УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ МАКСИМА ТАНКА»

Физико-математический факультет

Кафедра физики и методики преподавания физики

(рег. № УМ 24-3-91-2020 г.)

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой физики и методики преподавания физики	Декан физико-математического факультета
__________ В.Р. Соболь	__________ С.И. Василец
«05» 11 2019 г.	«05» 11 2019 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

для специальности:
1-02 05 02 Физика и информатика

Составители:
Саечников К.А., доцент кафедры физики и методики преподавания физики УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент
Соболь В.Р., заведующий кафедрой физики и методики преподавания физики УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», доктор физико-математических наук, профессор

Рассмотрено и утверждено
на заседании Совета БГПУ 26 сентября 2019 г. протокол № 1

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

«Методы математической физики» – учебная дисциплина, содержащая систематизированные научные знания и алгоритмы применения средств математики для описания и обобщения разнообразных физических процессов и явлений.

Учебно-методический комплекс (УМК) по дисциплине «Методы математической физики» предназначен для методической поддержки при обеспечении профессиональной подготовки студентов физико-математического факультета БГПУ. Комплекс создан в соответствии с требованиями образовательных программ и образовательных стандартов высшего образования (Кодекс Республики Беларусь об образовании 2010 г., Положение об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования N 167 от 2011 г.). Комплекс отвечает требованиям с четырехлетним сроком обучения по специальностям 1-02 05 02 Физика и информатика.

Содержание учебно-методического комплекса соответствует первой ступени обучения в системе многоуровневого педагогического образования. Комплекс составлен с учетом того, что в подготовке учителя физики курс математической физики и математических методов является дополнительным.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Методы математической физики» направлен на формирования наиболее рациональной процедуры изложения и усвоения математических методов и приемов применительно к моделированию фундаментальных физических законов.

Цель преподавания и изучения дисциплины «Методы математической физики» состоит в формировании у студентов научного мировоззрения и приобретении ими фундаментальных знаний о главенстве роли математики в физике в целом и возможностях применения математической систематизации для описания значительного круга физических явлений, лежащих в основе всех тем и параграфов из разделов общей физики – механики, молекулярной физики и термодинамики, электричества, магнетизма, оптики, квантовой физики.

Важным моментом при изучении указанной дисциплины является приобщение студентов к арсеналу математических методов, без знания которых невозможно последующее углубленное изучение разделов теоретической физики – «Теоретической механики», «Электродинамики», «Квантовой физики» на первой и второй ступени получения высшего образования.

Задачи изучения учебной дисциплины «Методы математической физики» заключаются в приобретении студентами академических компетенций, основу которых составляет способность к самостоятельному поиску учебно-информационных ресурсов, овладению методами приобретения и осмысления знания:

– основных понятий математики из области интегрального и дифференциального исчисления для описания физических явлений.

– приемов и способов адаптации методов математики для интерпретации установленных закономерностей в природе.

– важнейших проявлений таких понятий как причинно-следственная связь между физическими явлениями и процессами в линейном и ином приближении.

– факторов абстрагирования и упрощенной формализации при описании равновесных и неравновесных процессов на примере явлений переноса тепла и заряда.

Структура УМК:

– теоретический раздел содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины (элементы лекционного материала, основные формулы, примеры);

– практический (материалы для решения задач по темам «Скалярное поле», «Метод функции Грина», «Самосопряженные операторы», задания для проведения практических занятий, задания для самостоятельной работы студентов и УСРС);

– раздел контроля знаний (вопросы для проведения промежуточного и итогового контроля знаний);

– вспомогательный (элементы учебно-программной документации образовательной программы, учебно-методической документации, перечень учебных изданий, рекомендуемых для изучения дисциплины «Методы математической физики»).

Преподавание и успешное изучение учебной дисциплины «Методы математической физики» осуществляется на базе приобретенных студентом знаний и умений по дисциплинам «Общая физика», (включая ее разделы механики, молекулярной физики и термодинамики, электричества и магнетизма, оптики, квантовой физики), «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Специальный физический практикум».

В комплексе органично сочетаются вопросы взаимосвязи физики и математики, включены данные о наиболее важных физических задачах, которые на основе методов дифференциального исчисления могут быть формализованы в виде достаточно простых соотношений, которые можно разрешить с учетом граничных и начальных условий.

Обозначены границы выполнения применяемых физических концепций, моделей, теорий. Особое внимание уделяется методологическим проблемам математической физики как науки, позволяющей отследить эволюцию физических явлений. Планируемые практические занятия направлены на приобретение студентами навыков использования полученных теоретических знаний при решении конкретных численных задач.

В результате изучения учебной дисциплины «Методы математической физики» студент должен **знать**:

– основные понятия, связанные с мировоззренческим потенциалом физики и математики в философских и методологических аспектах

– ход становления основных этапов математической физики по ее глобальным разделам;

– роль математики в системе теоретической физики вообще и относительно проблем создания новых перспективных материалов и технологий, включая значимость таких понятий как математическая модель физического процесса, численный эксперимент, интерполяция и экстраполяция физических свойств;

– иерархию эмпирического и аналитического подходов в описании и исследовании явлений окружающего мира;

– физические понятия, законы, принципы и теории в природе и в вычислительной технике;

– основные типы уравнений математической физики и методы их вывода из физическихмоделей;

– методы точного решения базовых уравнений математической физики;

– понятие фундаментального решения;

– основные типы специальных функций.

В результате изучения учебной дисциплины «Методы математической физики» студент должен **уметь**:

– решать уравнения с частными производными, включая

– уравнение первого порядка, уравнение диффузии (теплопроводности),

– волновое уравнение, уравнение Лапласа.

– пользоваться системой теоретических знаний для решения задач в области прикладной физики;

– проводить анализ проблем физического процесса или явления в рамках математического формализма;

– применять аппарат прикладной математики для решения актуальных задач и проблем физики;

– использовать программные средства общего и специального назначения в сфере обучения и усвоения знания в области математической физики;

В результате изучения учебной дисциплины «Методы математической физики» студент должен **владеть**:

– системой знаний о математических понятиях, принципах, теориях, математической сущности представления физических процессов

– практическими умениями решать качественные, расчетные и графические задачи физики методами высшей математики

– методами численного расчета и графического отображения физических закономерностей

– умениями применять полученные знания для описания и объяснения явлений в природе, физических свойств вещества, для понимания роли математики в развитии физических моделей мира.

Всего на изучение учебной дисциплины «Методы математической физики» отводится 132 часа, из них аудиторных 46 часов, на самостоятельную работу студентов – 50 часов. Распределение часов по видам аудиторных занятий: 30 часов лекций, 16 часов практических занятий. Изучение дисциплины проводится на 3 курсе (5 семестр), дневной формы получения образования.

На управляемую самостоятельную работу по учебной дисциплине «Методы математической физики» отводится 12 часов, из них: 8 часов лекций, 4 часа практических занятий.

Текущая аттестация проводится в соответствии с учебным планом по специальности «Методы математической физики» в форме экзамена в 5 семестре.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Элементы лекционного материала. Основные формулы и примеры решений

Лекция 1

Скалярное поле. Поверхности, линии уровня Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его физический смысл. Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля через поверхность

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\vec{l},x)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\vec{l},y)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\vec{l},z)$ – производная по направлению вектора $\vec{l}$;

$grad\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$ – определение градиента скалярного поля;

$grad\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}$ – формула $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\left|grad\varphi\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$ – модуль $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|},\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|},\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

$\dfrac{dx}{a_x}=\dfrac{dy}{a_y}=\dfrac{\partial z}{a_z}$ – дифференциальное уравнение векторных линий;

$N=\oiint\limits_{(S)}\vec{a}(M)\cdot dS$ – поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S;

$div\vec{A}(M)=\dfrac{\partial a_x}{\partial x}+\dfrac{\partial a_y}{\partial y}+\dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля;

$\oiint\limits_{(S)}\vec{a}(M)\cdot dS=\int\limits_{(V)}div\vec{a}(M)dV$ – теорема Остроградского-Гаусса;

$C=\oint\limits_{(l)}\vec{a}(M)\cdot dr=\oint\limits_{(l)}a_xdx+a_ydy+a_zdz$ – циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой l;

$rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ – ротор (вихрь) векторного поля $\vec{a}(M)$;

$\oint\limits_{(l)} \vec{a}(M) \cdot dr = \int\limits_{(S)} rot\vec{a}(M) \cdot dS$ – теорема Стокса.

Лекция 2

Основные формулы и операции векторной алгебры в декартовой системе. Понятия градиента, дивергенции, ротора для скалярного и векторного поля.

$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos(\vec{l}, z)$ – производная по направлению вектора $\vec{l}$;

$grad\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\vec{n}$ – определение градиента скалярного поля;

$grad\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{k}$ – формула $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\left|grad\varphi\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$ – модуль $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Пример. Дано скалярное поле $\varphi = \frac{x^2 y^3}{z^2}$. В каком направлении функция φ будет возрастать быстрее всего, если исходить из т. А(1,2,-1)?

Решение:

Направление наибольшего возрастания функции φ указывается её градиентом в данной т. А. Прежде всего надо найти градиент указанной функции в произвольной точке, а затем подставить в найденный градиент координаты т.А.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2xy^3}{z^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3x^2y^2}{z^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2x^2y^3}{z^3};$$

Тогда

$$grad\varphi = \frac{2xy^3}{z^2}\vec{i} + \frac{3x^2y^2}{z^2}\vec{j} + \frac{2x^2y^3}{z^3}\vec{k};$$

Находим $grad\varphi$ в т. А(1,2,-1).

$\left(grad\varphi\right)_A = 16\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$ – этот вектор указывает направление наибыстрейшего возрастания функции в т. А(1,2,-1).

$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{\partial z}{a_z}$ – дифференциальное уравнение векторных линий;

$N = \oiint\limits_{(S)} \vec{a}(M) \cdot dS$ – поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S;

$div\vec{A}(M) = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля;

$\oiint\limits_{(S)} \vec{a}(M) \cdot dS = \int\limits_{(V)} div\vec{a}(M)dV$ – теорема Остроградского – Гаусса;

$C = \oint\limits_{(l)} \vec{a}(M) \cdot dr = \oint\limits_{(l)} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ – циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой l;

$rot\vec{a}(M) = \left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ – ротор (вихрь) векторного поля $\vec{a}(M)$;

$\oint\limits_{(l)} \vec{a}(M) \cdot dr = \int\limits_{(S)} rot\vec{a}(M) \cdot dS$ – теорема Стокса.

Пример. Дано поле вектора $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$. Найти уравнение векторных линий.

Решение:

Используя уравнение векторных линий, запишем:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z},$$

или

1) $\dfrac{dx}{2x} = -\dfrac{dy}{y}$;

2) $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dz}{z}$.

Интегрируя, получаем семейства векторных линий

1) $\dfrac{1}{2}\ln x = -\ln y + \ln C_1 \Rightarrow \sqrt{x}y = C_1 \Rightarrow y^2 = \dfrac{C_1^{\ 2}}{x}$;

2) $\dfrac{1}{2}\ln x = \ln z + \ln C_2 \Rightarrow \sqrt{x} = C_2 z \Rightarrow z^2 = C_2^{\ 2} x$.

Лекция 3

Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его физический смысл

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial l} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\vec{l}, x) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\vec{l}, y) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\cos(\vec{l}, z)$ – производная по направлению вектора $\vec{l}$;

$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$ – – определение градиента скалярного поля;

$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}$ – формула $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\left|grad\varphi\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$ – модуль $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Пример. Найти градиент потенциала $\varphi = \frac{e}{r}$ электростатического поля, модуль градиента, учитывая, что напряжённость $\vec{E}$ электростатического поля точечного заряда определяется вектором $\frac{e}{r^2}\vec{r}^{\,0}$, где $\vec{r}^{\,0}$ – единичный вектор, r – расстояние от т. A (x,y,z) до начала координат, где находится заряд e.

