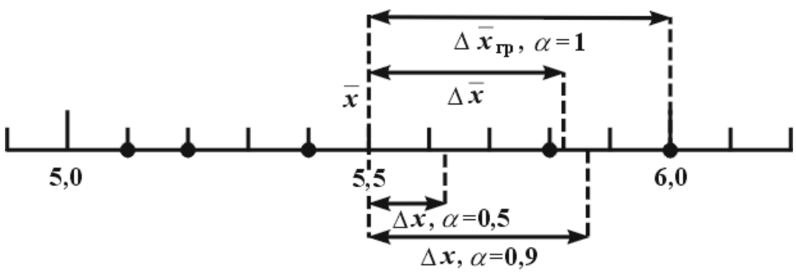

Рис. 1.1

Эта оценка является завышенной, так как показывает только границы области значений полученных ошибок, однако вследствие простоты часто применяется (например, для оценки погрешности отсчета электроизмерительных приборов).

2. Иногда находят *среднее арифметическое модулей погрешностей отдельных измерений*:

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\overline{x} - x_i\right|.$$

При этом считается, что все ошибки имеют одинаковые знаки, что мало вероятно. Данный способ также дает завышенную погрешность и не позволяет определить надежность результата (возможность попадания x_i в интервал $\left]\overline{x} - \overline{\Delta x},\ \overline{x} + \overline{\Delta x}\right[$).

Так, для рассмотренного примера $\overline{\Delta x} = 0{,}32$ мм, но, как видно из рис. 1.1, не все результаты попали в этот интервал. Вследствие своей простоты этот способ иногда применяется на практике.

3. Наиболее полную оценку случайных погрешностей дают *статистические методы*, основанные на законах распределения случайных величин.

Если случайная величина x

- принимает непрерывный ряд значений;
- одинаковые отклонения Δx данной величины от некоторого среднего значения $\overline{x}$ как в одну, так и в другую сторону повторяются одинаково часто (равновероятны);
- с увеличением отклонения Δx частота (вероятность) его появления уменьшается,

то эта величина подчиняется *нормальному закону распределения Гаусса* (рис. 1.2).

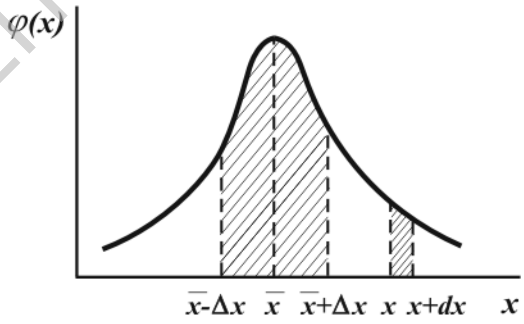

Рис. 1.2

При большом числе опытов случайные погрешности часто удовлетворяют такому закону.

Плотность распределения $\varphi(x)$ *случайной величины* x выражает вероятность $d\alpha$ ее попадания в бесконечно малый интервал $\left]x,\ x + dx\right[$:

$$d\alpha = \varphi(x)dx.$$

Вероятность α попадания результата измерения x_i в интервал $\left]\overline{x}-\Delta x, \overline{x}+\Delta x\right[$ (а ошибки измерения Δx_i, соответственно, в интервал $\left]-\Delta x, +\Delta x\right[$) равна площади фигуры, ограниченной кривой $\varphi(x)$:

$$\alpha = \int_{\overline{x}-\Delta x}^{\overline{x}+\Delta x} \varphi(x)dx .$$

Эта вероятность называется *доверительной вероятностью* (или *надежностью*) результата, интервал $\left]\overline{x}-\Delta x, \overline{x}+\Delta x\right[$ – *доверительным интервалом*, а его полуширина Δx – *доверительной погрешностью* для данной α.

Возможный разброс значений среднего арифметического около истинного значения характеризуется его *стандартным отклонением*:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}-x_i\right)^2} .$$

При большом числе измерений в качестве *доверительной погрешности* Δx берут σ, доверительная вероятность при этом $\alpha \approx 0,68$. С расширением интервала вероятность возрастает ($\alpha = 0,95$ при $\Delta x = 2\sigma$ и $\alpha = 0,997$ при $\Delta x = 3\sigma$).

Следует помнить, что распределение Гаусса справедливо только для большого числа измерений; при небольшом числе опытов $(3 \le n \le 20)$ необходимо пользоваться *распределением Стьюдента*. В этом случае доверительная погрешность находится по формуле:

$$\Delta x = t_{\alpha n}\sigma ,$$

где $t_{\alpha n}$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа измерений n и доверительной вероятности α (табл. XI).

Окончательный результат записывается в виде $x = \overline{x} \pm \Delta x$ с вероятностью α.

В нашем примере $\sigma = \sqrt{\frac{1}{5\cdot 4}(0,3^2+0,3^2+0,5^2+0,4^2+0,1^2)} \approx 0,17$.

При невысокой надежности $\alpha = 0,5$ коэффициент $t_{\alpha n} = 0,74$ и интервал неширок ($\Delta x = 0,74\cdot 0,17 \approx 0,13$ (мм)), однако многие результаты не укладываются в него. Для повышения надежности результатов необходимо расширять интервал: при $\alpha = 0,9$ – $\Delta x = 0,36$ мм, а при $\alpha = 0,98$ – $\Delta x = 0,63$. Все результаты попадают в этот интервал (в самом деле, вероятность 0,98 означает, что 98 результатов из 100 должны попасть в указанный интервал).

При большом числе измерений $n \ge 20$ распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса (при $n \to \infty$ коэффициент $t_{\alpha n} \to 1$, для вероятности $\alpha = 0,68$). *Предельная оценка погрешности* является частным случаем вероятностной при $\alpha = 1$.

При наличии случайных погрешностей с увеличением числа измерений доверительная погрешность уменьшается, так как стандартное отклонение σ и коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ для данной надежности α убывают.

Статистический метод позволяет также обнаружить и устранить *промахи* – т. е. грубые ошибки, вызванные чаще всего внезапной поломкой прибора или невнимательностью экспериментатора. Действительно, результаты, которые не попали в доверительный интервал при очень высокой вероятности (например, $\alpha = 0,99$), являются промахами. Если среди результатов измерений оказывается значение x_k, которое резко выделяется, то находят коэффициент промаха:

$$\nu = \frac{\left|\overline{x} - x_k\right|}{\sqrt{n} \cdot \sigma}.$$

Если его значение окажется больше предельного для данного числа опытов $\nu > \nu_{\text{пр}}$ (табл. XII), то этот результат должен быть отброшен и вычислены новые $\overline{x}$ и σ.

Проверим, является ли промахом в рассмотренном примере результат $x = 6,0$ мм, который наиболее отличается от среднего арифметического $\overline{x} = 5,5$ мм. Для этого вычислим:

$$\nu = \frac{\left|5,5 - 6,0\right|}{\sqrt{5} \cdot 0,17} \approx 1,32.$$

Как видно из таблицы XII, этот результат промахом не является, так как $\nu < \nu_{\text{пр}} = 1,96$.

Таким образом, статистический метод позволяет:

- при заданном числе измерений n и надежности α оценить доверительную погрешность Δx;
- при заданном числе измерений n и погрешности Δx определить доверительную вероятность (надежность) результата α;
- определить необходимое число измерений для получения требуемых погрешности и надежности;
- обнаружить и устранить промахи.

Описание установки и метода. На штативе подвешены два металлических шара, соединенных при помощи тонких проводников с электронным счетчиком-секундомером, который состоит из генератора *Г* и счетчика импульсов с числовой индикацией *С* (рис. 1.3).

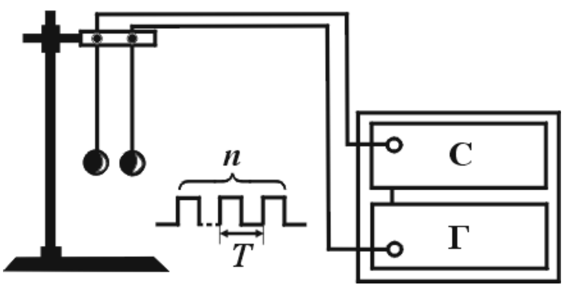

Рис. 1.3

Генератор посылает импульсы частотой ν. Счетчик подсчитывает количество n импульсов, которые проходят через замкнутую цепь за время соударения шаров. Таким образом:

$$\tau = nT = \frac{n}{\nu},$$

где T – период следования импульсов. Пределы измерения времени зависят от частоты генератора (при $\nu = 100$ Гц одна единица счета соответствует $t_m = 10$ мс, при $\nu = 100$ кГц $t_m = 10$ мкс).

Порядок выполнения работы

1. Электронным счетчиком-секундомером измерьте время соударения шаров t_i (не менее 20 раз).

2. Вычислите среднее арифметическое $\bar{t}$.

3. Найдите отклонения результатов отдельных измерений $\Delta t = \bar{t} - t_i$ и их квадраты.

4. Результаты запишите в таблицу:

i	t_i, 10^{-5} с	Δt_i, 10^{-5} с	Δt_i^2, 10^{-10} с^2

5. Вычислите стандартное отклонение среднего арифметического σ.

6. Найдите значение доверительной вероятности α. По таблице XI найдите коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ для данного числа опытов n.

7. Вычислите доверительную погрешность Δt.

8. Проделайте те же операции для трех значений доверительной вероятности α (0,5; 0,9; 0,999) и трех значений числа измерений n (3; 5; 20).

9. Результаты запишите в таблицу:

n	$\bar{t}$, 10^{-5} с	σ	α	$t_{\alpha n}$	Δt, 10^{-5} с

10. Сделайте вывод.

Контрольные вопросы

1. Какие измерения называют прямыми? Косвенными?

