Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 2. С.45–50.

УДК [37.091.313.512]–057.87

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ У СТУДЕНТОВ УМЕНИЯ ДОКАЗЫВАТЬ ТЕОРЕМЫ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРЫ

О. А. Баркович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка

Поступила в редакцию 30.05.19.

UDC [37.091.313.512]–057.87

METHODICAL ASPECTS OF FORMING STUDENTS' ABILITY TO PROVE THEOREMS IN THE PROCESS OF STUDYING ALGEBRA

O. Barkovich,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, BSPU

Received on 30.05.19.

Формирование у студентов умения доказывать является одним из условий математического мышления. В статье проанализированы различные подходы к совершенствованию подготовки студентов в области теории доказательств. Представлены различные типы алгебраических теорем и методов их доказательств. Рассмотрена пропедевтическая работа преподавателя по подготовке студентов к доказательству теорем, вопросы организации деятельности студентов по «открытию» формулировок теорем и поиску методов их доказательств, описаны различные приемы закрепления теоремы. Описана схема этапов учебного исследования, позволяющая усваивать доказательства готовых теорем и «открывать» новые теоремы. Акцент на ключевых моментах в доказательстве теорем, их идеях позволяет более эффективно осуществлять реализацию образовательной программы по алгебре и усилить мотивацию студентов к изучению алгебры.

Ключевые слова: доказательство, теорема, алгебра, лекция, практическое занятие, пропедевтическая деятельность; интуитивное мышление, логическое мышление, дедуктивные рассуждения.

The formation of students' ability to prove is a condition for the development of mathematical thinking. In the article various approaches to improving the training of students in the field of theory of evidence are analyzed. Different types of algebraic theorems and their proofs methods are presented. The teacher's propaedeutic work on preparation of students to the proof of theorems and the organization of activities of students in the "opening" of theorem and finding methods of its proof are considered. The various methods for fixation of theorem are described. The scheme of stages for educational research allowing to acquire theorems proofs and "to open" new theorems is described. The emphasis on the key points in the proof of theorems, their ideas allows more effective realization for algebra educational program and to strengthen the students' motivation of to study algebra.

Keywords: proof, theorem, algebra, lecture, practical lessons, propaedeutic activity, intuitive thinking, logical thinking, deductive reasonings.

Введение. Ориентация на разностороннее развитие студентов предполагает, в частности, необходимость гармоничного сочетания учебной деятельности с учебно-исследовательской, творческой деятельностью.

Поскольку, как писал французский философ Мишель де Монтень: «Мозг, хорошо устроенный, стоит больше, чем мозг, хорошо наполненный», – наиболее важной составляющей в высшей математике является не информационная, а методическая: умения, «знание как».

С другой стороны, основой математических знаний являются строгие доказательства [1, с. 54]. Они способствуют лучшему усвоению учебного материала, развитию математического мышления, поэтому проблема обучения доказательству всегда являлась одной из центральных в методике преподавания математики.

Формированию умения доказывать теоремы на материале школьного курса геометрии посвящено довольно много научно-методических и психологических исследований [2–4]. В них подчеркивается важность не столько формирования умения «разучивать» готовые доказательства теорем из учебников, сколько умения самостоятельно искать доказательства. Именно это способствует глубинному, целостному пониманию учебного материала на основе личного познавательного опыта в зоне ближайшего развития, формированию творческих и интегративных умений [5, с. 11–14; 6].

Параллельно с этим акцент на «человеческое измерение» научного знания последовательно расширяет и углубляет роль интуитивной компоненты в математическом образовании [7], ответственной за свернутое восприятие всей проблемы сразу и основанной на работе подсознания. Интуитивные представления, идеи остаются в долговременной памяти студентов, определяют математическое развитие, способность применять теорию на практике.

Именно алгебра, ввиду ее абстрактности и формализованности, является символическим языком математики, поэтому изучение образцов доказательств и «открытие» новых теорем в университетском курсе алгебры способствует развитию математического мышления и, в конечном итоге, позволяет сформировать целостное представление о всей математике, ее ключевых понятиях и идеях [8].