Решение. Находим частные производные и записываем $grad\varphi$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial x} = -\frac{ex}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{ex}{r^3}.$$

По аналогии записываем остальные производные: $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{ey}{r^3}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{ez}{r^3}$. Следовательно, $grad\varphi = -\frac{e}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -e\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Введем в предыдущей формуле единичный вектор $\vec{r}^{\,0} = \frac{\vec{r}}{r}$ и запишем градиент в виде $grad\varphi = -\frac{e}{r^2}\vec{r}^{\,0}$, или, согласно условию задачи $grad\varphi = \vec{E}$.

Находим модуль $grad\varphi$, который указывает скорость изменения скалярного поля в т.A(x,y,z).

$$\left|grad\varphi\right| = e\sqrt{\frac{x^2}{r^6} + \frac{y^2}{r^6} + \frac{z^2}{r^6}} = \frac{e}{r^2}.$$

Лекция 4

Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского-Гаусса. Циркуляция и ротор векторного поля. Теорема Стокса.

$N = \oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{a}(M) \cdot dS$ – поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S;

$div\vec{A}(M)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля;

$\oiint\limits_{(S)}\vec{a}(M)\cdot dS=\int\limits_{(V)}div\vec{a}(M)dV$ – теорема Остроградского-Гаусса;

$C=\oint\limits_{(l)}\vec{a}(M)\cdot dr=\oint\limits_{(l)}a_x dx+a_y dy+a_z dz$ – циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой l;

$rot\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ – ротор (вихрь) векторного поля $\vec{a}(M)$;

$\oint\limits_{(l)}\vec{a}(M)\cdot dr=\int\limits_{(S)}rot\vec{a}(M)\cdot dS$ – теорема Стокса.

Лекция 5

Векторное поле. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского – Гаусса.

$div\vec{A}(M)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля;

$\oiint\limits_{(S)}\vec{a}(M)\cdot dS=\int\limits_{(V)}div\vec{a}(M)dV$ – теорема Остроградского – Гаусса;

$C=\oint\limits_{(l)}\vec{a}(M)\cdot dr=\oint\limits_{(l)}a_x dx+a_y dy+a_z dz$ – циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой l;

$rot\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ – ротор (вихрь) векторного поля $\vec{a}(M)$;

$\oint\limits_{(l)}\vec{a}(M)\cdot dr=\int\limits_{(S)}rot\vec{a}(M)\cdot dS$ – теорема Стокса.

Пример.

Дано поле вектора $\vec{a}=2x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$. Найти уравнение векторных линий.

Решение.

Используя уравнение векторных линий, запишем:

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z} \text{ или } \quad 1)\ \frac{dx}{2x}=-\frac{dy}{y};\ 2)\ \frac{dx}{2x}=\frac{dz}{z}.$$

Интегрируя, получаем семейства векторных линий

$$\frac{1}{2}\ln x=-\ln y+\ln C_1\Rightarrow\sqrt{x}y=C_1\Rightarrow y^2=\frac{C_1^{\,2}}{x};$$

$$\frac{1}{2}\ln x=\ln z+\ln C_2\Rightarrow\sqrt{x}=C_2 z\Rightarrow z^2=C_2^{\,2}x.$$

Надо иметь в виду, что начало координат является в этой задаче особой точкой.

Лекция 6

Циркуляция и ротор векторного поля. Теорема Стокса.

$div\vec{A}(M) = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля;

$C = \oint\limits_{(l)} \vec{a}(M) \cdot dr = \oint\limits_{(l)} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ – циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой l;

$rot\vec{a}(M) = \left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ – ротор (вихрь) векторного поля $\vec{a}(M)$;

$\oint\limits_{(l)} \vec{a}(M) \cdot dr = \int\limits_{(S)} rot\vec{a}(M) \cdot dS$ – теорема Стокса.

Пример.

Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг некоторой оси. Известно, что во вращательном движении линейная скорость $\vec{v}$ точек тела определяется по формуле $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки $A(x, y, z)$ тела. Найти $rot\vec{v}$.

Решение. Проекции векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$ равны (угловую скорость направим по оси вращения OZ):

$$\omega_x = 0; \omega_y = 0; \omega_z = \omega; r_x = x; r_y = y; r_z = z.$$

Находим векторное произведение:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}.$$

Следовательно, проекции вектора $\vec{v}$ будут равны: $v_x = -\omega y; v_y = \omega x; v_z = 0$.

После нахождения частных производных от проекций вектора $\vec{v}$ будем иметь

$$rot\vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 2\omega\vec{k}.$$

В связи с тем, что вектор $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, можем записать: $rot\vec{v} = 2\vec{\omega}$. Следовательно, ротор линейной скорости точек вращающегося твёрдого тела имеет постоянное значение во всех точках тела и равен удвоенной угловой скорости его вращения.

Пример. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = r\vec{r}$ через замкнутую сферическую поверхность радиусом R.

Решение.

Применим теорему Остроградского – Гаусса, предварительно вычислив дивергенцию векторного поля.

$$divr\vec{r} = rdiv\vec{r} + \vec{r} \cdot gradr = 3r + r \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 4r.$$

Подставляем в формулу Остроградского – Гаусса: $N=\int\limits_0^R 4r4\pi r^2dr=4\pi R^4$, так как $dV=4\pi r^2dr$.

Лекция 7

Оператор Гамильтона «набла». Дифференциальные операции первого порядка. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа.

$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}$ – оператор Гамильтона в декартовых координатах;

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial x}\vec{k}$$

$$grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}=\nabla\varphi$$

$$div\vec{A}(M)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\left(\nabla\bullet\overline{A}\right)$$

$$rot\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}=\left[\nabla\times\overline{A}\right];$$

Лекция 8

Оператор Гамильтона «набла». Дифференциальные операции 1 и 2-го порядка. Оператор Лапласа.

$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}$ – оператор Гамильтона в декартовых координатах;

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial x}\vec{k}$$

$$grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}=\nabla\varphi$$

$$div\vec{A}(M)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\left(\nabla\bullet\overline{A}\right)$$

$$rot\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}=\left[\nabla\times\overline{A}\right]$$

$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{\partial z}{a_z}$ – дифференциальное уравнение векторных линий;

$N=\oint\limits_{(S)}\vec{a}(M)\cdot dS$ – поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S;

$div\vec{A}(M)=\dfrac{\partial a_x}{\partial x}+\dfrac{\partial a_y}{\partial y}+\dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля;

$\oiint\limits_{(S)}\vec{a}(M)\cdot dS=\int\limits_{(V)}div\vec{a}(M)dV$ – теорема Остроградского-Гаусса;

$C=\oint\limits_{(l)}\vec{a}(M)\cdot dr=\oint\limits_{(l)}a_x dx+a_y dy+a_z dz$ – циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой l;

$rot\vec{a}(M)=\left(\dfrac{\partial a_z}{\partial y}-\dfrac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial z}-\dfrac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x}-\dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ – ротор (вихрь) векторного поля $\vec{a}(M)$;

$\oint\limits_{(l)}\vec{a}(M)\cdot dr=\int\limits_{(S)}rot\vec{a}(M)\cdot dS$ – теорема Стокса.

Лекция 9

Классификация векторных полей. Потенциальное векторное поле. Скалярный потенциал. Уравнение для потенциала. Гармонические функции.

$grad\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$ – определение градиента скалярного поля;

$grad\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}$ – формула $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\left|grad\varphi\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$ – модуль $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|},\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|},\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Пример 1. Дано скалярное поле $\varphi=\dfrac{x^2y^3}{z^2}$. В каком направлении функция φ будет возрастать быстрее всего, если исходить из т.А(1,2,-1)?

Решение. Направление наибольшего возрастания функции φ указывается её градиентом в данной т. А. Прежде всего надо найти градиент указанной функции в произвольной точке, а затем подставить в найденный градиент координаты т. А.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2xy^3}{z^2},\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{3x^2y^2}{z^2},\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{2x^2y^3}{z^3};$$

Тогда

$$grad\varphi=\frac{2xy^3}{z^2}\vec{i}+\frac{3x^2y^2}{z^2}\vec{j}+\frac{2x^2y^3}{z^3}\vec{k};$$

Находим $grad\varphi$ в т. А(1,2,-1).

$\left(grad\varphi\right)_A = 16\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$ – этот вектор указывает направление наибыстрейшего возрастания функции в т. A(1,2,-1).

Пример 2. Найти градиент потенциала $\varphi = \frac{e}{r}$ электростатического поля, модуль градиента, учитывая, что напряжённость $\vec{E}$ электростатического поля точечного заряда определяется вектором $\frac{e}{r^2}\vec{r}^{\,0}$, где $\vec{r}^{\,0}$ – единичный вектор, r – расстояние от т. A (x,y,z) до начала координат, где находится заряд e.

Решение. Находим частные производные и записываем $grad\varphi$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial x} = -\frac{ex}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{ex}{r^3}.$$

По аналогии записываем остальные производные: $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{ey}{r^3}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{ez}{r^3}$. Следовательно $grad\varphi = -\frac{e}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -e\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Введем в предыдущей формуле единичный вектор $\vec{r}^{\,0} = \frac{\vec{r}}{r}$ и запишем градиент в виде $grad\varphi = -\frac{e}{r^2}\vec{r}^{\,0}$, или, согласно условию задачи $grad\varphi = \vec{E}$.

Находим модуль $grad\varphi$, который указывает скорость изменения скалярного поля в т. A(x,y,z).

$$\left|grad\varphi\right| = e\sqrt{\frac{x^2}{r^6} + \frac{y^2}{r^6} + \frac{z^2}{r^6}} = \frac{e}{r^2}.$$

Лекция 10

Элементы теории поля в криволинейных координатах. Криволинейная ортогональная система координат. Коэффициенты Ламе

Лекция 11

Элементы теории поля в криволинейных координатах. Ортогональные системы координат. Коэффициенты Ламе. Дифференциальные операции в сферических и цилиндрических координатах

Лекция 12

Дифференциальные операции на сфере и цилиндре.

Лекция 13

Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка. Основные уравнения математической физики. Граничные и начальные условия

Лекция 14

Вывод уравнений колебания струны и теплопроводности, уравнение для потенциалов электромагнитного поля. Уравнения для свободных электрического и магнитного полей

Лекция 15

Метод разделения переменных. Свободные колебания струны

Лекция 16

Метод Фурье при решении дифференциальных уравнений

Лекции 17

Эрмитовские операторы. Собственные значения и собственные функции. Самосопряженные операторы и ортогональные системы функций. Самосопряженные операторы и ортогональные системы функций. Эрмитовские (эрмитовы, самосопряженные) операторы

Ранее при решении задачи о колебании струны, движении частицы в потенциальной яме мы встречались с уравнением вида

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \qquad (1)$$

где $\hat{L}$ – некоторый дифференциальный оператор, а λ мы называли параметром разделения переменных. И мы с вами убедились, что решение такого уравнения, удовлетворяющее некоторым условиям, существует не при всех λ. Например, в задаче о колебании струны и движении частицы в потенциальной яме

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{e} \qquad (2)$$

т.е. λ принимало дискретный ряд значений.

Уравнение (1) называют уравнением для собственных функций и собственных значений оператора $\hat{L}$. Собственные значения оператора – это те значения параметра λ_n, при которых существуют решения уравнения (1). Решение ψ_n, соответствующее собственным значениям λ_n, называют собственными функциями.

В (2) λ_n принимает дискретный ряд значений, значит спектр собственных значений оператора $\hat{L}$- дискретный. Если же λ принимает непрерывный ряд значений: $a<\lambda<b$, то спектр собственных значений оператора $\hat{L}$ сплошной. Характер спектра собственных значений оператора определяется граничными и начальными условиями, которым должно удовлетворять решение уравнения (1). Мы помним, что для движения частицы в потенциальной яме с граничными условиями $\psi(0)=0$ *и* $\psi(l)=0$ для λ_n получалось значение $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, а собственные функции принимали вид:

$$\psi_n=a_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

В результате выяснилось, что энергия является квантованной (спектр дискретный)

$$E_n=\frac{\hbar^2n^2\pi^2}{2ml^2}x,\ \ n=1,2,....$$

Почти все задачи квантовой механики сводятся к решению уравнений вида (1), где $\hat{L}$ – некоторый оператор, необязательно дифференциальный.