2. Какие ошибки называются случайными? Систематическими? Методическими? Назовите причины, которые их вызывают.

3. Каков смысл плотности распределения случайных величин?

4. Какое распределение случайных погрешностей справедливо при большом числе измерений? При малом?

5. Что понимают под доверительной вероятностью? Доверительным интервалом? Доверительной погрешностью?

6. Как вычислить доверительную погрешность?
7. От чего зависит коэффициент Стьюдента?
8. Как обнаружить промахи?
9. В чем заключается принцип работы электронного счетчика-секундомера?
10. Какое минимальное время можно измерить электронным счетчиком-секундомером с частотой генератора 10 Гц? 1 кГц?

Работа 1.2. Определение линейных размеров и объемов тел. Обработка результатов измерений

Оборудование: штангенциркуль, микрометр, исследуемые тела.

Введение

Погрешности любого измерения складываются из ошибок, вызванных разными причинами. Основные источники погрешностей – несовершенство методов и средств измерения, неблагоприятные объективные и субъективные условия, особенности вычислений.

Основные *инструментальные погрешности* для всех средств измерения нормируются ГОСТами. Обычно они указываются в паспорте, а также на шкале прибора. Погрешности большинства средств измерений определяются их *классом точности,* который численно равен относительной погрешности, выраженной в процентах.

Для электро- и радиоизмерительных приборов берется так называемая *приведенная относительная погрешность* (т. е. отнесенная к пределу шкалы). Некоторые средства измерений делятся на классы точности по абсолютной погрешности (например, гири весов имеют пять классов точности, установленных ГОСТом).

Дополнительные инструментальные погрешности вызваны неисправностью прибора или отклонением от правил эксплуатации и практически устраняются при точном соблюдении правил. При необходимости оценку точности удобно проводить в виде *поправок.*

Погрешность отсчета $\Delta_{\text{отсч}}$ *прибора с непрерывным отчетом* (указатель такого прибора может находиться в любом месте между двумя штрихами шкалы) принимается равной половине цены деления шкалы, так как при отсчете результата делается ошибка не более половины деления ($\Delta_{\text{отсч}} = c/2$).

Погрешность отчета $\Delta_{\text{отсч}}$ *прибора с дискретным отсчетом* (такой прибор имеет числовую шкалу либо указатель, который двигается скачкообразно) равна цене деления шкалы или единице числа ($\Delta_{\text{отсч}} = c$).

Если граница измеряемого объекта не может быть точно определена (например, «размытое» изображение на экране), то абсолютная погрешность определяется характером нечеткости границ.

Необходимо учитывать также *методические погрешности*. Так, при измерении длины l математического маятника, в качестве которого используется шарик на нити, за Δl необходимо взять радиус шарика R, даже если длина нити l измеряется линейкой с погрешностью $\Delta_{\text{отсч}} = 0{,}5$ мм.

Цель любого измерения заключается в нахождении приближенного значения измеряемой величины, а также в оценке допускаемой погрешности. Исходными данными служат результаты прямых измерений и предварительного учета погрешностей.

Рассмотрим методы оценки погрешностей при прямых и косвенных измерениях.

Прямые измерения

1. Если результаты прямых повторных измерений x_i отличаются друг от друга, (что указывает на наличие случайных погрешностей), то за приближенное значение измеряемой величины принимается среднее арифметическое результатов прямых измерений:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{1}$$

В общем случае погрешности прямых измерений определяются вкладом как случайных, так и систематических ошибок и должны оцениваться в форме ориентировочной доверительной погрешности по формуле:

$$\Delta x = \gamma\sqrt{\sigma_{\text{сл}}^2 + \sigma_{\text{ин}}^2 + \sigma_{\text{отсч}}^2 + \ldots}\,, \tag{2}$$

где γ – коэффициент неравенства Чебышева для заданной доверительной вероятности α (табл. XIII).

Вклад случайных погрешностей оценивается *стандартным отклонением среднего арифметического* $\overline{x}$ результатов измерений:

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}\,. \tag{3}$$

Оценки всех других погрешностей (инструментальной $\sigma_{\text{ин}}$, отсчета $\sigma_{\text{отсч}}$ …) также представляются в форме стандартных отклонений. Если какая-либо из погрешностей имеет предельную форму Δ, то принимается $\sigma = \Delta/3$, а для погрешностей отсчета $\sigma_{\text{отсч}} = c/\sqrt{12}$, где c – цена деления шкалы.

При использовании высокоточных приборов и корректных методов величинами $\sigma_{\text{ин}}$, $\sigma_{\text{отсч}}$ в формуле (2) можно пренебречь (на практике отбрасывают все несущественные $\sigma \le \sigma_{\max}/3$, где $\sigma_{\max}$ – наибольшее из стандартных отклонений).

Если остаются только случайные погрешности, их оценка дается в форме доверительного интервала:

$$\Delta x = \sigma\, t_{\alpha n}\,, \tag{4}$$

где $t_{\alpha n}$ – коэффициент Стьюдента для заданной доверительной вероятности α. В этом случае с увеличением числа измерений точность повышается (т. к. для заданной α уменьшается $t_{\alpha n}$ и, следовательно, Δx). Однако она не может превышать точности прибора. Поэтому число измерений следует увеличивать лишь до тех пор, пока случайная погрешность не станет сравнимой с инструментальной ($\sigma_{\text{сл}} \approx \sigma_{\text{ин}}$).

2. Если при повторных измерениях получается один и тот же результат, (что указывает на незначительный вклад случайных погрешностей), то увеличение числа измерений не имеет смысла. Этот результат и принимается за приближенное значение измеряемой величины $\bar{x}$.

Погрешность в этом случае оценивается в предельной форме ($\alpha = 1$) как сумма:

$$\Delta x = \Delta_{\text{ин}} + \Delta_{\text{отсч}} + \ldots$$

Косвенные измерения

При косвенных измерениях за приближенное значение измеряемой величины $\overline{U}$ принимается $\overline{U} = f(\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z})$, где $\bar{x}$, $\bar{y}$, …, $\bar{z}$ – среднеарифметические значения результатов прямых измерений. Погрешность косвенных измерений включает в себя погрешности всех величин, входящих в уравнение измерения, а также погрешности вычислений.

1. Если погрешности всех аргументов можно оценить вероятностно (т. е. найти σ_x, σ_y, …, σ_z), то и для погрешности функции необходимо давать вероятностную оценку:

$$\Delta U = \gamma \sigma_{\text{и}},$$

где стандартное отклонение функции $\sigma_{\text{и}}$ вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\text{и}} = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\sigma_y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{df}{dz}\sigma_z\right)^2}.$$

Если функция удобна для логарифмирования, т. е. содержит произведения, частные, степени и т. п., то проще вычислять по формуле:

$$\sigma_{\text{и}} = \left|\overline{U}\right| \sqrt{\left(\frac{d\ln f}{dx}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{d\ln f}{dy}\sigma_y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\ln f}{dz}\sigma_z\right)^2}.$$

Примечание. Если при обработке результатов прямых измерений уже вычислены доверительные погрешности Δx, Δy, …, Δz всех аргументов с одинаковой вероятностью α, то доверительную погрешность функции с этой же вероятностью можно вычислять по формуле:

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\Delta y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{df}{dz}\Delta z\right)^2},$$

или

$$\Delta U = \left|\overline{U}\right| \sqrt{\left(\frac{d \ln f}{dx}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{d \ln f}{dy}\Delta y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d \ln f}{dz}\Delta z\right)^2}\ .$$

2. Если погрешности аргументов можно оценить лишь в предельной форме, то оценку предельной погрешности функции следует проводить методом *границ погрешностей* (дифференциальным):

$$\Delta U = \left|\frac{df}{dx}\Delta x\right| + \left|\frac{df}{dy}\Delta y\right| + \ldots + \left|\frac{df}{dz}\Delta z\right|,$$

или

$$\Delta U = \left|\overline{U}\right| \left(\left|\frac{d \ln f}{dx}\Delta x\right| + \left|\frac{d \ln f}{dy}\Delta y\right| + \ldots + \left|\frac{d \ln f}{dz}\Delta z\right| \right),$$

где погрешности аргументов Δx, Δy, …, Δz оценены также в предельной форме. Допустимо также использование метода границ.

Вычисления

Точность вычислений должна быть достаточной для того, чтобы не ухудшать точности вычисленных результатов. В то же время следует помнить, что излишняя точность вычислений не может повысить точности измерений. Достаточно, чтобы относительная погрешность вычислений была на один-два порядка меньше суммарной относительной погрешности измерений. Например, если суммарная погрешность результата составляет 10 %, т. е. сомнительной является вторая значащая цифра результата, то вычисления необходимо вести до трех-четырех значащих цифр с тем, чтобы округлить результат до двух цифр.

Величину же погрешности следует рассчитывать не более чем до трех значащих цифр, округляя затем до одной-двух. Более высокая точность оценки погрешностей в учебной лаборатории является излишней. Точность записи результата должна соответствовать точности измерений и вычислений. Так, запись $t = (1,2134 \pm 0,2)$ с неверна, результат следует округлить с учетом погрешности $t = (1,2 \pm 0,2)$ с. Иногда приходится пользоваться табличными или заранее измеренными величинами. Если при этом не указана погрешность, ее считают равной половине последней значащей цифры (например, $9,8 \pm 0,05$ или $9,81 \pm 0,005$).

Описание приборов. Для определения линейных размеров используется линейка, штангенциркуль и микрометр. Цена деления линейки равна расстоянию между двумя соседними штрихами, погрешность равна половине цены деления: $\Delta_{\text{отсч}} = c/2$.

