МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 2. С. 17–20.

УДК 517.929.7

ДАСЛЕДАВАННЕ КРАЯВОЙ ЗАДАЧЫ ДЛЯ АДНАГО КЛАСА РАШЭННЯЎ ХВАЛЕВАГА РАЎНАННЯ

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя Максіма Танка

Паступіў у рэдакцыю 9.04.19.

UDC 517.929.7

STUDY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE CLASS OF SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION

V. Shilinets,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics of Higher Educational Establishment of the Federation of Trade Unions of Belarus «International University «MITSO»;

I. Gulo,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, BSPU

Received on 9.04.19.

Для аднаго класа рашэнняў хвалевага раўнання атрымана інтэгральнае выяўленне і рэшана краявая задача.

Ключавыя словы: функцыянальна-інварыянтныя рашэнні, дуальная функцыя, манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, інтэгральнае выяўленне, краявая задача.

For one class of solutions of the wave equation the integral representation is obtained and the boundary value problem is solved.

Keywords: functional invariant solutions, the dual function, monotonicity in the sense of V. S. Fedorov, integral representation, solution of the boundary value problem..

Уводзіны. Функцыянальна-інварыянтныя рашэнні некаторых раўнанняў матэматычнай фізікі даследаваліся аўтарамі [1–14].

Як вядома [1–6], функцыянальна-інварыянтным рашэннем раўнання

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

называецца такое рашэнне $u=u(x,y)$, калі адвольная двойчы дыферэнцавальная функцыя $F(u)$ таксама з'яўляецца рашэннем гэтага раўнання.

Пры распаўсюджанні ваганняў, як акустычных, так і электрамагнітных, асноўнае значэнне мае раўнанне

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

дзе a – канстанта, u – функцыя зменных x,y,z і t, якое называецца звычайна хвалевым раўнаннем.

Калі разглядаць толькі плоскі выпадак, гэта значыць калі шуканая функцыя u не залежыць ад адной з каардынат, напрыклад ад каардынаты z, хвалевае раўнанне (1) будзе мець выгляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

дзе u – функцыя зменных x,y і t.

Для хвалевага раўнання (2) акадэмікамі У. І. Смірновым і С. Л. Собалевым [6] быў атрыманы клас функцыянальна-інварыянтных рашэнняў, які задаецца формулай

$$l(u)t+m(u)x+n(u)y-k(u)=0, \tag{3}$$

дзе $l^2(u)=a^2(m^2(u)+n^2(u))$. Працэйшыя функцыянальна-інварыянтныя рашэнні хвалевага раўнання (2) атрымаюцца, калі лічыць l,m і n канстантамі, а функцыю $k(u)$ роўнай u. Тады формула (3) прымае выгляд $u = lt + mx + ny$, дзе $(m^2+n^2)a^2 = l^2$.

Такім чынам, $u = f(mx+ny+lt)$ пры адвольнай функцыі f будзе таксама рашэннем раўнання (2).

Калі ўсе лікі l, m і n рэчаісныя, то мы маем так званую плоскую хвалю, якая з'яўляецца прасцейшым рашэннем хвалевага раўнання. Калі ж сярод каэфіцыентаў l, m і n ёсць камплексныя, то атрымаем істотна новае рашэнне, якое называецца камплекснай плоскай хваляй.

У дадзенай працы будем лічыць, што шуканая функцыя u раўнання (2) – дуальная функцыя зменных x, y і t [15].

Мэта артыкула – пабудова інтэгральнага выяўлення для аднаго класа рашэнняў раўнання (2) і рашэнне краявой задачы.

Асноўная частка. Няхай D – адназвязны абсяг трохмернай рэчаіснай эўклідавай прасторы $E^3(x,y,t)$.

Разгледзім дуальныя функцыі выгляду $f = f_1(x,y,t) + \varepsilon f_2(x,y,t)$, $u = x + iy + \varepsilon t$, дзе f_1, f_2 – рэчаісныя або камплексныя функцыі пункта (x, y, t) абсягу D; $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$.

Для любых пунктаў $M\,(x, y, t)$ і $M'(x', y', t')$ абсягу D мяркуем $\Delta f = f(M') - f(M)$, $\Delta u = u(M') - u(M)$.