Оператор – это символ, выражающий или обозначающий действие, с помощью которого из одной функции получают другую функцию или, другими словами, это правило по которому одной функции $\psi(x)$ ставится в соответствие другая функция $f(x)$ тех же независимых переменных.

Если одному м тому же собственному значению λ_n оператора соответствует несколько линейно независимых собственных функций, то говорят, что собственные значения λ_n вырождены, т.е. если $\hat{L}\psi_{ni}=\lambda_n\psi_{ni}$, $i=1,2,3...m_n$, то целое значение m_n называют кратностью вырождения.

Можно показать, что собственные значения оператора $\hat{L}^{-1}$, обратного к оператору $\hat{L}$, будут обратными к собственным значениям λ_n, т.е. λ_n^{-1}. В самом деле $\hat{L}\hat{L}^{-1}\psi_n=\hat{L}^{-1}\hat{L}\psi_n=\hat{L}^{-1}\lambda_n\psi_n=\psi_n$.
Откуда

$$\hat{L}^{-1}\lambda_n^{-1}\lambda_n\psi_n=\lambda_n^{-1}\psi_n\ \Rightarrow\ \hat{L}^{-1}\psi_n=\lambda_n^{-1}\psi_n \qquad (3)$$

Из (3) следует, что $\hat{L}^{-1}$ будет существовать при условии, что ни одно собственное значение $\lambda_n\neq 0$.

Оператор $\hat{L}$ называется линейным, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$\hat{L}(a\psi)=a\hat{L}\psi,\qquad\qquad a=const$$

$$\hat{L}(\psi_1+\psi_2)=\hat{L}\psi_1+\hat{L}\psi_2$$

Например, оператор $\sqrt{\ }$ является нелинейным, т.к. $\sqrt{a\psi}\neq a\sqrt{\psi}$.

Линейным является оператор $\dfrac{d}{dx}$, т.к.

$$\frac{d}{dx}(a\psi) = a\frac{d\psi}{dx}; \qquad \frac{d}{dx}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{d}{dx}\psi_1 + \frac{d}{dx}\psi_2$$

Оператор Лапласа Δ линейный. Линейные операторы не нарушают принципа суперпозиции.

Скалярное произведение двух функций определяется как

$$(\varphi,\psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x)\psi(x)dx \tag{4}$$

Исходя из условия квадратичной интегрируемости, функции φ *и* ψ должны на ∞ обращаться в нуль. В трехмерном пространстве

$$(\varphi,\psi) = \int \varphi^*(x,y,z)\psi(x,y,z)dxdydz \tag{5}$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(\varphi,\psi) = (\psi,\varphi)^*$
2. $(\varphi,\psi_1 + \psi_2) = (\varphi,\psi_1) + (\varphi,\psi_2)$
3. $(\varphi_1 + \varphi_2,\psi) = (\varphi_1,\psi) + (\varphi_2,\psi)$
4. $(\lambda\varphi,\psi) = \lambda^*(\varphi,\psi), \quad \lambda = const$
5. $(\varphi,\lambda\psi) = \lambda(\psi,\varphi)$

Сопряженные линейные операторы

Пусть $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ – линейные операторы. Если выполняется условие

$$(\hat{A}\varphi,\psi) = (\varphi,\hat{B}\psi) \tag{6}$$

то говорят, что операторы $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ сопряжены друг другу.

$$B = A^+ \text{ и } A = B^+,$$

«+» – знак сопряжения. Например: Пусть оператор $\hat{C}$ – число. Найдем C^+. Итак,

$$(\varphi,\hat{C}\psi) = \int \varphi^*(x)\hat{C}\psi(x)dx$$

На основании того, что:

$$(\varphi,C\psi) = (C^+\varphi,\psi),$$

мы получаем

$$(\hat{C}^+\varphi,\psi) = \int \hat{C}^{+*}\varphi^*(x)\psi(x)dx$$

Согласно (6) должно выполняться равенство

$$\int \varphi^*(x)\hat{C}\psi(x)dx = \int \hat{C}^{+*}\varphi^*(x)\psi(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$C^{+*} = C \quad \Rightarrow \quad C^+ = C^*$$

Значит, сопряженный оператор к постоянной – это число, являющееся комплексным сопряжением от постоянной.

Найдем $(\frac{d}{dx})^{+}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}((\frac{d}{dx})^{+}\varphi(x))^{*}\psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{*}(x)(\frac{d}{dx})\psi(x)dx$$

Интегрируем по частям интеграл в правой части:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{*}(x)\frac{d}{dx}\psi(x)dx=\varphi^{*}(x)\psi(x)\Big/_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi^{*}(x)}{dx}\psi(x)dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi^{*}(x)}{dx}\psi(x)dx$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{d}{dx})^{+*}\varphi^{*}(x)\psi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\varphi^{*}(x)\psi(x)dx$$

$$(\frac{d}{dx})^{+*}=-\frac{d}{dx}\quad\Rightarrow\quad(\frac{d}{dx})^{+}=-(\frac{d}{dx})^{*}$$

или

$$(\frac{d}{dx})^{+}=-\frac{d}{dx}$$

т.к. $\frac{d}{dx}$ – вещественное, тогда

$$(\varphi,\frac{d\psi}{dx})=-(\frac{d\varphi}{dx},\psi)$$

Чтобы получить сопряженный оператор $\hat{A}^{+}$ к матричному оператору $\hat{A}$, необходимо матричные элементы оператора $\hat{A}$ транспонировать и взять от них комплексные сопряжения. Например,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2i\\ 3i & 0\end{pmatrix}$$

$$A^{T}=\begin{pmatrix}1 & 3i\\ -2i & 0\end{pmatrix}$$

$$A^{+}=\begin{pmatrix}1 & -3i\\ 2i & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^{+}=(A^{T})^{*}$$

Лекция 18

Решение уравнения Шредингера для частицы, движущейся в прямоугольной потенциальной яме и в центральном силовом поле.

Лекция 19

Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Дельта-функция Дирака.

Лекция 20

Самосогласованные операторы и ортонормированная совокупность функций. Математический аппарат квантовой механики.

Лекция 21

Метод функций Грина. Запаздывающие потенциалы.

Метод функции Грина

Для решения неоднородных краевых задач часто используется метод функции Грина. Следует помнить, что задача может быть неоднородной вследствие:

1) неоднородности самого уравнения.

2) неоднородности краевых и начальных условий (т.е. когда эти условия не нулевые).

Суть метода функции Грина выясним на решении уравнения теплопроводности.

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{3.57}$$

где $a^2=\dfrac{k}{C_p\rho}$; k – теплопроводность, для изотропной среды $k=const$; C_p – удельная теплоемкость среды; ρ – плотность.

$$\psi(x,t)/_{t=0}=\varphi(x) \tag{3.58}$$

Это задача охлаждения бесконечного стержня. Стержень нагрет неравномерно и в начальный момент времени $t=0$ температура задана (3.58). Нам необходимо найти распределение температуры для любого $t>0$. Поскольку стержень очень длинный, то можно не учитывать температуру на его концах, т.е. граничных условий нет.

Уравнение (3.57) – это случай, когда в стержне отсутствуют источники тепла. (Если источники тепла в теле имеются, то получаем более общее неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\Delta T-\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{q}{k},$$

где q – источник тепла).

Уравнение (3.57) – однородное, но начальные условия не однородные. Решение задачи определяется начальным условием. Допустим, что решение имеет такой вид:

$$\psi(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,t,\xi)\varphi(\xi)d\xi \qquad (3.59)$$

где ξ – переменная интегрирования; $\varphi(\xi)$ - функция, которая определена на всей оси Ох; пределы интегрирования бесконечны, т.к. стержень бесконечный; $G(x,t,\xi)$ – некоторая, пока неизвестная нам функция, которую нужно определить. Она называется функцией Грина.

Какой физический смысл функции Грина?

Чтобы выяснить это, предположим, что в начальный момент времени распределение температуры стержня задается функцией:

$$\varphi(x)=\delta(x-x_0) \qquad (3.60)$$

т.е. температура неравна нулю и очень велика лишь в одной точке $x=x_0$.

Такую температуру можно создать, если в момент времени $t=0$ сообщить тепловой импульс телу в точке $x=x_0$.

Тогда из формулы (3.59) будем иметь:

$$\psi_0(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,t,\xi)\delta(\xi-x_0)d\xi=G(x,t,x_0)$$

(по свойству δ - функции)

Значит, смысл функции Грина следующий: она является решением задачи с «точечным» начальным условием. Это дает нам возможность свести множество задач, отличающихся друг от друга начальными условиями, к решению одной единственной задачи с начальными условиями вида (3.60), т.к. зная G, по (3.59) можно найти решение любой задачи.

Найдем функцию $G(x,t,x_0)=\psi_0(x,t)$. Поскольку эта функция определена на всей оси, то ее можно разложить в интеграл Фурье:

$$\psi_0(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega \qquad (3.61)$$

Здесь время t играет роль параметра. Фурье – образ $f(\omega,t)$ – зависит от времени t, т.к. для различных моментов времени вид функции $\psi_0(x,t)$, а значит и $f(\omega,t)$ будет различным.

Подставим (3.61) в уравнение (3.57):

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot f(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\omega,t)i\omega e^{i\omega x}d\omega$$

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^2 f(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\dot{f}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega=-\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2a^2f(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

Отсюда следует, что

$$\dot{f}(\omega,t)=-\omega^2a^2f(\omega,t) \tag{3.62}$$

Уравнение (3.62) называют преобразованием Фурье исходного уравнения (3.57). Решим его:

$$\frac{\dot{f}}{f}=-\omega^2a^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{df}{f}=-\omega^2a^2dt$$

$$\ln f=-\omega^2a^2t+\ln C(\omega)$$

$$\ln(\frac{1}{C(\omega)})=-\omega^2a^2t$$

$$f(\omega,t)=C(\omega)e^{-a^2\omega^2t}$$

Значит, согласно формуле (3.61)

$$\psi_0(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{-a^2\omega^2t}e^{i\omega x}d\omega$$

$C(\omega)$ находим из начального условия:

$$\psi_0(x,t)/_{t=0}=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\delta(x-x_0)$$

Сравним эту формулу с (3.56) и видим, что

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega x_0}$$

Итак, окончательно получим, что

$$G(x,t,x_0)=\psi_0(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x_0}e^{-a^2\omega^2t}e^{i\omega x}d\omega$$

$$G(x,t,x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}e^{i\omega(x-x_0)}d\omega$$

Согласно формуле (3.59) общее решение, т.е. решение без учета конкретных начальных условий, будет иметь вид:

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega^2t}e^{i\omega(x-\xi)}d\omega)d\xi \tag{3.63}$$

Надо отметить, что решение этой же задачи можно получить и методом Фурье, т.е. методом разделения переменных, и результат должен быть один и тот же.

Лекция 22

Решение неоднородного волнового уравнения методом функций Грина.

Лекция 23

Основы математической теории поля. Элементы теории поля в криволинейных координатах

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Скалярное поле

Основные формулы:

$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\vec{l},x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\vec{l},y)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\vec{l},z)$ – производная по направлению вектора $\vec{l}$;

$grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$ – определение градиента скалярного поля;

$grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}$ – формула $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\left|grad\varphi\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$ – модуль $grad\varphi$ в декартовых координатах;

$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Пример 1.

Дано скалярное поле $\varphi=\frac{x^2y^3}{z^2}$. В каком направлении функция φ будет возрастать быстрее всего, если исходить из т. А(1,2,-1)?

Решение.