Для повышения точности измерений служит *нониус* – дополнительная линейка к основной шкале. Деления на нониусе наносятся обычно так, что одно деление нониуса составляет $\frac{m \pm 1}{m} = 1 \pm \frac{1}{m}$ делений масштаба, где m – число делений нониуса. Именно это позволяет, пользуясь нониусом, производить отсчеты с точностью до $1/m$ части наименьшего деления основной шкалы. Таким образом, точность прибора с нониусом зависит от числа делений нониуса m и цены деления c основной шкалы: $\Delta = c/m$.

Штангенциркуль представляет собой линейку *1* с неподвижной ножкой *2* (рис. 1.4).

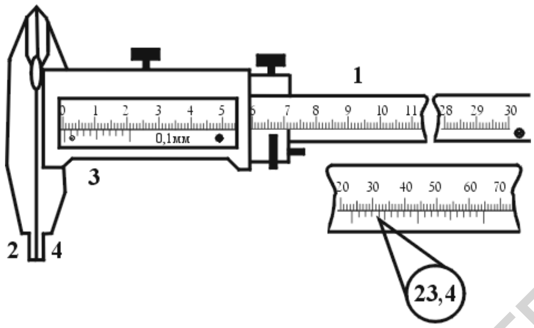

Рис. 1.4

По линейке перемещается дополнительная шкала с m делениями – нониус *3*. На линейке нанесена основная шкала с ценой деления 1 мм. Точность штангенциркуля зависит от числа делений *нониуса* (так, при $m = 10$ погрешность $\Delta_{отсч} = 0{,}1$ мм, при $m = 20$ – $\Delta_{отсч} = 0{,}05$ мм). При измерениях предмет помещают между ножками *2* и *4*, снимают отсчет по шкалам и находят искомую длину

$$l = kc + \frac{nc}{m},$$

где k – число наименьших делений основной шкалы (до нулевого деления нониуса), n – *номер* деления нониуса, которое в данный момент совпадает с одним из делений основной шкалы.

В некоторых штангенциркулях при измерении внутренних диаметров необходимо прибавить толщину двух ножек (указывается на одной из них).

Микрометр состоит из скобы *1*, упора *2*, микрометрического винта *3*, стебля *4*, барабана *5* и головки с трещоткой *6* (рис. 1.5).

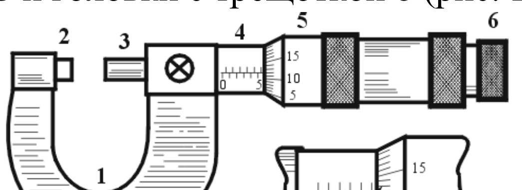

Рис. 1.5

На стебле нанесена основная шкала. Деления на ней отстоят друг от друга на 0,5 мм и смещены относительно оси стебля. На барабане нанесено $m = 50$ делений нониуса, поэтому точность микрометра $\Delta_{отсч} = 0{,}01$ мм.

При измерениях предмет помещают между упором *2* и микрометрическим винтом *3*, вращают винт за головку *6* до соприкосновения с предметом и срабатывания трещотки.

Числовое значение размера измеряемого предмета находят по формуле

$$l = kc + \frac{nc}{m},$$

где k – число делений основной шкалы на стебле, n – номер деления шкалы нониуса на барабане, совпадающего с осью основной шкалы.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Изучение микрометра и штангенциркуля.

1. Определите цену деления основных шкал и точность приборов.

Задание 2. Измерение толщины пластинки и диаметра проволоки с помощью микрометра.

1. Измерьте в разных местах толщину пластинки h и диаметр проволоки d не менее 5 раз.

2. Найдите средние значения $\overline{h}$ и $\overline{d}$, и доверительные погрешности Δh, Δd с вероятностью $\alpha = 0{,}9$.

3. Результаты запишите в таблицу:

№ п/п	Пластинка		Проволока	
	h_i, мм	$\overline{h} \pm \Delta h$, мм	d_i, мм	$\overline{d} \pm \Delta d$, мм

Задание 3. Определение обьема трубки.

1. Штангенциркулем измерьте не менее 5 раз внутренний d и внешний D диаметры трубки и ее высоту h.

2. Найти средние значения $\overline{d}, \overline{D}, \overline{h}$.

3. Вычислите среднее значение обьема $\overline{V} = \frac{\pi \overline{h}}{4}\left(\overline{D}^2 - \overline{d}^2\right)$.

4. Оцените доверительную погрешность ΔV с вероятностью 0,9.

5. Результаты запишите в таблицу:

№ п/п	d, мм	D, мм	h, мм	$\overline{V} \pm \Delta V$, мм^3

Контрольные вопросы

1. От чего зависит точность измерений? В каком случае при увеличении числа измерений точность не увеличивается?

2. В каком случае не учитываются погрешности прибора? От чего они зависят?

3. Можно ли статистическим методом оценить систематические погрешности?

4. Как оценить погрешности прямых измерений? Косвенных измерений?

5. С какой точностью следует производить вычисления?

6. Как производятся измерения микрометром и штангенциркулем?

7. Для чего служит нониус? От чего зависит точность прибора с нониусом? Как изменится точность прибора, если деления нониуса сделать более крупными при том же их числе?

Работа 1.3. Исследование зависимостей *T*(*l*) и *A*(*t*) математического маятника

Оборудование: штатив, маятник, линейка, электронный счетчик-секундомер.

Описание метода

Графический метод является наиболее простым и наглядным способом исследования зависимостей.

При построении графиков соблюдают определенные правила. По горизонтальной *оси абсцисс* принято откладывать *аргумент*, а по вертикальной *оси ординат* – *функцию*. Масштабы по обеим осям выбирают независимо друг от друга так, чтобы получить наилучшую наглядность. Для этого анализируют экспериментальные результаты (это легче сделать, если они оформлены в виде таблиц) и устанавливают границы изменения переменных: область определения и множество значений функции.

На графиках обычно приводят только те области изменения величин, которые экспериментально исследованы. Не надо стремиться, чтобы началом отсчета была точка (0,0). На осях указывают обозначения величин и единицы измерения, а также (при необходимости) и множители, определяющие порядок величин (например: υ, м/с; U, 10^4 В). Стрелки, указывающие направления осей, на экспериментальных графиках обычно не ставят. Масштабы наносят в виде удобных чисел, расположенных не слишком густо (например, 4, 6, 8; 5, 10, 15, …).

В результате многократных измерений зависимых величин x и y при каждом конкретном условии опыта получают приближенные значения $\overline{x_i}$ и $\overline{y_i}$, а также оценки погрешностей Δx_i, Δy_i. В выбранной системе координат наносят точки с координатами (x_i, y_i). Погрешности указывают крестиками или прямоугольниками с линейными размерами $2\Delta x_i$ вдоль оси *Ox* и $2\Delta y_i$ – вдоль *Oy*, построенными около этих точек, как около центров (рис. 1.6).

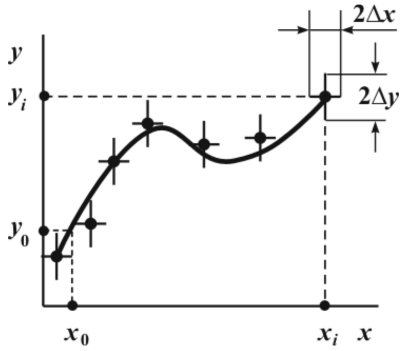

Рис. 1.6

Если измерения достаточно точны, крестики (прямоугольники) стягиваются в точки. Проведя через построенные около экспериментальных точек фигуры плавную кривую, получим график исследуемой зависимости $y = f(x)$.

Так, построение графика зависимости периода колебаний математического маятника от длины нити $T(l)$ начнем с анализа результатов измерений, которые для удобства оформим в виде таблицы:

№ п/п	l, м	Δl, м	$\overline{T}$, с	ΔT, с
1	0,05		0,39	0,06
2	0,13		0,63	0,07
3	0,24	0,05	0,95	0,08
4	0,39		1,2	0,1
5	0,63		1,5	0,1

Рассмотрев область определения и множество значений функции (соответственно (0,05–0,63) м и (0,39–1,5) с), выберем масштабы, нанесем на осях деления и наименования величин. Затем построим точки с координатами (l, T), а также погрешности $(\Delta l, \Delta T)$. Наконец, проведем кривую $T(l)$ (рис. 1.7).

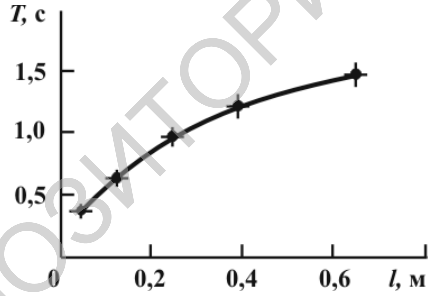

Рис. 1.7

Масштаб должен быть выбран так, чтобы график изображал все особенности исследуемой зависимости. Часто бывает удобен нелинейный (функциональный) масштаб. Если значения y изменяются на несколько порядков, то применяют, например, так называемый логарифмический масштаб, (т. е. на оси ординат откладывают не сами значения функции, а их логарифмы).

Экспериментальные точки должны быть размещены достаточно густо там, где функциональная зависимость быстро изменяется. При рациональном выборе для надежного построения простой кривой (или прямой) необходимо не менее 5–8 точек, а для сложной зависимости – не менее 10–15. Если же при измерениях результаты не осмысливать, то даже при очень большом числе опытов можно не обнаружить особенностей функции.

Выносные линии на графиках проводят лишь для указания каких-либо особенностей, например, экстремумов. Точки, соответствующие разным зависимостям, построенным на одном графике, должны обозначаться разными символами (○■△●), цифрами или буквами. Все обозначения поясняются в тексте или в подписи к рисунку.