Введение в алгебру (третий семестр второго курса, то есть первый семестр изучения алгебры) традиционно состоит из 4 разделов (целые числа; комплексные числа; основные алгебраические структуры; матрицы и определители, системы линейных уравнений) и предполагает овладение не только системой понятий, определений и теорем, но и методами доказательства теорем, навыками изложения доказательств.

В статье в систематизированном виде представлены методические аспекты и особенности процесса формирования у студентов педагогического университета умения доказывать теоремы на начальном этапе изучения алгебры. С этой целью, в частности, представлены различные типы алгебраических теорем и методы их доказательства, рассмотрены вопросы пропедевтики и организации управляемой самостоятельной работы студентов по усвоению готовых и «открытию» новых теорем.

Типы теорем. Перечислим типы теорем, встречающихся в первом семестре изучения алгебры: 1) свойства, например, делимости целых чисел, делимости с остатком, взаимно простых чисел; 2) леммы: две леммы перед доказательством теоремы Евклида позволяют кратко записать доказательство в виде цепочки равенств; 3) следствия, например, основной теоремы арифметики; 4) формулы Муавра, Кардано, нахождения корней квадратных и кубических уравнений; 5) правила, например, умножения и деления комплексных чисел; 6) признаки делимости натуральных чисел; 7) критерии взаимной простоты, подгруппы, существования обратной матрицы; 8) теоремы могут быть сформулированы как задачи на доказательство.

Методы доказательства теорем. Многие теоремы в курсе алгебры доказываются одними и теми же методами: 1) метод доказательства от противного, как правило, используется для доказательства единственности, например, нейтрального и симметричного элементов в группе; 2) метод математической индукции используется для доказательства утверждений, содержащих в своей формулировке натуральное число n, например, при вычислении определителя Вандермонда; 3) по определению (на основании только определения), как правило, доказываются простейшие свойства, например, делимости целых чисел; 4) метод исчерпывания (задачу разбивают на подслучаи и рассматривают каждый случай отдельно) используется, например, для доказательства теоремы о натуральных делителях, коммутативности произведения независимых циклов в группе подстановок.

Под прямым доказательством в алгебре подразумевается цепочка, последовательность вычислений, преобразований или логических рассуждений. Каждый шаг в этой цепочке обосновывается. Обоснованием переходов в цепочке могут служить определения, аксиомы, ранее доказанные теоремы.

Доказательства существования алгебраических объектов (структур, тождеств) с заданными свойствами могут быть конструктивными и неконструктивными. Конструктивные доказательства описывают объект в явном виде. Они, фактически, являются источником алгоритмов для решения типовых задач. К конструктивным доказательствам относятся также построение контрпримеров, доказательство формул. В неконструктивных доказательствах устанавливается лишь сам факт существования указанного объекта, например, возможность разложения подстановок в произведение независимых циклов доказывается методом математической индукции.

В разделе «Основные алгебраические структуры» появляются теоремы с такой формулировкой: 1. *Множество S_n образует группу относительно операции умножения подстановок*. 2. *Множество комплексных чисел* $\mathbb{C}$ *относительно операций сложения и умножения образует поле*. 3. $\mathbb{Z}$ – *кольцо главных идеалов*.

Для формирования умения доказывать теоремы такого типа целесообразно систематически на практических занятиях решать задачи такого характера: 1. *Является ли мультипликативной или аддитивной группой множество:* $\{2^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$? 2. Является ли группой множество вращений плоскости, совмещающих с собой правильный треугольник? 3. Какие из множеств являются кольцами, а какие – полями: 1) $\mathbb{Z}$; 2) $2\mathbb{Z}$; 3) $m\mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$; 5) $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$?

Аналогии и параллели. При изучении систем линейных уравнений целесообразно проводить аналогию (параллели) между элементарными преобразованиями системы линейных уравнений и соответствующим им элементарным преобразованием расширенной матрицы системы. Это позволяет актуализировать и закрепить материал.

Слово «аналогично» часто встречается в доказательствах, излагаемых в учебниках. Студентов необходимо последовательно подводить к умению развертывать доказательства по уже имеющемуся образцу. Этого можно достичь с помощью хорошо продуманной, педагогически целесообразной системы задач.

