О МЕТОДИКЕ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ДОВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ

Ладутько Л. В., г. Минск

Один из основных путей совершенствования преподавания математики на факультете довузовской подготовки состоит в поиске таких подходов к изложению отдельных тем и материала в целом, которые реализовали бы преемственность и обеспечивали пропедевтику в содержании данного курса. Серьезные недостатки в знаниях абитуриентов о функциях и их свойствах, трудности, с которыми сталкиваются первокурсники при изучении математического анализа, послужили причиной методических разработок изучения функциональных зависимостей и их практического применения слушателями факультета довузовской подготовки.

На первом этапе рекомендуется рассмотреть основные понятия о функции и функциональных зависимостях, систематизировать и одновременно расширить знания о них. На втором этапе предлагается исследовать отдельные элементарные функции и построить их графики. Далее можно перейти к преобразованиям графиков функций. Наконец, использовать полученные знания при решении различных текстовых задач, а также при решении уравнений и неравенств. В данной статье рассмотрим как можно реализовать первый этап.

На наш взгляд целесообразно при введении понятия функции ознакомить слушателей с различными подходами к ее определению: как зависимости одной переменной от другой и как соответствия между элементами произвольных двух множеств. Это будет способствовать более глубокой интеграции вузовских и школьных знаний.

Знание слушателями формулировки определения необходимо, но недостаточно для того, чтобы иметь ясные и конкретные представления о функции. Кроме формулировки определения, слушатели должны уметь приводить примеры объектов, как удовлетворяющих, так и не удовлетворяющих ему. Приведенные примеры должны быть разнообразными, в том числе должны быть представлены функции, которые не являются числовыми. Можно использовать упражнения типа:

1. Является ли функцией соответствие между множествами :а) треугольников и окружностей, описанных около них; б) окружностей и треугольников, вписанных в данные окружности; в) действительных чисел и точек координатной прямой; г) значений периметров и площадей квадратов; д) значений периметров и площадей прямоугольников.

2. Какие из данных равенств задают функцию:

$а)\ y = x + 5;\quad б)\ y = 2x^2;\quad в)\ y^2 = x;\quad г)\ y = \sqrt{x-2};\quad д)\ y = \sqrt{x} + \sqrt{-x};$

$е)\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{-x}};\quad ж)\ y = \dfrac{4}{x-3};\quad з)\ y = \begin{cases} 1, \text{если } x - \text{рациональное число}; \\ 0, \text{если } x - \text{иррациональное число}. \end{cases}$

После рассмотрения примеров и контрпримеров функций, нужно уделить внимание понятиям области определения и области значений функции, способам задания функции, ввести определения числовой функции, графика функции.

При обсуждении вопроса о способах задания функции необходимо подчеркнуть для слушателей, что формула – это не сама функция, а всего лишь один из способов ее задания. Рекомендуется привести примеры, где формула не задает функцию, где функция не задается в виде формулы и где несколькими формулами можно задать одну функцию.

Рассматривая понятие области определения функции, необходимо отметить, что не следует отождествлять это понятие с областью тех значений *x*, для которых имеет смысл данное аналитическое выражение. Область определения функции не может быть шире области определения выражения, используемого для задания этой функции, но она может быть у́же. Здесь же надо привести примеры, указав, что, за счет варьирования области определения, можно задать сколько угодно различных функций.

Говоря о графике функции, не лишним будет обратить внимание на примеры, где график функции (целиком или же в некоторой его части) принципиально нельзя изобразить, и где графиком является точка.

При иллюстрации различных графиков функций, можно организовать работу по пропедевтике ряда понятий математического анализа: непрерывности функции, вертикальных и горизонтальных асимптот, ограниченности и неограниченности функции. Эти понятия должны формулироваться на основе наглядно-интуитивных представлений.

Считаем целесообразным дать определение четности и нечетности функции в виде:"Функция f называется четной (нечетной), если выполняются два условия: 1) $\forall x \in D(f)$ и $-x \in D(f)$; 2) $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$". В дальнейшем в упражнениях с «провоцирующими» заданиями типа: «Является ли функция $y = x^2$, где $x \in (-5; 6)$, четной?», слушатели не делают ошибок. Очевидно, что нельзя не уделить внимание иллюстрациям графиков четных и нечетных функций.

Определение периодичности функции тоже хорошо бы ввести, обращая внимание на выполнимость двух условий: "Функция f называется периодической, если $\exists$ $t \neq 0$, что выполняются условия: 1) $\forall x \in D(f)$ $x \pm t \in D(f)$; 2) $\forall x \in D(f)$, $f(x+t) = f(x)$. Число t называется периодом функции f". Уместно привести примеры периодических процессов в естествознании и технике, указать, что тригонометрические функции выступают как модели периодических процессов, а также исследовать функцию y=b на периодичность.Задания типа: "Является ли функция y=b, определенная на множестве $(-\infty;-a] \cup [a;+\infty)$, где a>0, периодической?”, закрепят знания слушателей о периодических функциях.

Рассматривая понятие монотонности функции на некотором множестве, в упражнения должны быть включены примеры разрывных функций, возрастающих или убывающих на некоторых промежутках, но не являющимися таковыми на объединении этих промежутков. Рекомендуются упражнения типа:1) сравните f(2) и f(–3), если f(x)–возрастающая (убывающая) функция на R; 2) решите неравенство f(–1) > f(x), если f(x)–возрастающая (убывающая) функция на R; 3) докажите, что функция $y = 4x$-1 возрастающая и т.п.

Для полного усвоения понятий точек экстремума, экстремума функции необходимо слушателям предложить упражнения по готовым чертежам, например, с такими заданиями: отметить какую-либо окрестность точки c, сравнить значения функции f(x) для любой точки x этой окрестности со значением f(c); назвать точки максимума (минимума), ответ обосновать, пользуясь определением; назвать максимумы (минимумы) функции и т. д.

После рассмотрения определений нулей функции, промежутков знакопостоянства можно переходить к закреплению введенных понятий с использованием двух типов задач: в первом дать несколько графиков функций и потребовать выделить из него функции с заданными свойствами; во втором, наоборот, потребовать схематически изобразить график функции, обладающей теми или иными свойствами. Хорошим средством развития графического мышления послужат задания, требующие охарактиризовать взаимное расположение данных графиков двух функций.

Необходимо иметь ввиду, что процесс формирования функциональных понятий не заканчивается их введением. Он должен продолжаться при исследованиях элементарных функций и решениях задач.