С помощью графиков можно обрабатывать экспериментальные данные: интерполировать, дифференцировать, интегрировать. Хотя графические методы менее точны, чем численные (например, метод наименьших квадратов), они просты, наглядны и часто дают неплохие результаты, поэтому широко применяются в учебных лабораториях. Рассмотрим некоторые наиболее распространенные случаи применения графических методов на практике.

1. Пользуясь графиком, можно в пределах произведенных наблюдений находить значения y для таких x, которые непосредственно не наблюдались (задача интерполирования). Для этого из любой точки x_0 оси *Ox* необходимо провести перпендикуляр до пересечения с кривой (рис. 1.6). Длина перпендикуляра и будет равна значению y_0 для соответствующего x_0.

2. Для нахождения производной функции $y = f(x)$, заданной графически, необходимо провести касательную к кривой в данной точке x_0 (рис. 1.8) и определить тангенс угла ее наклона (угловой коэффициент):

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha .$$

Для получения наибольшей точности масштаб следует выбрать так, чтобы угол наклона был близок к 45°.

3. Определенный интеграл численно равен площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, и осью абсцисс (рис. 1.8). Площадь сложной фигуры легко найти, подсчитав клетки миллиметровой бумаги. Для получения правильных численных значений производной и интеграла обязательно следует учитывать масштабы по обеим осям.

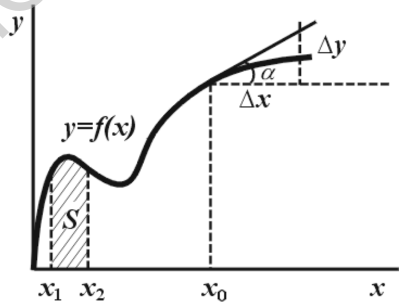

Рис. 1.8

4. По виду графика можно предположить или экспериментально подтвердить вид функциональной зависимости $y = f(x)$ между измеряемыми величинами x и y. Для этого удобно построить график в таких координатах, чтобы предполагаемая функциональная зависимость выражалась прямой линией. Масштабы на осях в этом случае могут быть нелинейными. Если предположение верно, то график должен быть прямой линией. Так, проанализировав экспериментальную зависимость $T(l)$ по таблице и по графику на рис. 1.7, можно предположить, что период колебаний математического маятника прямо пропорционален квадратному корню из его длины $T = a\sqrt{l}$. Для подтверждения

этого на осях следует откладывать T и $\sqrt{l}$ или T^2 и l. Если предположение верно, получим прямую линию (рис. 1.9). Коэффициент a может быть найден по наклону этой прямой, а более точно – методом наименьших квадратов. Тем самым проверяется точный вид зависимости

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $a = 2\pi/\sqrt{g}$.

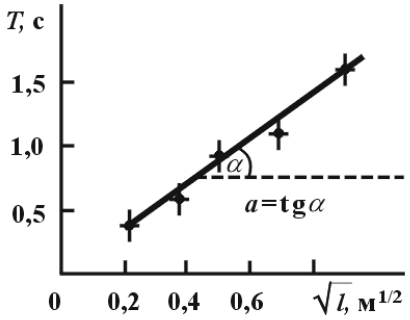

Рис. 1.9

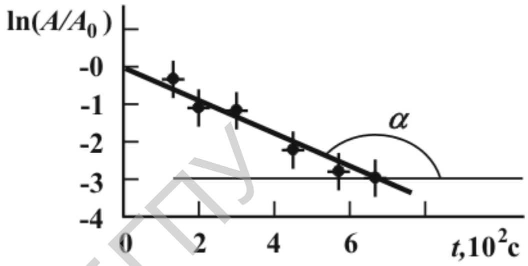

Рис. 1.10

Для доказательства того, что уменьшение амплитуды затухающих колебаний маятника происходит по экспоненциальному закону $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$, необходимо построить график зависимости логарифма амплитуды от времени $\ln A(t) = \ln A_0 - \beta t$ или $\ln(A/A_0) = -\beta t$ (рис. 1.10). При этом должна получиться прямая, тангенс угла наклона которой равен *коэффициенту затухания* $\beta = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Метод наименьших квадратов

Рассмотрим простейшую задачу, когда две измеряемые величины x и y связаны между собой линейной зависимостью: $y = ax + b$. По результатам x_i и y_i прямых измерений необходимо найти значения a и b. Парам значений x_i и y_i соответствуют некоторые точки плоскости (рис. 1.11). Задача сводится к определению параметров прямой: углового коэффициента a и значения ординаты при нулевом значении абсциссы $b = y(0)$.

Так как при любых измерениях допускаются погрешности, то можно найти лишь приближенные значения $\bar{a}$ и $\bar{b}$. *Более точные значения* будут для прямой $y = \bar{a}x + \bar{b}$, которая менее всего отклоняется от экспериментальных точек x_i и y_i.

Пусть величина x_i измеряется достаточно точно (во многих случаях удается организовать эксперимент так, что значение аргумента x_i задается), случайные погрешности Δy_i распределяются по нормальному закону, а систематические отсутствуют.

Проведем ординаты точек x_i и y_i до пересечения с прямой (рис. 1.11). Согласно методу наименьших квадратов, наилучшей будет прямая, для которой сумма квадратов разностей ординат

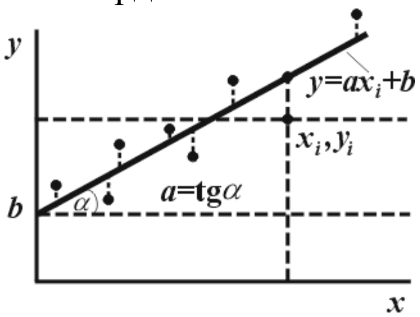

Рис. 1.11

$$Q = \sum\left(\Delta y_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2$$

будет минимальна.

По условию минимума $\dfrac{dQ}{da} = 0$ и $\dfrac{dQ}{db} = 0$, откуда:

$$a\sum x_i + nb - \sum y_i = 0,$$

$$b\sum x_i + a\sum x_i^2 - \sum x_i y_i = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим параметры наилучшей прямой $y = \overline{a}x + \overline{b}$:

$$\overline{a} = \frac{A}{B}, \qquad (1)$$

$$\overline{b} = \frac{\sum y_i - \overline{a}\sum x_i}{n}. \qquad (2)$$

Стандартное отклонение рассчитывается по формулам:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{(n-2)B}\left(C - \frac{A^2}{B}\right)}, \quad \sigma_b = \sigma_a\sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}, \qquad (3)$$

где

$$A = n\sum\left(x_i y_i\right) - \sum x_i \sum y_i, \quad B = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2, \quad C = n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2. \qquad (4)$$

Формулы (1)–(4) приведены к виду, удобному для использования вычислительной техники.

Доверительные погрешности оцениваются по коэффициенту Стьюдента $t_{\alpha n-2}$ для заданной вероятности α и $n-2$ пар измерений:

$$\Delta a = t_{\alpha n-2}\sigma_a, \quad \Delta b = t_{\alpha n-2}\sigma_b.$$

Рассчитаем, например, коэффициент пропорциональности в зависимости $T(\sqrt{l})$ (рис. 1.9) с $\alpha = 0{,}8$. Вычисленные значения $a = (1{,}98 \pm 0{,}13)$ с$\cdot$м$^{-1/2}$ хорошо согласуются с теоретическими:

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 2,006.$$

Значение $b = (-5,4 \pm 6,8) \cdot 10^{-2} \approx 0$.

Следует заметить, что существует множество функций $y = f(x)$, как угодно хорошо удовлетворяющих экспериментальным точкам x_i, y_i. Поэтому, прежде всего, на основании физических законов необходимо предположить вид зависимости, а затем проверить ее соответствие результатам эксперимента.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Исследование зависимости периода колебаний математического маятника от его длины.

1. Измерьте секундомером время t, за которое совершается n колебаний маятника при разных длинах нити l (не менее 6–8 длин).

2. Определите период колебаний: $T = t/n$.

3. Оцените предельные погрешности Δl и ΔT.

Указания:

- погрешность измерения длины математического маятника носит методический характер вследствие замены материальной точки реальным шариком, поэтому за Δl следует взять радиус шарика;
- погрешность измерения времени Δt в работе определяется не точностью секундомера (0,01 с), а запаздыванием реакции человека при его включении и выключении (примем $\Delta t = 0,5$ с);
- погрешность определения периода равна $\Delta T = \Delta t / n$ (именно поэтому экспериментально период определяется по времени достаточно большого числа колебаний, а не измерением одного колебания).

4. Результаты запишите в таблицу:

№ п/п	l, м	Δl, м	t, с	n	T, с	ΔT, с	T^2, с^2	ΔT^2, с^2

5. Постройте графики зависимостей $T(l)$, $T^2(l)$.

6. Определите по графику угловой коэффициент наклона прямой $T^2(l)$ и сравните его с теоретическим значением $4\pi^2/g$.

Задание 2. Определение аналитического выражения зависимости амплитуды колебаний маятника от времени.

1. Отклоните маятник от положения равновесия. Включите секундомер и зафиксируйте начальную амплитуду A_0. Отмечайте моменты времени, в которые маятник проходит значения амплитуды A_i (не менее 6–8 раз).

2. Вычислите логарифмы отношения $L_i = \ln(A_i / A_0)$.

3. Оцените предельные погрешности ΔA, ΔL, Δt.

4. Результаты запишите в таблицу:

№ п/п	A, см	L	ΔL	t, с	Δt, с

5. Постройте графики зависимостей $A(t)$, $L(t)$.

6. Графически определите коэффициент затухания β.

Задание 3. Метод наименьших квадратов.

1. Найдите параметры «наилучшей» прямой $T^2(l) = \overline{a}l + \overline{b}$. Сравните с теоретическими.