Многоэтапные доказательства. В первом семестре изучения алгебры появляются теоремы, содержащие в своем доказательстве несколько этапов (частей). Как правило, это теоремы, в которых требуется доказать существование и единственность, например теорема о делении с остатком, основная теорема арифметики. При изучении теорем такого характера необходимо подчеркивать, что в доказательстве теоремы присутствует два этапа: на первом этапе доказывается существование или возможность построения, на втором – единственность.

В теореме о разрешимости в целых числах и структуре решений линейного уравнения с двумя неизвестными в первой части доказательства рассматривается критерий разрешимости, во второй – анализируется общий вид решения, структура. На примере этого доказательства можно знакомить студентов с планом доказательства и начинать формировать умение выделения основных идей доказательства.

Пропедевтика. Пропедевтическая работа преподавателя при подготовке к доказательствам теорем на лекции может содержать следующие элементы: 1) выявить понятия, теоремы, аксиомы, на которых основано доказательство, и организовать их повторение к лекции (актуализация знаний); 2) определить ведущий метод, идею и план доказательства, последовательность построения цепочки доказательных рассуждений и ее обоснования (логический компонент); 3) определить систему наводящих вопросов (контрольных вопросов), которая будет использоваться в лекции, для самостоятельного «открытия» студентами закономерностей, проведения сравнительного анализа, рассуждения по аналогии, построения контрпримеров, получения следствий и обобщений (интуитивный компонент); 4) продумать как индуктивные, так и дедуктивные рассуждения, встречающиеся в доказательствах теорем; 5) продумать рациональную запись доказательства.

В нашем учебно-методическом пособии [9] по каждой теме приводятся контрольные вопросы, позволяющие углубить понимание изученной теории, в том числе теорем с их доказательствами, и научиться применять ее при решении практических задач. Умение применять теорию при решении практических задач способствует, в конечном итоге, лучшему пониманию самой теории.

Как отмечают некоторые исследователи, на первом этапе формирования у студентов умения выводить следствия из заданных условий основное внимание необходимо уделять выяснению того, «что следует» и «из чего следует», но не «как это следует» [2, с. 92], то есть, фактически, необходимо научиться разбирать логическую структуру доказательства и самостоятельно строить логические цепочки по образцу.

Обучая студентов выводить следствия из заданных условий, целесообразно начинать с первичных, к которым относятся существенные признаки понятий, входящие в его определение. Алгебра начинается с изучения именно таких свойств: вывод свойств делимости целых чисел основан только на одном определении. Далее необходимо переходить к формированию умения строить цепочку рассуждений.

В наших статьях [6; 10] рассмотрены методические и методологические особенности организации работы студентов по «открытию» нового знания, в частности выдвижению гипотез и поиску методов их доказательств с целью раскрытия целостного понимания курса алгебры, продемонстрировано использование систем учебно-исследовательских заданий для организации самостоятельной работы студентов в мини-группах по «открытию» нового знания.

Организация деятельности студентов. Организация учебного процесса с целью формирования умения доказывать теоремы предполагает систематическое вовлечение студентов в учебно-исследовательскую деятельность по ходу усвоения знаний [10]. В частности, перед изучением теорем целесообразно (на лекции или при изучении пропедевтического материала к лекции) создавать такие проблемные ситуации, разбор которой мотивировал бы необходимость изучения этих теорем. Задачу учить мыслить, самостоятельно приобретать знания можно и нужно рассматривать в органическом единстве с задачей освоения структуры научного знания, то есть должен быть организован процесс не заучивания и пересказа, а развитие понятийного, логического и интуитивного мышления. Этому могут способствовать научно-популярные статьи, например в журнале «Квант», написанные ведущими математиками.

В конечном счете, необходимо так организовать познавательную деятельность студентов, чтобы процедура учебного исследования усваивалась ими вместе с тем содержанием, на котором оно осуществляется.