Азначэнне 1. Дуальная функцыя f называецца манагеннай у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагеннай) [16] па дуальнай функцыі u у абсягу D, калі існуе такая дуальная функцыя $\theta = \theta_1(x,y,t) + \varepsilon\theta_2(x,y,t)$ $(\theta_i(x,y,t)\ (i=1,2)$ – адназначныя рэчаісныя або камплексныя функцыі пункта (x, y, t) абсягу D), што для любога фіксаванага пункта $M \in D$ і любога зменнага пункта $M' \in D$ маем

$$\Delta f = \theta(M)\Delta u + \alpha(M, M'),$$

дзе $\dfrac{\alpha(M,M')}{\rho} \to 0$ пры $\rho \to 0$, $\rho = \left|\overline{MM'}\right|$.

Лёгка паказаць, што калі функцыя f – F-манагенная па функцыі u у абсягу D, то існуюць частковыя вытворныя $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial t}$, і пры гэтым

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \theta\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \theta\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Абазначым функцыю θ праз $\dfrac{\partial f}{\partial u}$. Тады апошнюю роўнасць можна запісаць у выглядзе

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Азначэнне 2. Дуальная функцыя u называецца функцыянальна-інварыянтным рашэннем раўнання (2), калі ўсякая функцыя f, манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава па функцыі u, таксама з'яўляецца рашэннем хвалевага раўнання (2).

Лёгка пераканацца ў тым, што дуальная функцыя $u = x + iy + \varepsilon t$ з'яўляецца функцыянальна-інварыянтным рашэннем хвалевага раўнання (2).

Разгледзім наступную краявую задачу.

Задача. Няхай V – трохмерны абмежаваны абсяг з граніцай σ $(\sigma \subset D, V \subset D)$. Мяркуем далей, што u і функцыя f, F-манагенная па u, вызначаны на замкнутай двухмернай паверхні σ, гомеаморфнай сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкай для магчымасці скарыстаць формулу Астраградскага.

Патрабуецца знайсці ў любым унутраным пункце абсягу V значэнне функцыі f, F-манагеннай па u, калі вядомы яе значэнні на паверхні σ.

Для функцыі $f = f_1(x,y,t) + \varepsilon f_2(x,y,t)$ і адвольнага пункта $M(x_0, y_0, z_0) \notin \sigma$ лічым [17]:

$$I_\sigma = \int_\sigma \{\alpha_1(\varphi'_x - i\varphi'_y - \varepsilon\varphi'_t) + \alpha_2(i\varphi'_x + \varphi'_y) + \\ +\alpha_3(\varepsilon\varphi'_x + \varphi'_t)\} f d\sigma, \qquad (4)$$

дзе α_1, α_2, α_3 – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да паверхні σ у яе бягучым пункце $P(x, y, t)$, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (t-t_0)^2}$,

$$\varphi'_x = \frac{x - x_0}{r^3}, \quad \varphi'_y = \frac{y - y_0}{r^3}, \quad \varphi'_t = \frac{t - t_0}{r^3}.$$

Няхай M – любы дадзены пункт абсягу $D, M \notin \bar{V}$.

Тэарэма 1. Для любой дуальнай функцыі f, F-манагеннай па дуальнай функцыі u у абсягу D, маем $I_\sigma = 0$, дзе I_σ вызначаецца роўнасцю (4).

Доказ. Па формуле Астраградскага атрымоўваем

$$I_\sigma = \\ = \int_V \{\frac{\partial}{\partial x}((\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t})f) + \frac{\partial}{\partial y}((i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y})f) + \\ + \frac{\partial}{\partial t}((\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t})f)\} dV = \\ = \int_V \{(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x})f +$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+$$
$$+\left(i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)f+\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+$$
$$+\left(\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)f+$$
$$+\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\}dV=$$

$$=\int_V\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)f+$$
$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+$$
$$+\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+$$
$$+\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\}dV.$$

Адсюль і з умоў F-манагеннасці функцыі f па функцыі u у абсягу D, паколькі $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$, атрымоўваем

$$I_\sigma=\int_V\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial u}+$$
$$+\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial u}i+\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial u}\varepsilon\}dV=$$
$$=\int_V\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial u}\}dV=0.$$

Тэарэма 2. Калі дуальная функцыя f з’яўляецца F-манагеннай па дуальнай функцыі u у абсягу D, то для любога пункта M, які ляжыць унутры V, маем

$$f(M)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\{(\alpha_1\varphi'_x+\alpha_2\varphi'_y+\alpha_3\varphi'_t)+$$
$$+(\alpha_2\varphi'_x-\alpha_1\varphi'_y)i+(\alpha_3\varphi'_x-\alpha_1\varphi'_t)\varepsilon\}fd\sigma.$$