Направление наибольшего возрастания функции φ указывается её градиентом в данной т. А. Прежде всего надо найти градиент указанной функции в произвольной точке, а затем подставить в найденный градиент координаты т. А.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{2xy^3}{z^2},\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{3x^2y^2}{z^2},\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{2x^2y^3}{z^3};$$

Тогда

$$grad\varphi=\frac{2xy^3}{z^2}\vec{i}+\frac{3x^2y^2}{z^2}\vec{j}+\frac{2x^2y^3}{z^3}\vec{k};$$

Находим $grad\varphi$ в т. А(1,2,-1)

$\left(grad\varphi\right)_A=16\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k}$ – этот вектор указывает направление наибыстрейшего возрастания функции в т.А(1,2,-1).

Пример 2. Найти градиент потенциала $\varphi = \frac{e}{r}$ электростатического поля, модуль градиента, учитывая, что напряжённость $\vec{E}$ электростатического поля точечного заряда определяется вектором $\frac{e}{r^2}\vec{r}^{\,0}$

где $\vec{r}^{\,0}$ - единичный вектор, r - расстояние от т.А (x,y,z) до начала координат , где находится заряд e.

Решение. Находим частные производные и записываем $grad\varphi$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial x} = -\frac{ex}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{ex}{r^3}$$

По аналогии записываем остальные производные: $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{ey}{r^3}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{ez}{r^3}$.

Следовательно $grad\varphi = -\frac{e}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -e\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Введем в предыдущей формуле единичный вектор $\vec{r}^{\,0} = \frac{\vec{r}}{r}$ и запишем градиент в виде

$grad\varphi = -\frac{e}{r^2}\vec{r}^{\,0}$, или, согласно условию задачи $grad\varphi = \vec{E}$.

Находим модуль $grad\varphi$, который указывает скорость изменения скалярного поля в т.А(x,y,z).

$$\left|grad\varphi\right| = e\sqrt{\frac{x^2}{r^6} + \frac{y^2}{r^6} + \frac{z^2}{r^6}} = \frac{e}{r^2}.$$

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Основные формулы:

$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{\partial z}{a_z}$ – дифференциальное уравнение векторных линий;

$N = \oiint\limits_{(S)} \vec{a}(M)\cdot dS$ – поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S;

$div\vec{A}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ – дивергенция векторного поля;

$\oiint\limits_{(S)} \vec{a}(M)\cdot dS = \int\limits_{(V)} div\vec{a}(M)dV$ – теорема Остроградского-Гаусса;

$C = \oint\limits_{(l)} \vec{a}(M)\cdot dr = \oint\limits_{(l)} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ – циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой l;

$rot\vec{a}(M)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$ – ротор (вихрь) векторного поля $\vec{a}(M)$;

$\oint\limits_{(l)}\vec{a}(M)\cdot dr=\int\limits_{(S)} rot\vec{a}(M)\cdot dS$ – теорема Стокса.

Пример 1.

Дано поле вектора $\vec{a}=2x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$. Найти уравнение векторных линий.

Решение.

Используя уравнение векторных линий, запишем:

$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$ или 1) $\frac{dx}{2x}=-\frac{dy}{y}$; 2) $\frac{dx}{2x}=\frac{dz}{z}$.

Интегрируя, получаем семейства векторных линий

1) $\frac{1}{2}\ln x=-\ln y+\ln C_1 \Rightarrow \sqrt{x}y=C_1 \Rightarrow y^2=\frac{C_1^{\,2}}{x}$;

2) $\frac{1}{2}\ln x=\ln z+\ln C_2 \Rightarrow \sqrt{x}=C_2 z \Rightarrow z^2=C_2^{\,2}x$.

Надо иметь в виду, что начало координат является в этой задаче особой точкой.

Пример 2.

Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг некоторой оси. Известно, что во вращательном движении линейная скорость $\vec{v}$ точек тела определяется по формуле $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки $A(x,y,z)$ тела. Найти $rot\vec{v}$.

Решение. Проекции векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$ равны (угловую скорость направим по оси вращения OZ):

$$\omega_x=0;\omega_y=0;\omega_z=\omega;r_x=x;r_y=y;r_z=z.$$

Находим векторное произведение

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=-\omega y\vec{i}+\omega x\vec{j}.$$

Следовательно, проекции вектора $\vec{v}$ будут равны: $v_x=-\omega y; v_y=\omega x; v_z=0$.

После нахождения частных производных от проекций вектора $\vec{v}$ будем иметь

$$rot\vec{v}=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}=2\omega\vec{k}.$$

В связи с тем, что вектор $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$, можем записать: $rot\vec{v}=2\vec{\omega}$. Следовательно, ротор линейной скорости точек вращающегося твёрдого тела имеет постоянное значение во всех точках тела и равен удвоенной угловой скорости его вращения.

Пример 3. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)=r\vec{r}$ через замкнутую сферическую поверхность радиусом R.

Решение. Применим теорему Остроградского-Гаусса, предварительно вычислив дивергенцию векторного поля.

$$div r\vec{r} = r div\vec{r} + \vec{r}\cdot grad r = 3r + r\cdot\frac{\vec{r}}{r} = 4r.$$

Подставляем в формулу Остроградского-Гаусса: $N = \int_0^R 4r 4\pi r^2 dr = 4\pi R^4$, так как $dV = 4\pi r^2 dr$.

Метод функции Грина
Функции Грина для уравнения теплопроводности

Для решения неоднородных краевых задач часто используется метод функции Грина. Следует помнить, что задача может быть неоднородной вследствие:

1. Неоднородности самого уравнения.
2. Неоднородности краевых и начальных условий (т.е. когда эти условия не нулевые).

Суть метода функции Грина выясним на решении уравнения теплопроводности.

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{3.57}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{C_p\rho}$, k – теплопроводность, для изотропной среды $k = const$; C_p – удельная теплоемкость среды; ρ – плотность.

$$\psi(x,t)/_{t=0} = \varphi(x) \tag{3.58}$$

Это задача охлаждения бесконечного стержня. Стержень нагрет неравномерно и в начальный момент времени $t = 0$ температура задана (3.58). Нам необходимо найти распределение температуры для любого $t > 0$. Поскольку стержень очень длинный, то можно не учитывать температуру на его концах, т.е. граничных условий нет.

Уравнение (3.57) – это случай, когда в стержне отсутствуют источники тепла. (Если источники тепла в теле имеются, то получаем более общее неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\Delta T - \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{q}{k}$$

где q – источник тепла).

Уравнение (3.57) – однородное, но начальные условия не однородные. Решение задачи определяется начальным условием. Допустим, что решение имеет такой вид:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{3.59}$$

где ξ – переменная интегрирования; $\varphi(\xi)$ - функция, которая определена на всей оси Ох; пределы интегрирования бесконечны, т.к. стержень бесконечный; $G(x,t,\xi)$ – некоторая, пока неизвестная нам функция, которую нужно определить. Она называется функцией Грина.

Какой физический смысл функции Грина?

Чтобы выяснить это, предположим, что в начальный момент времени распределение температуры стержня задается функцией:

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0) \tag{3.60}$$

т.е. температура неравна нулю и очень велика лишь в одной точке $x = x_0$.

Такую температуру можно создать, если в момент времени $t = 0$ сообщить тепловой импульс телу в точке $x = x_0$.

Тогда из формулы (3.59) будем иметь:

$$\psi_0(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,\xi)\delta(\xi - x_0)d\xi = G(x,t,x_0)$$

(по свойству δ - функции)

Значит, смысл функции Грина следующий: она является решением задачи с «точечным» начальным условием. Это дает нам возможность свести множество задач, отличающихся друг от друга начальными условиями, к решению одной единственной задачи с начальными условиями вида (3.60), т.к. зная G, по (3.59) можно найти решение любой задачи.

Найдем функцию $G(x,t,x_0) = \psi_0(x,t)$. Поскольку эта функция определена на всей оси, то ее можно разложить в интеграл Фурье:

$$\psi_0(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega \tag{3.61}$$

Здесь время t играет роль параметра. Фурье – образ $f(\omega,t)$ – зависит от времени t, т.к. для различных моментов времени вид функции $\psi_0(x,t)$, а значит и $f(\omega,t)$ будет различным.

Подставим (3.61) в уравнение (3.57):

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega,t)i\omega e^{i\omega x}d\omega$$

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} = -\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega = -\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 a^2 f(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

Отсюда следует, что

$$\dot{f}(\omega,t) = -\omega^2 a^2 f(\omega,t) \qquad (3.62)$$

Уравнение (3.62) называют преобразованием Фурье исходного уравнения (3.57). Решим его:

$$\frac{\dot{f}}{f} = -\omega^2 a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{f} = -\omega^2 a^2 dt$$

$$\ln f = -\omega^2 a^2 t + \ln C(\omega)$$

$$\ln(\frac{1}{C(\omega)}) = -\omega^2 a^2 t$$

$$f(\omega,t) = C(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}$$

Значит, согласно формуле (3.61)

$$\psi_0(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$

$C(\omega)$ находим из начального условия:

$$\psi_0(x,t)/_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \delta(x-x_0)$$

Сравним эту формулу с (3.56) и видим, что

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi}e^{-i\omega x_0}$$

Итак, окончательно получим, что

$$G(x,t,x_0) = \psi_0(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x_0}e^{-a^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega$$

$$G(x,t,x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t}e^{i\omega(x-x_0)}d\omega$$

Согласно формуле (3.59) общее решение, т.е. решение без учета конкретных начальных условий, будет иметь вид:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t}e^{i\omega(x-\xi)}d\omega)d\xi \qquad (3.63)$$

Надо отметить, что решение этой же задачи можно получить и методом Фурье, т.е. методом разделения переменных, и результат должен быть один и тот же.

Самосопряженные операторы
и ортогональные системы функций

Ранее при решении задачи о колебании струны, движении частицы в потенциальной яме мы встречались с уравнением вида

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \qquad (1)$$

где $\hat{L}$ – некоторый дифференциальный оператор, а λ мы называли параметром разделения переменных.

И мы с вами убедились, что решение такого уравнения, удовлетворяющее некоторым условиям, существует не при всех λ. Например, в задаче о колебании струны и движении частицы в потенциальной яме

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{e} \qquad (2)$$

т.е. λ принимало дискретный ряд значений.

Уравнение (1) называют уравнением для собственных функций и собственных значений оператора $\hat{L}$. Собственные значения оператора – это те значения параметра λ_n, при которых существуют решения уравнения (1). Решение ψ_n, соответствующее собственным значениям λ_n, называют собственными функциями.

В (2) λ_n принимает дискретный ряд значений, значит спектр собственных значений оператора $\hat{L}$ – дискретный. Если же λ принимает непрерывный ряд значений: $a < \lambda < b$, то спектр собственных значений оператора $\hat{L}$ сплошной.

Характер спектра собственных значений оператора определяется граничными и начальными условиями, которым должно удовлетворять решение уравнения (1). Мы помним, что для движения частицы в потенциальной яме с граничными условиями $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(l) = 0$ для λ_n получалось значение $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, а собственные функции принимали вид:

$$\psi_n = a_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

В результате выяснилось, что энергия является квантованной (спектр дискретный)

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ml^2}x, \quad n = 1, 2, ...$$

Почти все задачи квантовой механики сводятся к решению уравнений вида (1), где $\hat{L}$ – некоторый оператор, необязательно дифференциальный.

Оператор – это символ, выражающий или обозначающий действие, с помощью которого из одной функции получают другую функцию или, другими словами, это правило, по которому одной функции $\psi(x)$ ставится в соответствие другая функция $f(x)$ тех же независимых переменных.

Если одному м тому же собственному значению λ_n оператора соответствует несколько линейно независимых собственных функций, то говорят, что собственные значения λ_n вырождены, т.е. если $\hat{L}\psi_{ni} = \lambda_n \psi_{ni}$, $i = 1, 2, 3 ... m_n$, то целое значение m_n называют кратностью вырождения.