Закрепление. Для закрепления теорем и их доказательств можно использовать следующие приемы, которые показали свою эффективность при изучении алгебры: 1) после объяснения доказательства преподавателем один или несколько студентов повторяют его формулировку на естественном языке; на практических занятиях можно организовать повторение словесной формулировки теоремы и ее формулировки на языке символов, во внеаудиторное время для закрепления изученного материала можно использовать устное воспроизведение выученного кому-то или себе; 2) тренировать способность концентрироваться, не отвлекаться во время изучения и усвоения учебного материала; 3) тренировать память (для этого найти свои методы запоминания); 4) предлагать студентам вопросы по ходу изложения нового материала, которые позволяют повторить узловые моменты теоремы, идеи, лежащие в основе доказательства; 5) составить план доказательства; 6) организовать повторение, распределенное во времени; 7) демонстрировать практическое применение теорем; 8) систематизировать полученные студентами знания.

Во время коллоквиума усвоение теории, в том числе теорем и их доказательств, проверяется во время собеседования с преподавателем. Требования к коллоквиуму могут быть следующие: знать ключевые определения; формулировки теорем, идеи и планы доказательств, которые при необходимости разворачиваются в полное доказательство; уметь решать определенные типы задач. Кроме того, во время коллоквиума проверяется сформированность навыков устной и письменной математической речи.

Как правило, основным средством закрепления теорем является их применение к решению задач. Именно в этом студенты испытывают большие трудности.

Этапы учебного исследования. Для освоения умений понимать доказательство готовых теорем, а также «открывать» и доказывать новые теоремы студентов, начиная с младших курсов, необходимо нацеливать на то, что в доказательстве любой теоремы есть три основных этапа: исследование, формализация, усвоение.

Как правило, исследование начинается с наблюдений, выявления закономерностей, эксперимента и происходит на интуитивном или эвристическом уровне [11, с. 290–292]. Для интуитивного анализа необходимо получить как можно больше информации об исследуемой проблеме в систематизированном виде, со всевозможными связями и параллелями, чтобы потом из всего объема информации выбрать наиболее существенные моменты. На этапе формализации каждый шаг обосновывается с помощью логических средств.

Эксперимент в алгебре (численный или мысленный, умозрительный) сопутствует попыткам «открытия» новой связи между известными понятиями или выражениями (например, нахождение формулы). Объектом эксперимента при изучении темы «Целые числа» в алгебре (с этого раздела начинается изучение алгебры) может быть исследование делимости одного числа на другое, нахождение признаков делимости (численный эксперимент) [10]. Например, эксперимент необходим при решении задачи: *Докажите, что разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8.* Для решения этой задачи сначала необходимо догадаться, проведя небольшой по объему численный эксперимент, какой вид имеют нечетные целые числа с учетом того, что в дальнейшем будет исследоваться их делимость на 8. Далее необходимо исследовать, какие остатки возникают при делении выделенных классов чисел на 8.

Необходимость мысленного эксперимента возникает, например, при исследовании групп вращений правильных многоугольников и многогранников. Как правило, на практическом занятии описываются *группы вращений и симметрий правильных многоугольников,* приводящих к их самосовмещению. Так как при вращении всякая вершина переходит в вершину, то в группе вращений правильного -угольника будет n элементов. Решение задачи для правильных многоугольников облегчается тем, что все повороты можно отобразить на плоскости.

Под *вращением многогранника* понимается тоже его самосовмещение, но уже изобразить движения в пространстве вряд ли получится. Поэтому необходимо использовать *мысленный эксперимент*.

Задача такого характера обычно предлагается в качестве мини-проекта (краткосрочного проекта) в мини-группах к следующему занятию: домашнее задание исследовательского характера. В каждой мини-группе проводят исследование только одного многогранника: куба, тетраэдра или диэдра. Для желающих можно предложить исследовать группы вращений икосаэдра и додекаэдра. На следующем занятии каждая мини-группа делает презентацию по исследованной теме. В презентациях приводятся необходимые теоретические сведения, данные эксперимента, формулировка выдвинутых гипотез, их доказательство или опровержение. Таким образом, при решении задачи осмысливаются этапы учебного исследования.

Развернутая схема этапов учебного исследования, включающего эксперимент, как правило, содержит следующие элементы: 1) постановка задачи (проблемы) своими словами; 2) эксперимент с целью обобщения примеров и выявления закономерностей (результаты желательно представить в виде таблицы); 3) выдвижение гипотезы; 4) проверка гипотезы (как правило, численная, если это возможно); 5) доказательство или опровержение гипотезы; 6) выводы, формулировка гипотез, обобщающих доказанные теоремы.