2. Найдите параметры «наилучшей» прямой $L(t)$.

Контрольные вопросы

1. Как выбираются масштабы? Что обозначается на осях?

2. Как определяются погрешности на графиках?

3. В каком случае график произвольной функции $y = f(x)$ имеет вид прямой?

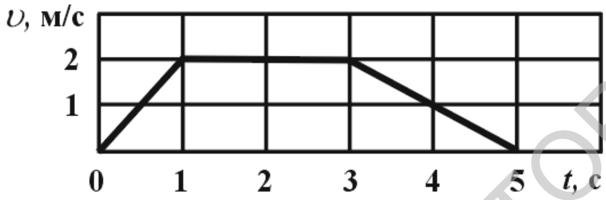

Рис. 1.12

4. Каким образом производится графическая обработка экспериментальных данных: интерполирование, дифференцирование и интегрирование?

5. Как графически установить вид функциональной зависимости $y = f(x)$?

6. По графику зависимости $\upsilon(t)$ (рис. 1.12) найдите скорость и ускорение в моменты времени 0,5; 2; 4 с, а также путь, пройденный к моментам времени 1; 2; 3; 5 с.

7. В чем заключается метод наименьших квадратов?

Обработка результатов измерений

1. Прямые и косвенные измерения

Изучение физических явлений и их закономерностей, а также использование этих закономерностей на практике связано с измерением физических величин. По способу получения результатов физические измерения подразделяются на прямые и косвенные.

Прямыми измерениями называют такие, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно из опытных данных путем сравнения ее с известной мерой, эталоном или с помощью приборов, градуированных в целых, дольных или кратных единицах измеряемой величины. Например, измерение длины линейкой, времени секундомером, массы весами, температуры термометром, разности потенциалов вольтметром и т.д.

Косвенными измерениями называют такие, при которых искомое значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, полученными при прямых измерениях. При косвенных измерениях значение искомой физической величины, как правило, вычисляют по формуле, в которую подставляют результаты нескольких прямых измерений. Например, при измерении средней плотности тела по его массе и геометрическим размерам, измерении электрического сопротивления резистора по падению напряжения на нем и току через него, определение средней скорости по пройденному пути и затраченному времени, и т.п.

2. Виды погрешностей измерений

Численные значения, полученные в результате измерений, всегда дают не истинные, а приближенные значения измеряемой величины. Причина этого лежит в несовершенстве измерительных приборов и наших органов чувств. Даже при работе с самым точным прибором неизбежны погрешности измерений. Поэтому при измерении любой физической величины необходимо указывать погрешность или предел точности данного измерения.

Погрешности в зависимости от причины их возникновения подразделяются на **грубые** (промахи), **систематические, инструментальные, случайные.**

Грубые погрешности возникают в результате невнимательности или усталости экспериментатора при сбое измерительной аппаратуры, а также при плохих условиях наблюдения. Они приводят к значениям измеряемой величины, резко отличающимся от остальных.

Результаты измерений, соответствующих грубым ошибкам, нужно отбрасывать и взамен проводить новые измерения. Для исключения промахов любые измерения необходимо проводить не менее 3-х раз.

Систематическая погрешность – погрешность, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторении измерений.

Систематическая погрешность, присутствующая в результатах измерений, выполненных с помощью любого измерительного прибора, как правило, известна экспериментатору и может быть учтена. Ее можно оценить только путем сравнения показаний прибора с показаниями другого, более точного. Иногда результаты специально проведенного сравнения приводят в паспорте прибора, однако чаще указывают максимально возможную погрешность для приборов данного

Инструментальная погрешность – погрешность измерительных приборов.

Методика определения инструментальной погрешности приводится в его паспорте. Для характеристики большинства приборов используют понятие приведенной погрешности, равной абсолютной погрешности в процентах диапазона шкалы измерений.

По приведенной погрешности приборы разделяются на восемь классов точности K: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0.

Приборы класса точности – 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 применяют для точных лабораторных измерений (прецизионных).

В технике применяют приборы классов – 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 (технические).

Наибольшая абсолютная инструментальная погрешность может быть рассчитана из соотношения:

$$\Delta_{\text{ин}} = \frac{Kx_{\text{ном}}}{100} \tag{1}$$

где K – класс точности прибора, $x_{\text{ном}}$ – номинальное (наибольшее значение, которое может измерить прибор) значение шкалы прибора.

Классом точности прибора называется отношение абсолютной ошибки прибора к номинальному значению, выраженному в процентах:

$$K = \frac{\Delta x}{x_{\text{ном}}} \cdot 100\% \tag{2}$$

Из формулы (1) следует, что относительная погрешность будет минимальной, если измеряемая величина дает отброс стрелки индикатора на всю шкалу. Поэтому для оптимального использования прибора его предел выбирают так, чтобы значение измеряемой величины попадало в конец шкалы.

Инструментальная погрешность приборов для измерения линейных размеров указана на самом приборе в виде абсолютной погрешности. Если на приборе не указан ни класс точности, ни абсолютная погрешность, то она принимается равной половине цены деления.

Допустим, на приборе указан класс точности «1», это означает, что показания этого прибора верны с точностью до 1% от всей шкалы прибора.

Случайной погрешностью измерений называют погрешность, которая изменяется случайно при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности непредсказуемо изменяются по значению и знаку при повторных измерениях одной и той же величины. Они вызываются совокупностью различных причин, действие которых неодинаково при каждом измерении. Такими причинами являются температура, атмосферное давление, влажность воздуха, флуктуации напряжения питания, нестабильность элементов схем приборов, несовершенство наших органов чувств и т.д. Появление случайных погрешностей носит вероятностный характер, и для уменьшения их влияния измерения следует повторять несколько раз.

Количественно погрешности разделяются на абсолютные и относительные.

Абсолютной погрешностью Δx отдельного измерения называют абсолютную величину разности между средним значением $\bar{x}$ и данным измерением x_i:

$$\Delta x_i = \left|\bar{x} - x_i\right|. \tag{3}$$

Предполагается, что истинное значение измеряемой величины всегда лежит внутри доверительного интервала.

Средней абсолютной погрешностью называют среднеарифметическое значение абсолютных ошибок всех измерений:

$$\Delta x = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}{n}. \quad (4)$$

Относительной погрешностью измерения называется отношение средней абсолютной погрешности к среднему значению измеряемой величины, выраженное в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \overline{x}}{x} \cdot 100\%. \ (5)$$

Определение относительных погрешностей приобретает особое значение тогда, когда в опыте производят несколько измерений.

3. Оценка погрешностей прямых измерений

При измерениях на точность результата влияют не только свойства измерительного инструмента, но особенности измеряемого предмета. Например, толщина проволоки обычно различна на протяжении её длины, вследствие чего при измерении толщины проволоки необходимо не ограничиваться одним измерением, а проделать несколько измерений в различных местах. В этом случае искомая величина равна **среднеарифметическому** значению общего числа измерений:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad (6)$$

где x_i – измеряемая величина, n – число измерений. За приближенное значение измеряемой величины целесообразно брать то, которое вычисляется как среднеарифметическое нескольких значений. Значение $\overline{x}$ будет содержать существенно меньшую погрешность.

Среднеарифметическое – это лишь приближенное значение искомой величины. При записи искомой физической величины указывается допустимый (доверительный) интервал, в котором она может находиться. Абсолютная погрешность равна полуширине доверительного интервала (рис. 1).

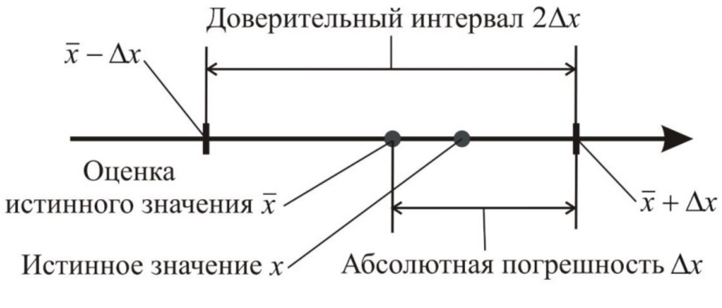

Рис. 1 Результат измерений $x = \overline{x} \pm \Delta x$

4. Оценка погрешностей косвенных измерений

Искомую величину не всегда можно получить прямым измерением. В этом случае прибегают к косвенным измерениям. Исследуемую величину f определяют по результатам прямых измерений других физических величин, например, x, y, z, …, с которыми она связана заранее установленным функциональным математическим соотношением

$$f = f\left(x, y, z, \ldots\right). \tag{7}$$

Эта связь должна быть известна экспериментатору. Помимо данных прямых измерений, параметрами (7) могут оказаться другие величины, точно заданные или полученные в других измерениях, – они составляют набор *исходных данных*. Выражение (7), записанное в явном виде, называют *рабочей формулой* и используют как для оценивания результата косвенного измерения f, так и для оценивания абсолютной погрешности измерения Δf.

Абсолютная и относительная погрешности при косвенных измерениях рассчитываются по функциональным законам, приведенным в таблице 1.

Таблица 1. Формулы погрешностей косвенных измерений

Функциональная связь	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$f = x + y$	$\Delta f = \Delta x + \Delta y$	$\varepsilon = \left(\Delta x + \Delta y\right)/\left(x + y\right)$
$f = x - y$	$\Delta f = \Delta x + \Delta y$	$\varepsilon = \left(\Delta x + \Delta y\right)/\left(x - y\right)$
$f = x \cdot y$	$\Delta f = y\Delta x + x\Delta y$	$\varepsilon = \Delta x/x + \Delta y/y$
$f = x/y$	$\Delta f = \left(y\Delta x + x\Delta y\right)/y^2$	$\varepsilon = \Delta x/x + \Delta y/y$
$f = x^n$	$\Delta f = n \cdot x^{n-1}\Delta x$	$\varepsilon = n \cdot \Delta x/x$
$f = \sqrt[n]{x}$	$\Delta f = \Delta x\Big/\left(n \cdot \sqrt{x^{n-1}}\right)$	$\varepsilon = \Delta x/\left(n \cdot x\right)$

5. Точность записи результатов измерения

Точность записи (число значащих цифр) отдельных измерений и последующих вычислений при их обработке должна быть согласована с необходимой точностью результата измерения. Здесь рекомендуется придерживаться следующих правил.

1. Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр больше или равна 5, но за ней следует отличная от нуля цифра, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу.

Пример.

8,3351 (округлить до сотых) $\approx 8{,}34$;

0,2510 (округлить до десятых) $\approx 0{,}3$;

271,515 (округлить до целых) ≈ 272.

2. Если первая (слева направо) из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр меньше 5, то оставшиеся цифры не изменяют. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях отбрасывают.

Пример.

При сохранении четырех значащих цифр число 283435 должно быть округлено до 283400; число 384,435 – до 384,4.

3. Число цифр в результатах промежуточных расчетов обычно должно быть на одну больше, чем в окончательном результате. Погрешности при промежуточных вычислениях должны быть выражены не более чем тремя значащими цифрами.

4. Округлять результат измерения следует так, чтобы он оканчивался цифрой того же разряда, что и значение погрешности. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерения оканчивается нулями, то нули отбрасывают только для того разряда, который соответствует разряду погрешности.

Пример.

Число 0,67731 при погрешности ±0,005 следует округлять в третьей значащей цифре до значения 0,677.

5. Вычисление погрешности измерений также не следует производить с большей точностью, чем вычисление значения самой измеряемой величины.

6. Построение графиков

Если исследуется функциональная зависимость одной величины от другой, то результаты могут быть представлены в виде графиков. Посмотрев на график, можно сразу оценить вид полученной зависимости, получить о ней качественное представление и отметить наличие максимумов, минимумов, точек перегиба, областей наибольшей и наименьшей скоростей изменения, периодичности и т.п. График позволяет также судить о соответствии экспериментальных данных рассматриваемой теоретической зависимости и облегчает обработку измерений.

При вычерчивании графиков соблюдают следующие правила.

1. Графики выполняются преимущественно на миллиметровой бумаге или бумаге со специальными координатными сетками.

2. В качестве осей координат следует применять прямоугольную систему координат. Общепринято по оси абсцисс откладывать ту величину, изменения которой являются причиной изменения другой (т.е. по оси абсцисс – аргумент, по оси ординат – функцию). Стрелки на концах осей графика можно не ставить, но обязательно указать обозначения физических величин и единицы их измерения. Если значения физической величины содержат множители 10", то их относят к единице измерения.

3. Масштаб графика определяется интервалом изменения величин, отложенных по осям; погрешность на графике представляется в выбранном масштабе отрезком достаточной длины. Принятая шкала будет легко читаться, если одна клетка масштабной сетки будет соответствовать удобному числу: 1; 2; 5; 10 и т. д. (но не 3; 7; 1,2 и т. д.), которое представляет собой единицу отображаемой на графике величины.

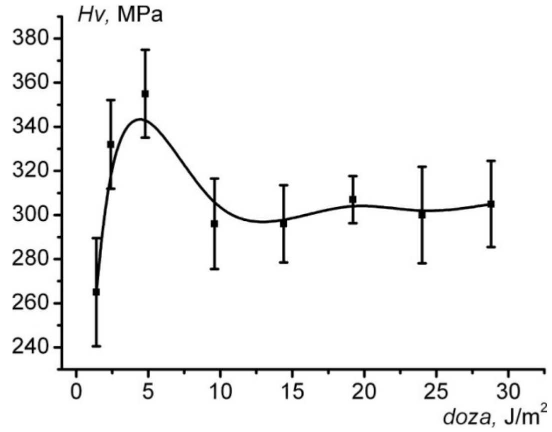

Рис. 2. Зависимость изменения микротвердости от дозы УФ-облучения для кристаллов NaCl

На рисунке 2 приведен пример оформления графической зависимости значений микротвердости щелочно-галоидных кристаллов NaCl от дозы УФ-облучения.

4. Масштаб наносится на осях графика вне его поля в виде равноотстоящих «круглых» чисел, например: 2; 4; 6 и т.д. или 1,15; 1,25; 1,35 и т. д. Не следует расставлять эти числа слишком густо – достаточно нанести их через 2 или даже через 5 см. Около оси координат необходимо написать название величины, которая отложена по данной оси, её обозначение и единицу измерения.

5. На графике приводится только та область изменения измеренных величин, которая была исследована на опыте; не нужно стремиться к тому, чтобы на графике обязательно поместилось начало координат. Начало обозначают на графике только в том случае, когда это не требует большого увеличения его размеров.

6. Точки должны наноситься на график тщательно и аккуратно, чтобы график получился, возможно, более точным. На график наносят все полученные в измерениях значения. Если одна точка измерялась несколько раз, то можно нанести среднее арифметическое значение и указать разброс. Если на один и тот же график наносятся различные группы данных (результаты измерения разных величин или одной величины, но полученные в разных условиях и т. п.), то точки, относящиеся к разным группам, должны быть помечены различными символами (кружочки, треугольники, звёздочки и т. п.). Смысл обозначений должен быть приведен в пояснительной подписи. Для того чтобы различить кривые, принадлежащие разным семействам, используют сплошные, штриховые, пунктирные, цветные и т.п. линии.

7. Если можно определить абсолютные погрешности измерений Δx и Δy, то их откладывают по обе стороны от точки (рис. 2). Так как все измерения сделаны с той или иной погрешностью, то точки не «укладываются» на одной кривой. Поэтому между точками проводят прямую или плавную кривую линию, проходящую через интервалы абсолютных погрешностей так, чтобы возможно больше точек «легло» на эту линию, а остальные распределились равномерно выше или ниже ее.

8. Прямую зависимость на графике проводят карандашом с помощью линейки. Кривую проводят по экспериментальным точкам от руки.

9. При построении графика нужно стремиться к тому, чтобы он наиболее чётко отражал все особенности представляемой зависимости.

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Кантрольны тэст па курсе «Метады апрацоўкі вынікаў вымярэнняў»

Варыянт 1

1.Шэраг вымярэнняў дыяметра дроту далі наступныя вынікі: 1,1мм; 1,4мм; 1,2мм; 1,1мм. Модуль абсалютнай хібнасці для другога вымярэння роўны:

1. 0,1мм; 2. 0,2мм; 3. 0,4мм; 4. 0,5мм; 5. 0,3мм.

2.Вымярэнні масы цела далі наступныя вынікі: 2,4кг; 2,7кг; 2,3кг; 2,0кг; 2,1кг. Адносная хібнасць, дапушчаная пры чацвертым вымярэнні роўная:

1. 13%; 2. 15%; 3. 11%; 4.20%; 5. 17%.

3.З вызначанай дакладнасцю былі праведзены вымярэнні сілы, якая дзейнічала на цела: F_1=(4,45±0,12)Н; F_2=(7,84±0,18)Н; F_3=(10,15±0,20)Н; F_4=(5,5±0,3)Н; F_5=(1,8±0,1)Н. У якім выпадку праведзены больш дакладныя вымярэнні сілы?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4; 5. 5.

4.У табліцы прыведзены значэнні функцыі Y, якія адпавядаюць наступным значэнням аргумента X:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y	12,4	14,8	16,5	18,8	20,2

Метад найменшых квадратаў дае, што параметры a і b лепшай прамой роўныя:

1. 19,6 і 10,7; 2. 16,4 і 9,8; 3. 14,5 і 10,6; 4. 8,8 і 5,5; 5. 1,5 і 3,4.

5.Вымярэнні часу саўдару шароў далі наступныя значэнні: 0,12мс; 0,15мс; 0,10мс; 0,38мс; 0,13мс; 0,15мс. Каэфіцыент промаху для найбольшага значэння часу роўны:

1. 0,4; 2. 2,6; 3. 0,8; 4. 0, 2; 5. 1,2.

6.Вымярэнні даўжыні стрыжня далі наступныя вынікі: 1,4м; 1,5м; 1,7м; 1,4м; 1,3м. Пры давяральнай імавернасці α=0,9 давяральны інтэрвал роўны:

1. 0,20м; 2. 0,15м; 3. 0,44м; 4. 0,58м; 5. 0,32м.

7.Клас дакладнасці вальтметра, які разлічаны на максімальнае напружанне 50В, роўны 2. Лімітная хібнасць дадзенага прыбора роўная:

1. 2В; 2. 50В; 3. 5В; 4. 1В; 5. 0,2В.

8.Пры вызначэнні масы цела былі атрыманы наступныя значэнні: 15,7кг; 15,9кг; 15,2кг; 15,0кг; 15,8кг; 15,7кг; 15,1кг; 15,4кг. Сярэдняе значэнне масы дадзенага цела роўнае:

1. 15,5кг; 2. 15,7кг; 3. 15,6кг; 4. 15,3кг; 5. 15,8кг.

9.У выніку вымярэнняў перыяду матэматычнага маятніка былі атрыманы наступныя значэнні: 1,28с; 1,24с; 1,20с; 1.25с; 1,24с; 1,30с; 1,21с; 1,26с; 1,25с. Стандартнае адхіленне пры дадзеных вымярэннях роўнае:

1. 0,02с; 2. 0,01с; 3. 0,15с; 4. 0,03с; 5. 0,25с.

10.Чаму роўная дакладнасць штангенцыркуля, у якога асноўная лінейка міліметровая, а ноніус мае 20 дзяленняў?