Можно показать, что собственные значения оператора $\hat{L}^{-1}$, обратного к оператору $\hat{L}$, будут обратными к собственным значениям λ_n, т.е. λ_n^{-1}. В самом деле $\hat{L}\hat{L}^{-1}\psi_n = \hat{L}^{-1}\hat{L}\psi_n = \hat{L}^{-1}\lambda_n\psi_n = \psi_n$.

Откуда

$$\hat{L}^{-1}\lambda_n^{-1}\lambda_n\psi_n = \lambda_n^{-1}\psi_n \;\Rightarrow\; \hat{L}^{-1}\psi_n = \lambda_n^{-1}\psi_n \tag{3}$$

Из (3) следует, что $\hat{L}^{-1}$ будет существовать при условии, что ни одно собственное значение $\lambda_n \neq 0$.

Оператор $\hat{L}$ называется линейным, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$\hat{L}(a\psi) = a\hat{L}\psi, \qquad a = const$$

$$\hat{L}(\psi_1 + \psi_2) = \hat{L}\psi_1 + \hat{L}\psi_2$$

Например, оператор $\sqrt{\ }$ является нелинейным, т.к. $\sqrt{a\psi} \neq a\sqrt{\psi}$.

Линейным является оператор $\dfrac{d}{dx}$, т.к.

$$\frac{d}{dx}(a\psi) = a\frac{d\psi}{dx}; \qquad \frac{d}{dx}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{d}{dx}\psi_1 + \frac{d}{dx}\psi_2$$

Оператор Лапласа Δ линейный. Линейные операторы не нарушают принципа суперпозиции.

Скалярное произведение двух функций определяется как

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x)\psi(x)dx \tag{4}$$

Исходя из условия квадратичной интегрируемости, функции φ *и* ψ должны на ∞ обращаться в нуль. В трехмерном пространстве

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi^*(x, y, z)\psi(x, y, z)dxdydz \tag{5}$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)^*$
2. $(\varphi, \psi_1 + \psi_2) = (\varphi, \psi_1) + (\varphi, \psi_2)$
3. $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$
4. $(\lambda\varphi, \psi) = \lambda^*(\varphi, \psi), \quad \lambda = const$
5. $(\varphi, \lambda\psi) = \lambda(\psi, \varphi)$

Сопряженные линейные операторы

Пусть $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ – линейные операторы. Если выполняется условие

$$(\hat{A}\varphi,\psi)=(\varphi,\hat{B}\psi) \qquad (6)$$

то говорят, что операторы $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ сопряжены друг другу.

$$B=A^{+} \text{ и } A=B^{+}$$

«+» – знак сопряжения.

Например:

1. Пусть оператор $\hat{C}$ – число. Найдем C^{+}. Итак,

$$(\varphi,\hat{C}\psi)=\int\varphi^{*}(x)\hat{C}\psi(x)dx$$

На основании того, что:

$$(\varphi,C\psi)=(C^{+}\varphi,\psi),$$

мы получаем

$$(\hat{C}^{+}\varphi,\psi)=\int\hat{C}^{+*}\varphi^{*}(x)\psi(x)dx$$

Согласно (6) должно выполняться равенство

$$\int\varphi^{*}(x)\hat{C}\psi(x)dx=\int\hat{C}^{+*}\varphi^{*}(x)\psi(x)dx \quad\Rightarrow$$

$$C^{+*}=C \quad\Rightarrow\quad C^{+}=C^{*}$$

Значит, сопряженный оператор к постоянной – это число, являющееся комплексным сопряжением от постоянной.

2. Найдем $(\frac{d}{dx})^{+}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}((\frac{d}{dx})^{+}\varphi(x))^{*}\psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{*}(x)(\frac{d}{dx})\psi(x)dx$$

Интегрируем по частям интеграл в правой части:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{*}(x)\frac{d}{dx}\psi(x)dx=\varphi^{*}(x)\psi(x)\Big/_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi^{*}(x)}{dx}\psi(x)dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi^{*}(x)}{dx}\psi(x)dx$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{d}{dx})^{+*}\varphi^{*}(x)\psi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\varphi^{*}(x)\psi(x)dx$$

$$(\frac{d}{dx})^{+*}=-\frac{d}{dx} \quad\Rightarrow\quad (\frac{d}{dx})^{+}=-(\frac{d}{dx})^{*}$$

или

$$(\frac{d}{dx})^{+}=-\frac{d}{dx}$$

т.к. $\frac{d}{dx}$ – вещественное, тогда

$$(\varphi, \frac{d\psi}{dx}) = -(\frac{d\varphi}{dx}, \psi)$$

Чтобы получить сопряженный оператор $\hat{A}^{+}$ к матричному оператору $\hat{A}$, необходимо матричные элементы оператора $\hat{A}$ транспонировать и взять от них комплексные сопряжения. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^{+} = (A^{T})^{*}$$

Эрмитовские (эрмитовы, самосопряженные) операторы

Оператор $\hat{L}$ называется эрмитовским или самосопряженным, если $\hat{L}^{+} = \hat{L}$, т.е. $(L\psi, \varphi) = (\psi, L\varphi)$, причем φ *и* ψ обращаются в нуль на ∞.

В квантовой механике обычно применяются линейные самосопряженные операторы, важнейшие свойство которых – вещественность их собственных значений.

Например:

1. Пусть рассмотренный нами оператор C равен постоянной величине. Мы получим, что $C^{+} = C^{*}$. Для того, чтобы оператор C был эрмитовским, надо $C = C^{*}$, тогда $C^{+} = C$. Значит, любая операция умножения на вещественную постоянную – самосопряженный оператор. Коэффициенты x, y, z – линейные самосопряженные операторы, т.к. (x, y, z) – вещественны.

2. Оператор $\dfrac{d}{dx}$ не является самосопряженным, т.к. $(\dfrac{d}{dx})^{+} = -\dfrac{d}{dx} \neq \dfrac{d}{dx}$.

Оператор $A^{+} = -A$ называется антиэрмитовским.

Пусть $A^{+} = -A$ *и* $B^{+} = -B$. Исходя из того, что $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$, будем иметь $(AB)^{+} = B^{+}A^{+} = (-B)(-A) = BA$. Значит произведение антиэрмитовских операторов будет являться эрмитовским оператором, если операторы A *и* B коммутируют. Например, $i^{+} = -i,$ *т.к.* $i^{+} = i^{*} = -i$.

$$i\frac{d}{dx} \text{ – эрмитовский}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} \text{ – эрмитовский} = \frac{d^{2}}{dx^{2}}$$

Если $L^{+} = L^{-1}$, т.е. $L^{+}L = 1$, то оператор L называют унитарным оператором.

В квантовой механике физические величины изображаются операторами, т.е. каждой физической величине сопоставляется оператор. $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r)$ – оператор энергии. $\hat{P} = -i\hbar\nabla$ – оператор импульса.

Собственные значения оператора, которые находятся из уравнения (1), как раз и являются измеряемыми на опыте физическими величинами, поэтому в квантовой механике используются не любые операторы, а только те, которые имеют вещественные собственные значения, т.е. эрмитовские операторы.

Мы говорили с вами о собственных значениях операторов и самих операторах. Теперь поговорим о собственных функциях эрмитовых операторов.

Пусть ψ_k *и* ψ_m – собственные функции оператора $\hat{L}$, т.е.

$$\hat{L}\psi_k = \lambda_k \psi_k$$

$$\hat{L}\psi_m = \lambda_m \psi_m$$

$$\lambda_k^* = \lambda_k \quad \lambda_m^* = \lambda_m$$

$$(L\psi, \varphi) = (\psi, L\varphi)$$

Тогда

$$\lambda_k \int \psi_k^* \, \psi_m \, dV = \lambda_m \int \psi_k^* \, \psi_m \, dV$$

$$(\lambda_k - \lambda_m) \int \psi_k^* \, \psi_m \, dV = 0$$

т.к. $\lambda_k \neq \lambda_m$, то

$$\int \psi_k^* \, \psi_m \, dV = 0 \qquad (7)$$

Выражение (7) является условием ортогональности собственных функций.

Обычно в случае дискретного спектра собственные функции оператора нормируются условием

$$\int \psi_k^* \, \psi_k \, dV = 1 \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) можно объединить в одну

$$\int \psi_k^* \, \psi_m \, dV = \delta_{km} \qquad (9)$$

где $\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$ $-$ *символ Кронекера*.

Совокупность всех собственных функций эрмитовского оператора, удовлетворяющих условию (9), называют ортонормированной.

Тематика заданий для управляемой самостоятельной работы

1. Линейные уравнения с частными производными первого порядка, характеристики, связь с первыми интегралами автономных систем ОДУ.

2. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши и ее решение.

3. Решение задачи Коши для уравнения неразрывности.

4. Квазилинейные уравнения первого порядка, характеристики, интегральные поверхности и связь между ними.

5. Алгоритм решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка.

6. Нетационарное уравнение Гамильтона-Якоби, алгоритм решения задачи Коши.

7. Стационарное уравнение Гамильтона-Якоби, алгоритм решения задачи Коши.

8. Обобщенные функции. Основные определения и примеры.

9. Операции с обобщенными функциями. Производная кусочно-гладкой функции.

10. Теорема о решениях уравнения du/dx=0, существование первообразной обобщенной функции.

11. Свертка обобщенных функций.

12. Преобразование Фурье обобщенных функций.

13. Вывод уравнения теплопроводности. Начальные и граничные условия.

14. Метод Фурье (метод разделения переменных) для однородного одномерного уравнения теплопроводности.

15. Исследование сходимости ряда в методе Фурье для уравнения теплопроводности.

16. Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности. Теорема единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

17. Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности методом Фурье. Принцип Дюамеля.

18. Общая схема метода Фурье. Свойства собственных значений и собственных функций. Первая и вторая формулы Грина.

19. Решение задачи на собственные значения для прямоугольника и круга. Функции Бесселя и их свойства.

20. Вывод формулы Пуассона для решения задачи Коши на бесконечной прямой для уравнения теплопроводности.

21. Доказательство теоремы существования

22. Теорема единственности решения задачи Коши на бесконечной прямой для уравнения теплопроводности.

22. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывной начальной функцией.

23. Краевые задачи на полуограниченной прямой для уравнения теплопроводности, метод отражений. Формула Дюамеля решения задачи Коши на полуограниченной прямой для уравнения теплопроводности.

24. Метод ВКБ. Уравнение Гамильтона-Якоби и уравнение переноса.

25. Метод стационарной фазы.

26. Метод ВКБ и p-представление. Асимптотика в окрестности фокальной точки.

27. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны.

28. Бегущие волны, общий вид решения уравнения колебаний струны.

29. Формула Даламбера.

30. Сферические волны, лбщий вид решения трёхмерного волнового уравнения в случае центральной симметрии.

31. Формула Кирхгофа решения трёхмерного волнового уравнения.

32. Метод спуска для двумерного волнового уравнения.

33. Качественное исследование распространения волн в пространствах 3-х и 2-х измерений, принцип Гюйгенса.

34. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа.

35. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.

36. Третья (основная) формула Грина, бесконечная дифференцируемость гармонической функции.

37. Фундаментальное решения оператора Лапласа.

38. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа. Теорема о среднем значении.

39. Принцип максимума для гармонической функции, единственность решения задачи Дирихле.

40. Функция Грина задачи Дирихле, формула для решения задачи Дирихле с помощью функции Грина.

41. Построение функции Грина для шара.

42. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для шара.

Примерный перечень заданий по управляемой самостоятельной работе

№ 1. Тема: «Основные формулы и операции векторной алгебры в декартовой системе. Понятия дивергенции, ротора для векторного поля».

(2 часа – пр.).

Задание: Рассмотрение действия оператора дифференцирования на скалярные и векторные поля.

Решение задач в декартовой системе координат.

Письменное задание.

1 уровень.

1. Скалярные и векторные поля.

2. Скалярное поле, его примеры, линии и поверхности уровня. Производные по направлению.

3. Векторное поле, линии поля, уравнение линий поля.

2 уровень.

Дифференциальные операции 1-го порядка на скалярных и векторных полях.