Как видно из этой схемы, интуитивное и логическое мышление взаимно дополняют друг друга, причем выводы интуитивного мышления необходимо проверять аналитическими средствами, обосновывать каждый шаг доказательства. Если при решении задачи на доказательство эксперимент, численный или умственный, невозможно провести, то вместо этого можно интуитивное представление о доказательстве отобразить в виде дерева.

Использование развернутой схемы учебного исследования позволяет упорядочить познавательную деятельность студентов, сделать ее более эффективной. Ориентируясь на эту схему, студенты могут увидеть похожие этапы в различных доказательствах, что будет развивать их способности как в усвоении готовых теорем, так и в самостоятельном «открытии» новых.

При организации учебного процесса по алгебре на старших курсах можно использовать учебно-методические пособия, в которых освещаются вопросы взаимосвязи и единства различных разделов алгебры (интеграционное направление в образовании), а также проекцию идей современной математики на университетский курс алгебры.

Заключение. Как показывает наш опыт, систематическое формирование умения доказывать теоремы в процессе изучения алгебры, основанное на вышеизложенных приемах и методах, подтверждает свою эффективность. Студенты в конце изучения первого семестра алгебры отмечают, что им стало понятнее, с чего начинать доказательство; проще выстраивать логические связи. Подтвердило свою эффективность также обучение студентов решению нестандартных задач, нацеленных на развитие интуитивной компоненты мышления. Со слов студентов, после курса алгебры с параллельным изложением методики доказательств, развернутой схемы решения задач учебно-исследовательского характера, им стало легче решать олимпиадные задачи и задачи на доказательства, которые ранее вызывали у них огромные трудности.

Благодаря применению вышеописанных приемов и методов, студенты получают возможность не только продемонстрировать знание учебного материала, но и творческие профессиональные навыки будущих педагогов. Кроме того, такой подход к организации самостоятельной работы студентов над доказательствами теорем, в рамках существующей учебной программы, позволяет вовлечь большее число студентов в активную работу на лекциях и практических занятиях по алгебре.

Дальнейшей работой в этом направлении может служить разработка: 1) содержания всего курса алгебры (не только первого семестра) на базе изложения доказательства теорем с параллельным рассмотрением его методического обеспечения; 2) систем задач на доказательство для проведения практических занятий по алгебре, основанных на построении логической цепочки умозаключений; 3) методики обучения студентов дедуктивным рассуждениям и формирования у них интуитивного представления о доказательстве в виде дерева.

Литература

1. *Бровка, Н. В.* Интеграция теории и практики обучения математике как средство повышения качества подготовки студентов / Н. В. Бровка. – Минск : БГУ, 2009. – 243 с.
2. *Далингер, В. А.* Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем : учеб. пособие для СПО / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2018. – 338 с.
3. *Комароцкая, А. А.* Формирование умений проводить доказательные рассуждения в процессе обучения решению геометрических задач как актуальная педагогическая проблема [Электронный ресурс] / А. А. Комароцкая. – Режим доступа: http://elib.osu.ru/. – Дата доступа: 12.03.2019.
4. *Рыжик, В. А.* Царский путь в геометрии? / В. А. Рыжик // Математика в школе. – 2017. – № 4. – С. 3–16.
5. *Сотникова, О. А.* Целостность вузовского курса алгебры как методологическая основа его понимания / О. А. Сотникова. – Архангельск : Поморский университет, 2004. – 356 с.
6. *Баркович, О. А.* Реализация целостного подхода при обучении алгебре студентов-математиков [Электронный ресурс] / О. А. Баркович // Педагогическое образование в условиях трансформационных процессов: новые требования к содержанию и результатам = Teacher education in the context of transformation process: new content and results requirements : материалы VIII Международной научно-практической конференции, г. Минск : БГПУ, 21 ноября 2018 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка; под науч. ред. А. В. Позняк. – Минск: БГПУ, 2019. – С. 16–21. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
7. *Сотникова, О. А.* Алгебра: логика и интуиция / О. А. Сотникова // Высшее образование в России. – 2003. – № 2. – С. 155–156.
8. *Курант, Р.* Что такое математика? (Элементарный очерк идей и методов) / Р. Курант, Г. Роббинс /; пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : МЦНМО, 2001. – 568 с.
9. *Баркович, О. А.* Алгебра : задания для практических занятий и самостоятельной работы : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / О. А. Баркович. – Минск : БГПУ, 2005. – Ч. 1 : Введение в алгебру. – 134 с.
10. *Баркович, О. А.* Использование учебно-исследовательских заданий для организации самостоятельной работы студентов в мини-группах при обучении алгебре / О. А. Баркович // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2017. – № 4. – С. 36–42.
11. *Пойа, Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа ; пер. с англ. В. С. Бермана. – 3-е изд. – М. : URSS, 2010. – 448 с.