1. 0,05мм; 2. 0,01мм; 3. 0,20мм; 4. 0,15мм; 5. 0,02мм.

Варыянт 2

1.У табліцы прыведзены значэнні функцыі Y, якія адпавядаюць наступным значэнням аргумента X:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y	12,4	14,8	16,5	18,8	20,2

Метад найменшых квадратаў дае, што параметры a і b лепшай прамой роўныя:

1. 19,6 і 10,7; 2. 16,4 і 9,8; 3. 14,5 і 10,6; 4. 8,8 і 5,5; 5. 1,5 і 3,4.

2.Вымярэнні часу саўдару шароў далі наступныя значэнні: 0,12мс; 0,15мс; 0,10мс; 0,38мс; 0,13мс; 0,15мс. Каэфіцыент промаху для найбольшага значэння часу роўны:

1. 0,4; 2. 2,6; 3. 0,8; 4. 0, 2; 5. 1,2.

3.Вымярэнні даўжыні стрыжня далі наступныя вынікі: 1,4м; 1,5м; 1,7м; 1,4м; 1,3м. Пры даверальнай імавернасці α=0,9 даверальны інтэрвал роўны:

1. 0,20м; 2. 0,15м; 3. 0,44м; 4. 0,58м; 5. 0,32м.

4.Клас дакладнасці вальтметра, які разлічаны на максімальнае напружанне 50В, роўны 2. Лімітная хібнасць дадзенага прыбора роўная:

1. 2В; 2. 50В; 3. 5В; 4. 1В; 5. 0,2В.

5.Пры вызначэнні масы цела былі атрыманы наступныя значэнні: 15,7кг; 15,9кг; 15,2кг; 15,0кг; 15,8кг; 15,7кг; 15,1кг; 15,4кг. Сярэдняе значэнне масы дадзенага цела роўнае:

1. 15,5кг; 2. 15,7кг; 3. 15,6кг; 4. 15,3кг; 5. 15,8кг.

6.У выніку вымярэнняў перыяду матэматычнага маятніка былі атрыманы наступныя значэнні: 1,28с; 1,24с; 1,20с; 1.25с; 1,24с; 1,30с; 1,21с; 1,26с; 1,25с. Стандартнае адхіленне пры дадзеных вымярэннях роўнае:

1. 0,02с; 2. 0,01с; 3. 0,15с; 4. 0,03с; 5. 0,25с.

7.Чаму роўная дакладнасць штангенцыркуля, у якога асноўная лінейка міліметровая, а ноніус мае 20 дзяленняў?

1. 0,05мм; 2. 0,01мм; 3. 0,20мм; 4. 0,15мм; 5. 0,02мм.

8.Шэраг вымярэнняў дыяметра дроту далі наступныя вынікі: 1,1мм; 1,4мм; 1,2мм; 1,1мм. Модуль абсалютнай хібнасці для другога вымярэння роўны:

1. 0,1мм; 2. 0,2мм; 3. 0,4мм; 4. 0,5мм; 5. 0,3мм.

9.Вымярэнні масы цела далі наступныя вынікі: 2,4кг; 2,7кг; 2,3кг; 2,0кг; 2,1кг. Адносная хібнасць, дапушчаная пры чацвертым вымярэнні роўная:

1. 13%; 2. 15%; 3. 11%; 4.20%; 5. 17%.

10.З вызначанай дакладнасцю былі праведзены вымярэнні сілы, якая дзейнічала на цела: F_1=(4,45±0,12)Н; F_2=(7,84±0,18)Н; F_3=(10,15±0,20)Н; F_4=(5,5±0,3)Н; F_5=(1,8±0,1)Н. У якім выпадку праведзены больш дакладныя вымярэнні сілы?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4; 5. 5.

Варыянт 3

1.Клас дакладнасці вальтметра, які разлічаны на максімальнае напружанне 50В, роўны 2. Лімітная хібнасць дадзенага прыбора роўная:

1. 2В; 2. 50В; 3. 5В; 4. 1В; 5. 0,2В.

2.Пры вызначэнні масы цела былі атрыманы наступныя значэнні: 15,7кг; 15,9кг; 15,2кг; 15,0кг; 15,8кг; 15,7кг; 15,1кг; 15,4кг. Сярэдняе значэнне масы дадзенага цела роўнае:

1. 15,5кг; 2. 15,7кг; 3. 15,6кг; 4. 15,3кг; 5. 15,8кг.

3.У выніку вымярэнняў перыяду матэматычнага маятніка былі атрыманы наступныя значэнні: 1,28с; 1,24с; 1,20с; 1.25с; 1,24с; 1,30с; 1,21с; 1,26с; 1,25с. Стандартнае адхіленне пры дадзеных вымярэннях роўнае:

1. 0,02с; 2. 0,01с; 3. 0,15с; 4. 0,03с; 5. 0,25с.

4.З вызначанай дакладнасцю былі праведзены вымярэнні сілы, якая дзейнічала на цела: F_1=(4,45±0,12)Н; F_2=(7,84±0,18)Н; F_3=(10,15±0,20)Н; F_4=(5,5±0,3)Н; F_5=(1,8±0,1)Н. У якім выпадку праведзены больш дакладныя вымярэнні сілы?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4; 5. 5.

5.У табліцы прыведзены значэнні функцыі Y, якія адпавядаюць наступным значэнням аргумента X:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y	12,4	14,8	16,5	18,8	20,2

Метад найменшых квадратаў дае, што параметры a і b лепшай прамой роўныя:

1. 19,6 і 10,7; 2. 16,4 і 9,8; 3. 14,5 і 10,6; 4. 8,8 і 5,5; 5. 1,5 і 3,4.

6.Вымярэнні часу саўдару шароў далі наступныя значэнні: 0,12мс; 0,15мс; 0,10мс; 0,38мс; 0,13мс; 0,15мс. Каэфіцыент промаху для найбольшага значэння часу роўны:

1. 0,4; 2. 2,6; 3. 0,8; 4. 0, 2; 5. 1,2.

7.Вымярэнні даўжыні стрыжня далі наступныя вынікі: 1,4м; 1,5м; 1,7м; 1,4м; 1,3м. Пры давяральнай імавернасці α=0,9 давяральны інтэрвал роўны:

1. 0,20м; 2. 0,15м; 3. 0,44м; 4. 0,58м; 5. 0,32м.

8.Чаму роўная дакладнасць штангенцыркуля, у якога асноўная лінейка міліметровая, а ноніус мае 20 дзяленняў?

1. 0,05мм; 2. 0,01мм; 3. 0,20мм; 4. 0,15мм; 5. 0,02мм.

9.Шэраг вымярэнняў дыяметра дроту далі наступныя вынікі: 1,1мм; 1,4мм; 1,2мм; 1,1мм. Модуль абсалютнай хібнасці для другога вымярэння роўны:

1. 0,1мм; 2. 0,2мм; 3. 0,4мм; 4. 0,5мм; 5. 0,3мм.

10.Вымярэнні масы цела далі наступныя вынікі: 2,4кг; 2,7кг; 2,3кг; 2,0кг; 2,1кг. Адносная хібнасць, дапушчаная пры чацвертым вымярэнні роўная:

1. 13%; 2. 15%; 3. 11%; 4.20%; 5. 17%.

Варыянт 4

1.Клас дакладнасці вальтметра, які разлічаны на максімальнае напружанне 50В, роўны 2. Лімітная хібнасць дадзенага прыбора роўная:

1. 2В; 2. 50В; 3. 5В; 4. 1В; 5. 0,2В.

2.Пры вызначэнні масы цела былі атрыманы наступныя значэнні: 15,7кг; 15,9кг; 15,2кг; 15,0кг; 15,8кг; 15,7кг; 15,1кг; 15,4кг. Сярэдняе значэнне масы дадзенага цела роўнае:

1. 15,5кг; 2. 15,7кг; 3. 15,6кг; 4. 15,3кг; 5. 15,8кг.

3.У выніку вымярэнняў перыяду матэматычнага маятніка былі атрыманы наступныя значэнні: 1,28с; 1,24с; 1,20с; 1.25с; 1,24с; 1,30с; 1,21с; 1,26с; 1,25с. Стандартнае адхіленне пры дадзеных вымярэннях роўнае:

1. 0,02с; 2. 0,01с; 3. 0,15с; 4. 0.03с; 5. 0,25с.

4.З вызначанай дакладнасцю былі праведзены вымярэнні сілы, якая дзейнічала на цела: F_1=(4,45±0,12)Н; F_2=(7,84±0,18)Н; F_3=(10,15±0,20)Н; F_4=(5,5±0,3)Н; F_5=(1,8±0,1)Н. У якім выпадку праведзены больш дакладныя вымярэнні сілы?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4; 5. 5.

5.Чаму роўная дакладнасць штангенцыркуля, у якога асноўная лінейка міліметровая, а ноніус мае 20 дзяленняў?

1. 0,05мм; 2. 0,01мм; 3. 0,20мм; 4. 0,15мм; 5. 0,02мм.

6.Шэраг вымярэнняў дыяметра дроту далі наступныя вынікі: 1,1мм; 1,4мм; 1,2мм; 1,1мм. Модуль абсалютнай хібнасці для другога вымярэння роўны:

1. 0,1мм; 2. 0,2мм; 3. 0,4мм; 4. 0,5мм; 5. 0,3мм.

7.Вымярэнні масы цела далі наступныя вынікі: 2,4кг; 2,7кг; 2,3кг; 2,0кг; 2,1кг. Адносная хібнасць, дапушчаная пры чацвертым вымярэнні роўная:

1. 13%; 2. 15%; 3. 11%; 4.20%; 5. 17%.