Доказ. Няхай σ_1 – сфера з цэнтрам у пункце $M(x_0, y_0, t_0)$, якая размешчана ўнутры σ. Калі l – радыус сферы σ_1, то маем

$$I_{\sigma_1}=\int_{\sigma_1}\{(\alpha_1+i\alpha_2+\varepsilon\alpha_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+$$
$$+(\alpha_2-i\alpha_1)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(\alpha_3-\varepsilon\alpha_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\}fd\sigma_1=$$
$$=\int_{\sigma_1}\{(\alpha_1+i\alpha_2+\varepsilon\alpha_3)\frac{x-x_0}{l^3}+ \qquad (5)$$
$$+(\alpha_2-i\alpha_1)\frac{y-y_0}{l^3}+(\alpha_3-\varepsilon\alpha_1)\frac{t-t_0}{l^3}\}fd\sigma_1=$$
$$=\int_{\sigma_1}\{\frac{1}{l^2}(\alpha_1^2+i\alpha_1\alpha_2+\varepsilon\alpha_1\alpha_3+\alpha_2^2-$$
$$-i\alpha_1\alpha_2+\alpha_3^2-\varepsilon\alpha_1\alpha_3)\}fd\sigma_1=$$
$$=\int_{\sigma_1}\{\frac{1}{l^2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\}fd\sigma_1.$$

Вядома, што $\sum_{k=1}^{3}\alpha_k^2=1$, $d\sigma_1=l^2d\omega$ ($d\omega \perp$ – элемент адзінкавай сферы). З роўнасці (5) атрымаем

$$f(M)=\frac{1}{4\pi}I_{\sigma_1}. \qquad (6)$$

З тэарэмы 1 вынікае, што $I_{\sigma_1}=I_\sigma$.

Тады з роўнасці (6) маем

$$f(M)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\{(\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial t})+ \qquad (7)$$
$$+(\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})i+(\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial t})\varepsilon\}fd\sigma.$$

Заключэнне. Пры дапамозе пабудаванага ў тэарэме 2 інтэгральнага выяўлення (7) і рашаецца сфармуляваная краявая задача.

Літаратура

1. *Соболев, С. А.* Функционально-инвариантные решения волнового уравнения / С. А. Соболев // Труды физ.-мат. института АН СССР. –1934. – Вып. 5.– С. 117–128.
2. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 3. – Ч. 2.– С. 196–204.
3. *Еругин, Н. П.* О функционально-инвариантных решениях / Н. П. Еругин // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. –1948. – Вып. 15. – С. 101–134.

References

1. *Sobolev, S. A.* Funktsionalno-invariantnyye resheniya volnovogo uravneniya / S. A. Sobolev // Trudy fiz.-mat. Instituta AN SSSR. – 1934. – Vyp. 5. – S. 117–128.
2. *Smirnov, V. I.* Kurs vysshey matematiki / V. I. Smirnov. – M. : GITTL, 1953. – T. 3. – Ch. 2. – S. 196-204.
3. *Yerugin, N. P.* O funktsionalno-invariantnykh resheniyakh / N. P. Yerugin // Uch. zap. LGU. Ser. mat. nauk. – 1948. – Vyp. 15. – S. 101–134.

4. *Еругин, Н. П.* Функционально-инвариантные решения уравнений гиперболического типа с двумя неизвестными переменными / Н. П. Еругин // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. – 1949. – Вып. 16.– С. 142–166.
5. *Смирнов, М. М.* Функционально-инвариантные решения волнового уравнения / М. М. Смирнов // Доклады АН СССР.– 1949. – № 6. –Т. 67.– С. 977–980.
6. *Кошляков, Н. С.* Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: ГИФМЛ, 1962. – С. 128–139.
7. *Стельмашук, Н. Т.* Об одном исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций / Н. Т. Стельмашук // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1967. – Т. 7.– № 2.– С. 431–436.
8. *Стельмашук, Н. Т.* Построение функционально-инвариантных решений системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте / Н. Т. Стельмашук // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1974. – № 4.– С. 35–39.
9. *Пенчанский, С. Б.* О функционально-инвариантных решениях одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / С. Б. Пенчанский // Дифференциальные уравнения. – 1985.– Т. 21. – № 8. – С. 1449–1450.
10. *Стельмашук, Н. Т.* Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 1.– С. 44–47.
11. *Стэльмашук, М. Т.* Аб краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1995.– № 1.– С. 85–88.
12. *Стельмашук, Н. Т.* Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. IV Всерос. науч. конф. с междунар. участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара : СамГТУ, 2007. – С. 172–174.
13. *Стэльмашук, М. Т.* Рашэнне краявой задачы для аднаго класа функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Т. Л. Струнеўская // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2007. – № 1.– С. 23–26.
14. *Стэльмашук, М. Т.* Аб краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Г. А. Андрэева // Весці БДПУ. Сер. 3. – 2010.– № 2.– С. 17–19.
15. *Стельмашук, Н. Т.* О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – № 1. – Т. 5.– С. 166–173.
16. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6.– С. 257–265.
17. *Федоров, В. С.* Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. –1957. – № 1. – С. 227–233.