References

1. *Brovka, N. V.* Integratsiya teorii i praktiki obucheniya matematike kak sredstvo povysheniya kachestva podgotovki studentov / N. V. Brovka. – Minsk : BGU, 2009. – 243 s.
2. *Dalinger, V. A.* Metodika obucheniya matematike. Obucheniye uchashchikhsya dokazatelstvu teorem : ucheb. posobiye dlya SPO / V. A. Dalinger. – 2-ye izd., ispr. i dop. – M. : Izdatelstvo Yurayt, 2018. – 338 s.
3. *Komarotskaya, A. A.* Formirovaniye umeniy provodit dokazatelnyye rassuzhdeniya v protsesse obucheniya resheniyu geometricheskikh zadach kak aktualnaya pedagogicheskaya problema [Elektronnyy resurs] / A. A. Komarotskaya. – Rezhim dostupa: http://elib.osu.ru/. – Data dostupa: 12.03.2019.
4. *Ryzhik, V. A.* Tsarskiy put v geometrii? / V. A. Ryzhik // Matematika v shkole. – 2017. – № 4. – S. 3–16.
5. *Sotnikova, O. A.* Tselostnost vuzovskogo kursa algebry kak metodologicheskaya osnova yego ponimaniya / O. A. Sotnikova. – Arkhangelsk : Pomorskiy universitet, 2004. – 356 s.
6. *Barkovich, O. A.* Realizatsiya tselostnogo podkhoda pri obuchenii algebre studentov-matematikov [Elektronnyy resurs] / O. A. Barkovich // Pedagogicheskoye obrazovaniye v usloviyakh transformatsionnykh protsessov: novyye trebovaniya k soderzhaniyu i rezultatam = Teacher education in the context of transformation process: new content and results requirements : materialy VIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, g. Minsk : BGPU, 21 noyabrya 2018 g. / Belorus. gos. ped. un-t im. M. Tanka; pod nauch. red. A. V. Poznyak. – Minsk: BGPU, 2019. – S. 16–21. – 1 elektron. opt. disk (CD-ROM).
7. *Sotnikova, O. A.* Algebra: logika i intuitsiya / O. A. Sotnikova // Vyssheye obrazovaniye v Rossii. – 2003. – № 2. – S. 155–156.
8. *Kurant, R.* Chto takoye matematika? (Elementarnyy ocherk idey i metodov) / R. Kurant, G. Robbins // per. s angl. pod red. A. N. Kolmogorova. – 3-ye izd., ispr. i dop. – M. : MTSNMO, 2001. – 568 s.
9. *Barkovich, O. A.* Algebra : zadaniya dlya prakticheskikh zanyatiy i samostoyatelnoy raboty : ucheb.-metod. posobiye : v 2 ch. / O. A. Barkovich. – Minsk : BGPU, 2005. – Ch. 1 : Vvedeniye v algebru. – 134 s.
10. *Barkovich, O. A.* Ispolzovaniye uchebno-issledovatelskikh zadaniy dlya organizatsii samostoyatelnoy raboty studentov v mini-gruppakh pri obuchenii algebre / O. A. Barkovich // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2017. – № 4. – S. 36–42.
11. *Poya, D.* Matematicheskoye otkrytiye. Resheniye zadach: osnovnyye ponyatiya, izucheniye i prepodavaniye / D. Poya // per. s angl. V. S. Bermana. – 3-ye izd. – M. : URSS, 2010. – 448 s.