8.У табліцы прыведзены значэнні функцыі Y, якія адпавядаюць наступным значэнням аргумента X:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y	12,4	14,8	16,5	18,8	20,2

Метад найменшых квадратаў дае, што параметры a i b лепшай прамой роўныя:

1. 19,6 і 10,7; 2. 16,4 і 9,8; 3. 14,5 і 10,6; 4. 8,8 і 5,5; 5. 1,5 і 3,4.

9.Вымярэнні часу саўдару шароў далі наступныя значэнні: 0,12мс; 0,15мс; 0,10мс; 0,38мс; 0,13мс; 0,15мс. Каэфіцыент промаху для найбольшага значэння часу роўны:

1. 0,4; 2. 2,6; 3. 0,8; 4. 0, 2; 5. 1,2.

10.Вымярэнні даўжыні стрыжня далі наступныя вынікі: 1,4м; 1,5м; 1,7м; 1,4м; 1,3м. Пры давяральнай імавернасці α=0,9 давяральны інтэрвал роўны:

1. 0,20м; 2. 0,15м; 3. 0,44м; 4. 0,58м; 5. 0,32м.

Варыянт 5

1.Клас дакладнасці вальтметра, які разлічаны на максімальнае напружанне 50В, роўны 2. Лімітная хібнасць дадзенага прыбора роўная:

1. 2В; 2. 50В; 3. 5В; 4. 1В; 5. 0,2В.

2.Пры вызначэнні масы цела былі атрыманы наступныя значэнні: 15,7кг; 15,9кг; 15,2кг; 15,0кг; 15,8кг; 15,7кг; 15,1кг; 15,4кг. Сярэдняе значэнне масы дадзенага цела роўнае:

1. 15,5кг; 2. 15,7кг; 3. 15,6кг; 4. 15,3кг; 5. 15,8кг.

3.У выніку вымярэнняў перыяду матэматычнага маятніка былі атрыманы наступныя значэнні: 1,28с; 1,24с; 1,20с; 1.25с; 1,24с; 1,30с; 1,21с; 1,26с; 1,25с. Стандартнае адхіленне пры дадзеных вымярэннях роўнае:

1. 0,02с; 2. 0,01с; 3. 0,15с; 4. 0,03с; 5. 0,25с.

4.Шэраг вымярэнняў дыяметра дроту далі наступныя вынікі: 1,1мм; 1,4мм; 1,2мм; 1,1мм. Модуль абсалютнай хібнасці для другога вымярэння роўны:

1. 0,1мм; 2. 0,2мм; 3. 0,4мм; 4. 0,5мм; 5. 0,3мм.

5.Вымярэнні масы цела далі наступныя вынікі: 2,4кг; 2,7кг; 2,3кг; 2,0кг; 2,1кг. Адносная хібнасць, дапушчаная пры чацвертым вымярэнні роўная:

1. 13%; 2. 15%; 3. 11%; 4.20%; 5. 17%.

6.У табліцы прыведзены значэнні функцыі Y, якія адпавядаюць наступным значэнням аргумента X:

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y	12,4	14,8	16,5	18,8	20,2

Метад найменшых квадратаў дае, што параметры a i b лепшай прамой роўныя:

1. 19,6 і 10,7; 2. 16,4 і 9,8; 3. 14,5 і 10,6; 4. 8,8 і 5,5; 5. 1,5 і 3,4.

7.Вымярэнні даўжыні стрыжня далі наступныя вынікі: 1,4м; 1,5м; 1,7м; 1,4м; 1,3м. Пры давяральнай імавернасці α=0,9 давяральны інтэрвал роўны:

1. 0,20м; 2. 0,15м; 3. 0,44м; 4. 0,58м; 5. 0,32м.

8.Чаму роўная дакладнасць штангенцыркуля, у якога асноўная лінейка міліметровая, аноніус мае 20 дзяленняў?

1. 0,05мм; 2. 0,01мм; 3. 0,20мм; 4. 0,15мм; 5. 0,02мм.

9.З вызначанай дакладнасцю былі праведзены вымярэнні сілы, якая дзейнічала на цела: F_1=(4,45±0,12)Н; F_2=(7,84±0,18)Н; F_3=(10,15±0,20)Н; F_4=(5,5±0,3)Н; F_5=(1,8±0,1)Н. У якім выпадку праведзены больш дакладныя вымярэнні сілы?

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4; 5. 5.

10.Вымярэнні часу саўдару шароў далі наступныя значэнні: 0,12мс; 0,15мс; 0,10мс; 0,38мс; 0,13мс; 0,15мс. Каэфіцыент промаху для найбольшага значэння часу роўны:

1. 0,4; 2. 2,6; 3. 0,8; 4. 0, 2; 5. 1,2.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Литература

Основная:

Соболь В.Р., Яковенко В.А. Общая физика. Минск: Вышэйшая школа, 2015. с.

Елисеева И.М., Белая О.Н. Школьный физический эксперимент: практикум. Минск: БГПУ, 2015.

Забароўскі Г.А., Кудзін Я.С., Якавенка У.А. Метады апрацоўкі вынікаў вымярэнняў. Мінск, 2001.

Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. Л., 1985.

Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М., 1970.

Кембровский Г.С. Приближенные вычисления и методы обработки результатов измерений в физике. Минск, 1997.

Курс агульнай фізікі: Лабараторны практыкум / пад рэд. Цэдрыка М.С. і Якавенкі У.А. Мазыр, 2000.

Общая физика. Практикум. /Бондарь В.А. [и др.], под общ. ред. Яковенко В.А. Минск, 2008.

Дополнительная:

1. Анциферов Л.И., Пищиков И.М. Практикум по методике и технике школьного физического эксперимента. М., 1984.

Лабораторный практикум по общей физике: учеб. пособие / Кравцов Ю.А. [и др.], под общ. ред. Гершензона Е.М. М., 1985.

Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. М., 1971.

Трофимова Т.И. Физика в таблицах и формулах: учеб. пособие. М., 2004.

Перечень материалов на электронных носителях:

https://phys.bspu.by/moodlewrk2/course/indexphp?categoryid=16

Перечень наглядных и других пособий, методических указаний по проведению учебных занятий, а также методических материалов к техническим средствам, используемым в учебном процессе

Иллюстрационные материалы для учебного телевидения

1. Кадры из фильма «Метрические меры».

Иллюстрационные материалы для диапроекции

1. Доска Гальтона;
2. Распределение скоростей молекул по Максвеллу; Д.К.Максвелл;
3. Схема исследования Штерна;
4. разные виды измерительных приборов.

Иллюстрационный материал для традиционных демонстраций

1. Микрометр;
2. Штангенциркуль;
3. Планиметр;
4. Доска Гальтона;
5. Исследование Штерна.

Иллюстрационный материал для компьютерных демонстраций

1. Микрометр;
2. Штангенциркуль;
3. ППС «Открытая физика 2.5»;
4. ППС «Как оно работает?».

Учебно-тематический план дисциплины «Методы обработки результатов измерений»

№№	Наименование раздела, темы	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа студентов
1	**Измерения. Типы измерений и их погрешности**	**2**			
1.1	Физические измерения. Цели и задачи измерений. Погрешности измерений и их причины. Систематические и случайные погрешности. Промахи. Виды оценок погрешностей. Вероятность	2			2

	случайного события. Вероятностные ошибки. Классификация случайных ошибок. Законы распределения ошибок. Неравенство Чебышева. Определение доверительного интервала и доверительной вероятности. Запись результата измерений.				
2.	**Методы обработки результатов измерений**	**2**			
2.1	Метод подсчета цифр. Метод границ. Метод границ погрешностей (дифференциальный). Статистический метод. Графический метод. Метод наименьших квадратов	2			2
3	**Физические приборы и их точность**			**2**	
3.1	Виды средств измерений. Типы шкал отсчета. Оценка погрешности отсчета. Оценка инструментальных погрешностей. Класс точности физического прибора.			2	4
4.	**Приемы вычислений**			**2**	
4.1	Точные и приближенные числа. Формы записи приближенных чисел. Правила округления. Округление погрешности и результата измерений.			2	2
5	**Использование вычислительной техники**			**2**	
5.1	Калькулятор. Электронные таблицы. Персональный компьютер			2	2
6	**Прямые измерения**			**8**	
6.1	Прямые измерения и алгоритм проведения математической обработки их результатов. 1. Нахождение среднего арифметического 2. Определение стандартного отклонения 3. Определение доверительного интервала			2	4
6.2	Лабораторная работа №1.1 «Измерение времени соударения шаров. Статистический метод оценки случайных погрешностей»			4	
6.3	Оформление отчетов по лабораторной работе №1.1			2	
7	**Косвенные измерения**			**8**	
7.1	Косвенные измерения и алгоритм			2	4

	проведения математической обработки их результатов. Косвенные измерения и алгоритм проведения математической обработки их результатов. 1. Дополнительные шкалы-нониусы 2. Изучение штангенциркуля 3. Изучение микрометра				
7.2	Косвенные измерения и алгоритм проведения математической обработки их результатов. Лабораторная работа №1.2 «Определение линейных размеров и объемов тел. Обработка результатов измерений»			4	
7.3	Оформление отчетов по лабораторной работе №1.2.			2	
8.	**Совместные измерения**			**8**	
8.1	Совместные измерения и алгоритм проведения математической обработки их результатов.			2	2
8.2	Лабораторная работа №1.3 «Исследование зависимостей и математического маятника».			4	
8.3	Совместные измерения и алгоритм проведения математической обработки их результатов. 1. Определение периода колебаний и амплитуды математического маятника 2. Построение графиков зависимости $T(l)$ и $A(t)$ 3. Построение линии тренда с ис пользованием метода наименьших квадратов Оформление отчетов по лабораторной работе №1.3			2	4
Итого		**4**		**30**	**26**