Задача 7

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^2 + y^3$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором $l_0 = 5i + 3j + \sqrt{2}k$ в точке с координатами $(x = 4; y = 5; z = 6)$.

Задача 8

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^3 + y^5 + z^2$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором $l_0 = 3x^2 i + 3y^3 j + \sqrt{7}z^4 k$ в точке с координатами $(x = 1; y = 2; z = 3)$

Задача 9

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^3 y^5 z^2$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором l_0 у которого направляющие косинусы имеют значения $Cos\alpha = \frac{1}{4}$ $Cos\beta = \frac{3}{4}$ для точки с координатами $(x = 1; y = 1; z = 2)$

3 уровень.

Дифференциальные операции 2-го порядка на скалярных и векторных полях. Ортогональная декартова система координат и запись операций градиента, дивергенции, ротора.

Задача 11

Векторное поле задано в декартовой системе функцией $F(x, y, z) = 10x^3 i + 10y^3 j + 10z^3 k$. Применив теорему Остроградского, связывающую поток вектора через поверхность с объемным интегралом от дивергенции поля, и перейдя в сферическую систему координат определить поток векторного поля через внешнюю сторону поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

№ 2. Тема: Дивергенция поля и теорема Остроградского – Гаусса в декартовой системе координат на примере электростатики. Циркуляция и ротор поля в уравнениях Максвелла. Теорема Стокса.

(2 часа – пр.).

1 уровень.

Задача 12

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=10x^3i+10y^3j+16x^2y^3zk$. Определить дивергенцию этого поля в точке $(x=2;y=2;z=2)$.

Задача 14

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=10x^3y^2zi+\left(5x+6y^2z\right)j+16x^2y^3zk$. Определить дивергенцию этого поля в точке $(x=2;y=2;z=2)$.

2 уровень.

Задача 15

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=x^2+y^3+2xy^2z^3$. Определить градиент этого поля, как вектор, направляющие косинусы градиента, величину градиента поля в точке $(x=1;y=1;z=3)$.

Задача 16

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=2x^2y+xy^3z^2+4x^3y^4z^2$. Определить градиент этого поля, как вектор, направляющие косинусы градиента, величину градиента поля в точке $(x=1;y=2;z=2)$.

3 уровень.

Задача 17

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=\left(2x^4+y^2+yz^3\right)i+\left(4x+2xyz^2\right)j+2z^3k$. Определить дивергенцию и ротор этого поля в точке $(x=1;y=2;z=2)$.

Задача 18

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=\left(2x^4+y^3+2yz^3\right)^2i+\left(4x+6xy^2z^2\right)j+2z^3k$. Определить ротор этого поля в точке $(x=1;y=2;z=3)$.

Задача 19

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=x+y+2z$. Определить вид поверхности уровня данного поля, проходящую через точку $(x=1;y=1;z=3)$.

№ 3. Тема: «Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции первого и второго порядка. Оператор Лапласа».

(2 часа – лк.).

Задание: Изучение вопросов темы.

Письменное задание (ответы на вопросы).

1 уровень.

3. Оператор Гамильтона «набла».
4. Градиент поля и его физический смысл.
11. Оператор Лапласа.

2 уровень.

6. Теорема Остроградского – Гаусса.
7. Понятие потока векторного поля. Положительный и отрицательный поток через некоторую площадку.
8. Поток векторного поля через замкнутую поверхность. Дивергенция векторного поля в контексте теоремы Остроградского – Гаусса.

Задача 11

Векторное поле задано в декартовой системе функцией $F(x,y,z)=10x^3i+10y^3j+10z^3k$. Применив теорему Остроградского, связывающую поток вектора через поверхность с объемным интегралом от дивергенции поля, и перейдя в сферическую систему координат определить поток векторного поля через внешнюю сторону поверхности $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Задача 12

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=10x^3i+10y^3j+16x^2y^3zk$. Определить дивергенцию этого поля в точке $(x=2; y=2; z=2)$.

Задача 13

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=2x^3i+2y^3j+2z^3k$. Применив теорему Остроградского, связывающую поток вектора через поверхность с объемным интегралом от дивергенции поля, и перейдя в сферическую систему координат определить поток векторного поля через внешнюю сторону поверхности $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Задача 14

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=10x^3y^2zi+\left(5x+6y^2z\right)j+16x^2y^3zk$. Определить дивергенцию этого поля в точке $(x=2; y=2; z=2)$.

Задача 15

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=x^2+y^3+2xy^2z^3$. Определить градиент этого поля, как вектор, направляющие косинусы градиента, величину градиента поля в точке $(x=1; y=1; z=3)$.

3 уровень.

Задача 16

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=2x^2y+xy^3z^2+4x^3y^4z^2$. Определить градиент этого поля, как вектор, направляющие косинусы градиента, величину градиента поля в точке $(x=1; y=2; z=2)$.

Задача 17

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=\left(2x^4+y^2+yz^3\right)i+\left(4x+2xyz^2\right)j+2z^3k$. Определить дивергенцию и ротор этого поля в точке $(x=1; y=2; z=2)$.

Задача 18

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=\left(2x^4+y^3+2yz^3\right)^2 i+\left(4x+6xy^2z^2\right)j+2z^3k$. Определить ротор этого поля в точке $(x=1; y=2; z=3)$.

Задача 19

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=x+y+2z$. Определить вид поверхности уровня данного поля, проходящую через точку $(x=1; y=1; z=3)$.

Задача 20

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U=x+y+2z+4$. Определить вид поверхности уровня данного поля, проходящую через точку $(x=1; y=1; z=3)$.

Задача 10

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U=xy^2+z^2$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором l_0 у которого направляющие косинусы имеют значения $Cos\alpha=\frac{1}{2}$ $Cos\beta=\frac{1}{2}$ для точки с координатами $(x=2; y=2; z=2)$.

Задача 14

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=10x^3y^2zi+\left(5x+6y^2z\right)j+16x^2y^3zk$. Определить дивергенцию этого поля в точке $(x=2; y=2; z=2)$.

Задача 15

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=x^2+y^3+2xy^2z^3$. Определить градиент этого поля, как вектор, направляющие косинусы градиента, величину градиента поля в точке $(x=1; y=1; z=3)$.

Задача 12

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=10x^3 i+10y^3 j+16x^2 y^3 zk$. Определить дивергенцию этого поля в точке $(x=2; y=2; z=2)$.

Задача 13

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=2x^3 i+2y^3 j+2z^3 k$. Применив теорему Остроградского, связывающую поток вектора через поверхность с объемным интегралом от дивергенции поля, и перейдя в сферическую систему координат определить поток векторного поля через внешнюю сторону поверхности $x^2+y^2+z^2=R^2$.

№ 4. Тема: «Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат в задачах соответствующей симметрии. Расчет коэффициентов Ламе и дифференцирование в сферических и цилиндрических координатах».

(2 часа-лк.).

Задание: Ответы на вопросы по теме.

Письменное задание (ответы на вопросы).

1 уровень.

1. Криволинейные ортогональные системы координат. Коэффициенты Ламе.

17. Основные дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах.

18. Основные дифференциальные операции в цилиндрических и сферических координатах.

Задача 1

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере полярной системы. Отобразить процедуру вычисления площади круга с применением декартовой и полярной систем координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 2

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере полярной системы. Отобразить процедуру вычисления длины окружности с применением декартовой и полярной систем координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 3

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере цилиндрической системы. Отобразить процедуру вычисления объема цилиндра в декартовой и цилиндрической системах координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 4

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере цилиндрической системы. Отобразить процедуру вычисления площади поверхности цилиндра в декартовой и цилиндрической системах координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

2 уровень.

Задача 5

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере сферической системы. Отобразить процедуру вычисления площади поверхности шара в декартовой и сферической системах координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 6

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере сферической системы. Отобразить процедуру вычисления объема шара в декартовой и сферической системах координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 7

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^2 + y^3$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором $l_0 = 5i + 3j + \sqrt{2}k$ в точке с координатами $(x = 4; y = 5; z = 6)$.

Задача 21

Скалярное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^3\phi + z^5$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \phi = \frac{\pi}{4}; z = 1\right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 21

Скалярное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^2\phi + z^5 r^3 Cos\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 1; \phi = \frac{\pi}{2}; z = 2\right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 22

Скалярное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^3\vartheta + rCos^2\vartheta Sin\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \vartheta = \frac{\pi}{4}; \phi = \frac{\pi}{6}\right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 23

Скалярное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi + Cos^2\vartheta Sin\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \vartheta = \dfrac{\pi}{6}; \phi = \dfrac{\pi}{3}\right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

3 уровень.

Задача 24

Векторное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi r_0 + Cos^2\vartheta Sin\phi\vartheta_0 + r^2 Sin\phi\phi_0$. Здесь $(r_0; \vartheta_0; \phi_0)$ – единичные орты. Определить дивергенцию указанного поля в точке $\left(r = 2; \vartheta = \dfrac{\pi}{6}; \phi = \dfrac{\pi}{3}\right)$ как некоторое число.

Задача 25

Векторное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi r_0 + Cos^2\vartheta Sin\phi\vartheta_0 + r^2 Sin\phi\phi_0$. Здесь $(r_0; \vartheta_0; \phi_0)$ – единичные орты. Определить ротор указанного поля в точке $\left(r = 1; \vartheta = \dfrac{\pi}{4}; \phi = \dfrac{\pi}{4}\right)$ как некоторый вектор сферической системы координат.

Задача 26

Векторное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $F = r^2 Sin^3\phi r_0 + rz^5 Cos\phi\phi_0 + rzz_0$. Здесь $(r_0; \phi_0; z_0)$ – единичные орты системы координат. Определить дивергенцию указанного поля в точке $\left(r = 2; \phi = \dfrac{\pi}{4}; z = 1\right)$ как некоторое число.

Задача 27

Векторное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $F = r^2 Sin^3\phi r_0 + rz^5 Cos\phi\phi_0 + rzz_0$. Здесь $(r_0; \phi_0; z_0)$ – единичные орты системы координат. Определить ротор указанного поля в точке $\left(r = 2; \phi = \dfrac{\pi}{4}; z = 1\right)$ как некоторое число.

Задача 28

Векторное поле задано в сферической системе координат в виде функции $F = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi r_0 + \vartheta_0 + \phi_0$. Здесь $(r_0; \vartheta_0; \phi_0)$ – единичные орты. Определить дивергенцию указанного поля в точке $\left(r = 1; \vartheta = \dfrac{\pi}{4}; \phi = \dfrac{\pi}{4}\right)$ как некоторое число.

№ 5. Тема: « Дифференциальные операции на сфере и цилиндре» (2 часа – лк).

Задание: Решение задач по теме.

Письменное задание.

1 уровень.

16. Криволинейные ортогональные системы координат. Метрические коэффициенты.
17. Дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах.
18. Основные дифференциальные операции в цилиндрических и сферических координатах.

2 уровень.

Задача 26

Векторное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $F = r^2 Sin^3\phi r_0 + rz^5 Cos\phi\phi_0 + rzz_0$. Здесь $(r_0;\phi_0;z_0)$ – единичные орты системы координат. Определить дивергенцию указанного поля в точке $\left(r = 2;\phi = \frac{\pi}{4}; z = 1\right)$ как некоторое число.

Задача 27

Векторное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $F = r^2 Sin^3\phi r_0 + rz^5 Cos\phi\phi_0 + rzz_0$. Здесь $(r_0;\phi_0;z_0)$ – единичные орты системы координат. Определить ротор указанного поля в точке $\left(r = 2;\phi = \frac{\pi}{4}; z = 1\right)$ как некоторое число.

3 уровень.

Векторное поле задано в сферической системе координат в виде функции $F = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi r_0 + \vartheta_0 + \phi_0$. Здесь $(r_0;\vartheta_0;\phi_0)$ – единичные орты. Определить дивергенцию указанного поля в точке $\left(r = 1; \vartheta = \frac{\pi}{4};\phi = \frac{\pi}{4}\right)$ как некоторое число.