4. *Yerugin, N. P.* Funktsionalno-invariantnyye resheniya uravneniy giperbolicheskogo tipa s dvumya neizvestnymi peremennymi / N. P. Yerugin // Uch. zap. LGU. Ser. mat. nauk. – 1949. – Vyp. 16. – S. 142–166.
5. *Smirnov, M. M.* Funktsionalno-invariantnyye resheniya volnovogo uravneniya / M. M. Smirnov // Doklady AN SSSR. – 1949. – № 6. – T. 67. – S. 977–980.
6. *Koshlyakov, N. S.* Osnovnyye differentsialnyye uravneniya matematicheskoy fiziki / N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov. – M. : GIFML, 1962. – S. 128–139.
7. *Stelmashuk, N. T.* Ob odnom issledovanii sistemy Maksvella s pomoshchyu F-monogennykh funktsiy / N. T. Stelmashuk // Zhurnal vych. matem. i matem. fiziki. – 1967. – T. 7. – № 2. – S. 431–436.
8. *Stelmashuk, N. T.* Postroyeniye funktsionalno-invariantnykh resheniy sistemy Maksvella dlya elektromagnitnogo polya v pustote / N. T. Stelmashuk // Vestsi AN BSSR. Ser. fiz.-mat. navuk. – 1974. – № 4. – S. 35–39.
9. *Penchanskiy, S. B.* O funktsionalno-invariantnykh resheniyakh odnoy sistemy differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh / S. B. Penchanskiy // Differentsialnyye uravneniya. – 1985. – T. 21. – № 8. – S. 1449–1450.
10. *Stelmashuk, N. T.* Ob integralnom predstavlenii funktsionalno-invariantnykh vektor-analiticheskikh funktsiy / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2006. – № 1. – S. 44–47.
11. *Stelmashuk, M. T.* Ab krayavoy zadachy dlya funktsyyanalna-invaryyantnykh vektar-analitychnykh funktsyy / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets // Vestsi BDPU. – 1995. – № 1. – S. 85–88.
12. *Stelmashuk, N. T.* Ob integralnom predstavlenn funktsionalno-invariantnykh vektor-analiticheskikh funktsiy / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Matematicheskoye modelirovaniye i krayevyye zadachi: tr. IV Vseros. nauch. konf. s mezhdunar. uchastiyem. Ch. 3: Differentsialnyye uravneniya i krayevyye zadachi. – Samara : SamGTU, 2007. – S. 172–174.
13. *Stelmashuk, M. T.* Rashenne krayavoy zadachy dlya adnago klasa funktsyyanalna-invaryyantnykh vektar-analitychnykh funktsyy / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets, T. L. Struneuskaya // Vestsi BDPU. Ser. 3. – 2007. – № 1. – S. 23–26.
14. *Stelmashuk, M. T.* Ab krayavoy zadachy dlya funktsyyanalna-invaryyantnykh vektar-analitychnykh funktsyy / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets, G. A. Andreyeva // Vestsi BDPU. Ser. 3. – 2010. – № 2. – S. 17–19.
15. *Stelmashuk, N. T.* O nekotorykh differentsialnykh sistemakh v chastnykh proizvodnykh / N. T. Stelmashuk // Sinirskiy matematicheskiy zhurnal. – 1964. – № 1. – T. 5. – S. 166–173.
16. *Fedorov, V. S.* Osnovnyye svoystva obobshchyonnykh monogennykh funktsiy / V. S. Fedorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958. – № 6. – S. 257–265.
17. *Fedorov, V. S.* Ob odnom obobshchenii integrala tipa Koshi v mnogomernom prostranstve / V. S. Fedorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1957. – № 1. – S. 227–233.