Задача 29

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^3 y^5 z^2$. Определить дивергенцию от градиента этого поля для точки с координатами $(x = 1; y = 1; z = 2)$.

Задача 30

Скалярное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^3\phi + z^5$. Определить дивергенцию от градиента этого поля в точке $\left(r = 2;\phi = \frac{\pi}{4}; z = 1\right)$ как некоторое число.

Задача 21

Скалярное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^3\phi + z^5$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \phi = \dfrac{\pi}{4}; z = 1\right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 21

Скалярное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^2\phi + z^5 r^3 Cos\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 1; \phi = \dfrac{\pi}{2}; z = 2\right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 22

Скалярное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^3\vartheta + rCos^2\vartheta Sin\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \vartheta = \dfrac{\pi}{4}; \phi = \dfrac{\pi}{6}\right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 23

Скалярное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi + Cos^2\vartheta Sin\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \vartheta = \dfrac{\pi}{6}; \phi = \dfrac{\pi}{3}\right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

№ 6. Тема: «Вывод уравнений колебания струны и теплопроводности, уравнение для потенциалов электромагнитного поля, уравнения для свободных электрического и магнитного полей»

(2 часа – лк).

Задание: Ответы на вопросы по теме.

Письменное задание (ответы на вопросы).

1 уровень.

20. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.
21. Основные уравнения математической физики. Граничные и начальные условия.
22. Обоснование некоторых уравнений математической физики

2 уровень.

23. Уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, уравнения для свободных электрических и магнитных полей, уравнения для потенциалов электромагнитного поля.
24. Методы решения уравнений в частных производных. Метод разделения переменных.

3 уровень.

27. Метод Фурье для уравнения теплопроводности.
28. Разложение функций в ряд Фурье и интеграл Фурье.
29. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Дельта-функция Дирака.
30. Метод функции Грина.
31. Функция Грина для уравнения теплопроводности и уравнения Пуассона.

Задания по самостоятельной работе

№ п/п	Название темы, раздела	Кол-во часов на СРС	Задание	Форма выполнения
1	2	3	4	5
		50		
1				
1.1	Скалярное поле. Поверхности уровня, линии уровня Производная по направлению. Градиент скалярного поля, его физический смысл. Векторное поле и линии поля. Поток через поверхность	2	[2] 1.1, 1.3, 1.4, 1.5 Составление схемы представления скалярного поля и поверхностей уровня в декартовой системе координат	Письменный отчет и устная защита.
1.2	Основные формулы и операции вектор ной алгебры в декартовой системе. Понятия дивергенции, ротора для векторного поля	4	[2] 1.2, [8] 2–4 Графическое описание дифференциальных операций на скалярном поле в ортогональной системе координат	Письменный отчет и устная защита.
1.3	Параметры векторного поля в представлении операций дивергенции на примере единичного заряда в электро- и магнито- статике	2	[2] 110, 114, 117 Построение алгоритма формирования векторного поля на основе скалярного при дифференцировании	Письменный отчет и устная защита.
1.4	Закон электромагнитной индукции в представлении циркуляции и ротора век торного поля	2	[8] 143–148 Интегральное и дифференциальное отображение быстроты изменения магнитного потока для вихревого поля	Письменный отчет и устная защита.
1.5	Оператор Гамильтона набла. Дифферен циальные операции первого и второго порядка. Оператор Лапласа	2	[2] 1.6, 1.7, 4.1, 4.2 Представление градиента скалярного поля на примере потенциала электростатического поля в формализме оператора Гамильтона	Письменный отчет и устная защита.
1.6	Дифференцирования скалярных и векторных полей	2	[7] 114, 115 Отображение лифференци-	Письменный отчет и устная

	в представлении оператора Гамильтона и оператора Лапласа		ального векторного оператора в формализме скалярного проихведения при действии на скалярное поле	защита.
1.7	Классификация векторных полей и понятие потенциала на примере векторного электромагнитного поля. Скалярный, векторный потенциал. Гармонические функции	2	[2] 1.7, 3, 4.1–4.5 Установление характера действия дифференциального оператора как векторной величины на векторное поле	Письменный отчет и устная защита.
1.8	Элементы теории поля в криволинейных координатах. Виды криволинейных ортогональных систем, их связь с декартовой, метрические коэффициенты	4	[2] 2.1–2.3, 4.8, 1–9 Формирование принципов привлечения системы координат по типу симметрии рассчитываемого объекта	Письменный отчет и устная защита.
1.9	Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат в задачах соответствующей симметрии. Расчет коэффициентов Ламе и дифференцирование в сферических и цилиндрических координатах	4	[2] 2.1–2.3, 4.8, 1–9 Рассчитать метрические коэффициенты для типичных криволинейных систем ортогонального типа	Письменный отчет и устная защита.
1.10	Дифференциальные операции на сфере и цилиндре	4	[2] 3.1, 3.2 [1] гл. II. 1 Получить характерные выражения для оператора Гамильтона в скалярном цилиндрическом поле	Письменный отчет и устная защита.
1.11	Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка. Основные уравнения математической физики. Граничные и начальные условия	4	[1] гл. IV. 1, 2 [2] 3.3, [3] гл. 1 По виду уравнений в частных производных установить тип и вид интегралов движения	Письменный отчет и устная защита.
1.12	Вывод уравнений колебания струны и теплопроводности, уравнение для потенциалов электромагнитного поля, уравнения для свободных электрического и магнитного полей	4	[1] гл. IV. 1, 2 [2] 3.3, [3] гл. 1, Сформулировать условия движения струны на основном и первом тоне	Письменный отчет и устная защита.
1.13	Метод разделения переменных. Свободные колебания струны	2	[1] гл. IV. 1, 2 [2] 3.3, [4] гл. 1 Представить схему описания движения струны как набора материальных точек, связанных квазиупругого	Письменный отчет и устная защита.
1.14	Метод Фурье при решении дифференциальных урав-	2	[1] гл.X. 1 [2] 4.1	Письменный отчет и устная

	нений		Расшифровать суть разделения переменных в виде произведения искомых функций для эллиптической задачи	защита.
1.15	Эрмитовские операторы. Собственные значения и собственные функции	2	[2] 4.8 Уяснить смысл операторных действий и роль операторов Эрмита в задачах математической физики	Письменный отчет и устная защита.
1.16	Решение уравнения Шредингера для частицы, движущейся в прямоугольной потенциальной яме и в центральном силовом поле	2	[2] 4.2, 4.3 Отобразить принцип разделения переменных для частицы в потенциальной одномерной яме с бесконечно высокими стенками	Письменный отчет и устная защита.
1.17	Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Дельта-функция Дирака	2	[1] гл.X. 5 [2] 4.6, 4.7 Показать геометрически свойства дельта-функции Дирака и ее роль при нормировке волновой функции	Письменный отчет и устная защита.
	Самосогласованные операторы и ортонормированная совокупность функций. Математический аппарат квантовой механики	2	[2] 4.2–4.5 Описать свойства квантовой частицы в представлении ортогональных и нормированных функции на примере частицы потенциальной яме	Письменный отчет и устная защита.
	Метод функций Грина	2	[2] 6.4 Отобразить процедуру построения функции Грина для неоднородной задачи по исходному дифференциальному уравнению	Письменный отчет и устная защита.

Задачи для самостоятельной работы студентов

Задача 1

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере полярной системы. Отобразить процедуру вычисления площади круга с применением декартовой и полярной систем координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 2

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере полярной системы. Отобразить процедуру вычисления длины окружности с применением декартовой и полярной систем координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 3

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере цилиндрической системы. Отобразить процедуру вычисления объема цилиндра в декартовой и цилиндрической системах координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 4

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере цилиндрической системы. Отобразить процедуру вычисления площади поверхности цилиндра в декартовой и цилиндрической системах координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 5

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере сферической системы. Отобразить процедуру вычисления площади поверхности шара в декартовой и сферической системах координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 6

Ортогональные декартова и криволинейные системы координат на примере сферической системы. Отобразить процедуру вычисления объема шара в декартовой и сферической системах координат. Показать преимущества криволинейной перед прямоугольной.

Задача 7

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^2 + y^3$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором $l_0 = 5i + 3j + \sqrt{2}k$ в точке с координатами $(x = 4; y = 5; z = 6)$.

Задача 8

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^3 + y^5 + z^2$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором $l_0 = 3x^2 i + 3y^3 j + \sqrt{7} z^4 k$ в точке с координатами $(x = 1; y = 2; z = 3)$.

Задача 9

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^3y^5z^2$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором l_0 у которого направляющие косинусы имеют значения $Cos\alpha = \frac{1}{4}$ $Cos\beta = \frac{3}{4}$ для точки с координатами $(x=1; y=1; z=2)$.

Задача 11

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = xy^2 + z^2$. Определить производную этого поля вдоль направления, заданного единичным вектором l_0 у которого направляющие косинусы имеют значения $Cos\alpha = \frac{1}{2}$ $Cos\beta = \frac{1}{2}$ для точки с координатами $(x=2; y=2; z=2)$.

Задача 12

Векторное поле задано в декартовой системе функцией $F(x,y,z) = 10x^3i + 10y^3j + 10z^3k$ Применив теорему Остроградского, связывающую поток вектора через поверхность с объемным интегралом от дивергенции поля, и перейдя в сферическую систему координат определить поток векторного поля через внешнюю сторону поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задача 13

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z) = 10x^3i + 10y^3j + 16x^2y^3zk$. Определить дивергенцию этого поля в точке $(x=2; y=2; z=2)$.

Задача 14

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z) = 2x^3i + 2y^3j + 2z^3k$ Применив теорему Остроградского, связывающую поток вектора через поверхность с объемным интегралом от дивергенции поля, и перейдя в сферическую систему координат определить поток векторного поля через внешнюю сторону поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задача 15

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z) = 10x^3y^2zi + \left(5x + 6y^2z\right)j + 16x^2y^3zk$. Определить дивергенцию этого поля в точке $(x=2; y=2; z=2)$.

Задача 16

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=x^2+y^3+2xy^2z^3$. Определить градиент этого поля, как вектор, направляющие косинусы градиента, величину градиента поля в точке $(x=1; y=1; z=3)$.

Задача 17

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=2x^2y+xy^3z^2+4x^3y^4z^2$. Определить градиент этого поля, как вектор, направляющие косинусы градиента, величину градиента поля в точке $(x=1; y=2; z=2)$.

Задача 18

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=\left(2x^4+y^2+yz^3\right)i+\left(4x+2xyz^2\right)j+2z^3k$ Определить дивергенцию и ротор этого поля в точке $(x=1; y=2; z=2)$.

Задача 19

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=\left(2x^4+y^3+2yz^3\right)^2 i+\left(4x+6xy^2z^2\right)j+2z^3k$ Определить ротор этого поля в точке $(x=1; y=2; z=3)$.

Задача 20

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U(x,y,z)=x+y+2z$. Определить вид поверхности уровня данного поля, проходящую через точку $(x=1; y=1; z=3)$.

Задача 21

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U(x,y,z)$ где $U=x+y+2z+4$. Определить вид поверхности уровня данного поля, проходящую через точку $(x=1; y=1; z=3)$.

Задача 22

Скалярное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^3\phi + z^5$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \phi = \frac{\pi}{4}; z = 1 \right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 23

Скалярное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^2\phi + z^5 r^3 Cos\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 1; \phi = \frac{\pi}{2}; z = 2 \right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 24

Скалярное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^3\vartheta + rCos^2\vartheta Sin\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \vartheta = \frac{\pi}{4}; \phi = \frac{\pi}{6} \right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 25

Скалярное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi + Cos^2\vartheta Sin\phi$. Определить градиент указанного поля в точке $\left(r = 2; \vartheta = \frac{\pi}{6}; \phi = \frac{\pi}{3} \right)$ как вектор и величину градиента поля в этой точке.

Задача 26

Векторное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi r_0 + Cos^2\vartheta Sin\phi\vartheta_0 + r^2 Sin\phi\phi_0$. Здесь $\left(r_0; \vartheta_0; \phi_0 \right)$ – единичные орты. Определить дивергенцию указанного поля в точке $\left(r = 2; \vartheta = \frac{\pi}{6}; \phi = \frac{\pi}{3} \right)$ как некоторое число.

Задача 27

Векторное поле задано в сферической системе координат в виде функции $U = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi r_0 + Cos^2\vartheta Sin\phi\vartheta_0 + r^2 Sin\phi\phi_0$. Здесь $\left(r_0; \vartheta_0; \phi_0 \right)$ – единичные орты. Определить ротор указанного поля в точке $\left(r = 1; \vartheta = \frac{\pi}{4}; \phi = \frac{\pi}{4} \right)$ как некоторый вектор сферической системы координат.

Задача 28

Векторное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $F = r^2 Sin^3\phi r_0 + rz^5 Cos\phi\phi_0 + rzz_0$. Здесь $(r_0;\phi_0;z_0)$ – единичные орты системы координат. Определить дивергенцию указанного поля в точке $\left(r=2;\phi=\dfrac{\pi}{4};z=1\right)$ как некоторое число.

Задача 29

Векторное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $F = r^2 Sin^3\phi r_0 + rz^5 Cos\phi\phi_0 + rzz_0$. Здесь $(r_0;\phi_0;z_0)$ – единичные орты системы координат. Определить ротор указанного поля в точке $\left(r=2;\phi=\dfrac{\pi}{4};z=1\right)$ как некоторое число.

Задача 30

Векторное поле задано в сферической системе координат в виде функции $F = 2r^2 Sin^4\vartheta Sin^2\phi r_0 + \vartheta_0 + \phi_0$. Здесь $(r_0;\vartheta_0;\phi_0)$ – единичные орты. Определить дивергенцию указанного поля в точке $\left(r=1;\vartheta=\dfrac{\pi}{4};\phi=\dfrac{\pi}{4}\right)$ как некоторое число.

Задача 31

Скалярное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $U = x^3y^5z^2$. Определить дивергенцию от градиента этого поля для точки с координатами $(x=1;y=1;z=2)$.

Задача 32

Скалярное поле задано в цилиндрической системе координат в виде функции $U = r^2 Sin^3\phi + z^5$. Определить дивергенцию от градиента этого поля в точке $\left(r=2;\phi=\dfrac{\pi}{4};z=1\right)$ как некоторое число.

Задача 33

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z) = \left(2x^4 + y^2 + yz^3\right)i + \left(4x + 2xyz^2\right)j + 2z^3k$. Определить градиент от дивергенции этого поля в точке $(x=1;y=1;z=2)$ как некоторый вектор в декартовой системе координат.

Задача 34

Векторное поле задано в декартовой системе координат в виде функции $F(x,y,z)=10x^3y^2zi+\left(5x+6y^2z\right)j+16x^2y^3zk$. Определить градиент от дивергенции этого поля в точке $\left(x=1;y=1;z=2\right)$ как некоторый вектор в декартовой системе координат.

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Вопросы для итогового контроля

1. Скалярные и векторные поля. Скалярное поле, его примеры.
2. Дифференциальные операции 1-го и 2-го порядка на скалярных и векторных полях.
3. Производные по направлению. Оператор Гамильтона «набла».
4. Градиент поля и его физический смысл.
5. Векторное поле. Дивергенция как элемент расходимости векторного поля.
6. Теорема Остроградского – Гаусса.
7.Понятие потока векторного поля. Положительный и отрицательный поток через некоторую площадку.
8.Поток векторного поля через замкнутую поверхность. Дивергенция векторного поля в контексте теоремы Остроградского – Гаусса.
9. Понятие циркуляции в применении к векторному полю. Понятие ротора. Ротор как вихрь векторного поля.
10. Теорема Стокса.
11. Оператор Лапласа.
11. Классификация векторных полей. Основная теорема математической теории поля.
12 Скалярный потенциал. Уравнение для скалярного потенциала.
13. Вихревое (соленоидальное) векторное поле.
14. Векторный потенциал. Уравнение для векторного потенциала. Лапласово векторное поле.
15. Гармонические функции. Основная теорема математической теории поля.
16. Криволинейные ортогональные системы координат. Коэффициенты Ламе.
17. Основные дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах.
18.Основные дифференциальные операции в цилиндрических и сферических координатах.
19. Дифференциальные уравнения в частных производных
20. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

21.Основные уравнения математической физики. Граничные и начальные условия.

22. Обоснование некоторых уравнений математической физики

23.Уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, уравнения для свободных электрических и магнитных полей, уравнения для потенциалов электромагнитного поля.

24. Методы решения уравнений в частных производных. Метод разделения переменных.

25. Свободные колебания струны конечной длины.

26. Решение уравнения Шредингера для частицы, движущейся в центральном поле.

27. Метод Фурье для уравнения теплопроводности.

28. Разложение функций в ряд Фурье и интеграл Фурье.

29. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Дельта-функция Дирака.

30. Метод функции Грина.

31. Функция Грина для уравнения теплопроводности и уравнения Пуассона.

32. Решение неоднородного волнового уравнения методом функции Грина. Запаздывающие и опережающие потенциалы.

Вопросы для промежуточного контроля

1. Скалярные и векторные поля.
2. Дифференциальные операции 1-го и 2-го порядка в декартовых координатах.
3. Производные по направлению. Оператор Гамильтона «набла».
4. Градиент поля и его физический смысл.
5. Векторное поле. Дивергенция и ее представление в декартовых координатах.
6. Понятие потока векторного поля.
7. Положительный и отрицательный поток через некоторую площадку.
8. Поток векторного поля через замкнутую поверхность.
9. Теорема Остроградского – Гаусса.
10. Дивергенция электростатического поля в контексте теоремы Остроградского – Гаусса.
11. Понятие циркуляции в применении к векторному полю.
12. Циркуляция электростатического поля.
13. Теорема Стокса.
14. Понятие ротора. Ротор как вихрь векторного поля.
15. Оператор Лапласа.
16. Основная теорема математической теории поля.
17. Скалярный потенциал.

18 Уравнение для скалярного потенциала.

19. Вихревое (соленоидальное) векторное поле.

20. Векторный потенциал. Уравнение для векторного потенциала. Лапласово векторное поле.

21. Гармонические функции. Основная теорема математической теории поля.

22. Криволинейные ортогональные системы координат. Коэффициенты Ламе.

23. Основные дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах.

24. Основные дифференциальные операции в цилиндрических и сферических координатах.

25. Дифференциальные уравнения в частных производных

26. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

27. Основные уравнения математической физики. Граничные и начальные условия.

28. Обоснование некоторых уравнений математической физики

29. Уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, уравнения для свободных электрических и магнитных полей, уравнения для потенциалов электромагнитного поля.

30. Методы решения уравнений в частных производных. Метод разделения переменных.

31. Свободные колебания струны конечной длины.

32. Решение уравнения Шредингера для частицы, движущейся в центральном поле.

33. Метод Фурье для уравнения теплопроводности.

34. Разложение функций в ряд Фурье и интеграл Фурье.

35. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Дельта-функция Дирака.

36. Метод функции Грина.

37. Функция Грина для уравнения теплопроводности и уравнения Пуассона.

38. Решение неоднородного волнового уравнения методом функции Грина. Запаздывающие и опережающие потенциалы.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Литература

Основная:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики», Москва, Наука, 2010.

2. Владимиров В.С. «Уравнения математической физики», Москва, Наука, 2013.

3. Владимиров В.С., Жаринов В.В., Уравнения математической физики, Физматлит, 2013.

4.Багров В.В, Белов В.В, Задорожный В.Н, Трифонов А.Ю., Методы математической физики, изд-во STT, 2010.

5. Шубин М.А., Лекции об уравнениях математической физии, МЦНМО, М., 2011.

6. Петровский И.Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Либроком», 2009.

Дополнительная:

1. Метьюз Дж.Уокер Р. Математические методы физики. М., 1992.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б, Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1990.
3. Болсун А.И., Тройский В.К., Бейда А.А. Методы математической физики. Мн., Высшая школа, 1988.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ. М., Наука, 1978.
5. Самойленко А.М, Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М., 1989.
6. Белевец П.С., Кожух И.Г. Задачник практикум по методам математической физики. Мн., 1989.
7. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. М., Высшая школа, 1983.
8. Белов В.В., Воробьев Е.М., Сборник задач по дополнительным главам математической физики, «Высшая школа», М., 1978.
9. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В., Лекции по математической физике, МГУ, 1993.
10. Арнольд В.И., Лекции по уравнениям с частными производными, Независимый ун-т, М., 1995.
11. Альсевич Л.А., Черепкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям, Минск, Вышэйшая школа, 1990..
12. Бабич В.М., Изотова О.В., О решениях в обобщенных функциях задач математической физики, С.-ПГУ, 1998.
13. Комеч А.И., Практическое решение уравнений математической физики, МГУ, 1993.

Учебно-тематический план дисциплины «Методы математической физики»

№№	Наименование раздела, темы	Лекции	Практические занятия	УСРС	Самостоятельная работа студентов
1.	**Скалярные и векторные поля**	**8**	**8**	**2 л. 4 пр.**	**16**
	Скалярное поле. Поверхности уровня, линии уровня.	2			2

	Производная по направлению. Градиент скалярного поля, его физический смысл. Векторное поле и линии поля. Поток через поверхность				
	Основные формулы и операции векторной алгебры в декартовой системе. Понятия дивергенции, ротора для векторного поля			2 пр.	4
	Направляющие косинусы, производная по направлению, связь с градиентом поля. Физический смысл		2		
	Дивергенция поля и теорема Остроградского – Гаусса на примере электростатики. Циркуляция и ротор поля в уравнениях Максвелла. Теорема Стокса	2		2 пр.	
	Параметры векторного поля в представлении операций дивергенции на примере единичного заряда в электро- и магнитостатике		2		2
	Закон электромагнитной индукции в представлении циркуляции и ротора векторного поля		2		2
	Оператор Гамильтона набла. Дифференциальные операции первого и второго порядка. Оператор Лапласа	2		2 л.	2
	Дифференцирование скалярных и векторных полей в представлении оператора Гамильтона и оператора Лапласа		2		2
	Классификация векторных полей и понятие потенциала на примере векторного электромагнитного поля. Скалярный, векторный потенциал. Гармонические функции	2			2
2.	**Элементы теории поля в криволинейных координатах**	**2**	**2**	**4 л.**	**12**
	Элементы теории поля в криволинейных координатах. Виды криволинейных ортогональных систем, их связь с декартовой, метрические ко-	2			4

	эффициенты				
	Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат в задачах соответствующей симметрии. Расчет коэффициентов Ламе и дифференцирование в сферических и цилиндрических координатах		2	2 л.	4
	Дифференциальные операции на сфере и цилиндре			2 (л.)	4
3	**3. Дифференциальные уравнения в частных производных**	**12**	**2**	**2 л.**	**22**
	Классификация уравнений в частных производных 2-го порядка. Основные уравнения математической физики. Граничные и начальные условия	2			4
	Вывод уравнений колебания струны и теплопроводности, уравнение для потенциалов электромагнитного поля, уравнения для свободных электрического и магнитного полей	2		2 (л.)	4
	Метод разделения переменных. Свободные колебания струны	2			2
	Метод Фурье при решении дифференциальных уравнений				2
	Эрмитовские операторы. Собственные значения и собственные функции				2
	Решение уравнения Шредингера для частицы, движущейся в прямоугольной потенциальной яме и в центральном силовом поле	2			2
	Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. Дельта-функция Дирака	2			2
	Самосогласованные операторы и ортонормированная совокупность функций. Математический аппарат квантовой механики		2		2
	Метод функций Грина при решении неоднородных дифференциальных уравнений математической физики	2			2

	Основы теории электромагнитного поля и его элементов в криволинейных системах координатах		2		
Итого: 96 ч.		**22**	**12**	**12 (8 л., 4 пр.)**	**50**