Весці БДПУ. Серыя 3. 2019. № 2. С. 5–9.

УДК 530.145

ОДНОМЕРНЫЙ РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СИНГУЛЯРНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

А. Н. Лавренов,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий в образовании Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка

Поступила в редакцию 19.04.19.

UDC 530.145

ONE-DIMENSIONAL RELATIVISTIC SINGULAR OSCILLATOR

A. Lavrenov,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Informational Technologies in Education, BSPU

Received on 19.04.19.

В работе анализируется поведение частицы во внешнем поле, которое имитируется моделью сингулярного осциллятора в шредингероподобном выражении для одномерного релятивистского гамильтониана с исключением нединамической компоненты в рамках волновых уравнений первого порядка для спинов 0, 1/2, 1 и для мультиспина 0,1. Получены соответствующие решения в рамках вышеуказанной модели.

Ключевые слова: одномерные релятивистские модели, волновые уравнения первого порядка, спин, обобщенная матричная алгебра, сингулярный осциллятор.

The particle behavior with the spins 0, 1/2, 1 and multispin 0,1 in the external field for the one-dimensional relativistic models are considered. The external field is simulated by the singular oscillator model in Schrödinger-like expression for Hamiltonian with the exception of the nondynamic components. The description is given in the unified form of the first order wave equations by means of the generalized matrix algebra. The corresponding solutions are obtained within the framework model.

Keywords: one-dimensional relativistic models, first order wave equations, spin, the generalized matrix algebra, the singular oscillator.

Введение. В представленной работе полученные ранее автором шредингероподобные выражения для гамильтониана свободных частиц с исключением нединамической компоненты [1] использованы для текущего анализа поведения частиц во внешнем поле, которое моделируется в работе моделью сингулярного осциллятора. Данная модель позволяет легко перейти к N-мерному обобщению и к моделям с отражательными симметриями (осциллятор Данкля) [2; 3], что выгодно отличает представленный в статье материал с методической точки зрения для быстрого первоначального знакомства с вышеуказанным научным направлением. С другой стороны, обсуждаемая модель может прояснить более наглядно проблему поведения частицы с различными значениями спина во внешнем поле (рассеяние мезонов на ядрах) и служить определенным базисом моделирования таких реальных физических систем, как экситоны и донорные состояния в многослойных полупроводниках и моноатомных слоях в присутствии магнитного поля.

Изложение дано последовательно для значений спина 0, 1/2, 1 и для мультиспина 0,1 с 1 по 4 пункт основной части.

Основная часть

1. Нулевой спин

Согласно [1] скалярное уравнение Клейна – Фока второго порядка в двумерном релятивистском пространстве $\{(x_k)=(x_1,x_2)=(it,x_2\}$, $k=\{1,2\}$ можно представить в следующей унифицированной форме уравнения первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры (здесь и далее дается обобщение для двух значений массы, то есть $m^2=\chi_1\chi_2$)

$$(\alpha_1\partial_1+\alpha_2\partial_2+\chi_1 P_1+\chi_2 P_2)\varphi(x)=0 \qquad (1)$$

Выше были введены представление волновой функции $\varphi(x)=\varphi_A(x)$, где $A=\{0,k\}\equiv\{0,1,2\}$, и элементы обобщенной матричной алгебры:

$$(\varepsilon^{AB})_{CD}=\delta_{AC}\delta_{BD};\varepsilon^{AB}\varepsilon^{CD}=\delta_{BC}\varepsilon^{AD};$$

$\alpha_k = \varepsilon^{0k} + \varepsilon^{k0}; \alpha_k^3 = \alpha_k;$

$P_1 = \varepsilon^{kk}; P_1^2 = P_1; P_2 = \varepsilon^{00}; P_2^2 = P_2; P_1 + P_2 = 1;$

$\alpha_k\alpha_l = \varepsilon^{kl} + \delta_{kl}\varepsilon^{00}; \alpha_k\alpha_l\alpha_m + \alpha_m\alpha_l\alpha_k = \delta_{kl}\alpha_m + \delta_{ml}\alpha_m.$

Определяя проекторы $R = \alpha_1^2 \equiv \varepsilon^{00} + \varepsilon^{11}$ и $\overline{R} = 1 - \alpha_1^2 \equiv \varepsilon^{22}$, в общем виде можно получить соответственно уравнения для нединамической $\Psi = \overline{R}\varphi$

$$\Psi = -\frac{1}{\chi_1}\overline{R}\alpha_2\partial_2\Phi \equiv -\frac{1}{\chi_1}\varepsilon^{20}\partial_2\Phi \qquad (2)$$

и в шредингероподобном виде для динамической $\Phi = R\varphi$ составляющих в волновой функции φ:

$$-\partial_1\Phi = H\Phi \equiv$$

$$\equiv \left\{\alpha_1(\chi_1 P_1 + \chi_2 P_2) - \frac{1}{\chi_1}\alpha_1\alpha_2\overline{R}\alpha_2\partial_2^2\right\}\Phi \equiv \qquad (3)$$

$$\equiv \left\{\chi_1\varepsilon^{01} + (\chi_2 - \frac{1}{\chi_1}\partial_2^2)\varepsilon^{10}\right\}\Phi$$

Внешнее поле в виде модели сингулярного осциллятора

$$g(x) = ax + \frac{b}{x}$$

введем стандартным образом – через удлинение импульса, то есть

$$\partial_2 \to D_2 \equiv \partial_2 - \eta g(x) = \partial_2 - \eta(ax + \frac{b}{x}), \qquad (4)$$

а временную зависимость – через замену временной производной переменной энергии частицы E. Также следует обратить внимание на матрицу эрмитизации η, которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\eta = 2\alpha_1^2 - 1 \equiv \varepsilon^{00} + \varepsilon^{11} - \varepsilon^{22}; \qquad \eta\alpha_1 = \eta\alpha_1;$$

$$\eta\alpha_2 = -\eta\alpha_2 \qquad (5)$$

В результате вышеуказанных подстановок получим соответственно для Ψ и Φ следующие уравнения:

$$\Psi = -\frac{1}{\chi_1}\overline{R}\alpha_2 D_2\Phi \equiv -\frac{1}{\chi_1}\varepsilon^{20}D_2\Phi$$

$$E\Phi \equiv \left\{-\alpha_1(\chi_1 P_1 + \chi_2 P_2) + \alpha_1\alpha_2 D_2\frac{1}{\chi_1}\overline{R}\alpha_2 D_2\right\}\Phi \equiv$$

$$\equiv \left\{-\chi_1\varepsilon^{01} - \chi_2\varepsilon^{10} + \frac{\varepsilon^{10}}{\chi_1}(\partial_2 + g)(\partial_2 - g)\right\}\Phi.$$

Другими словами, для компонент φ_0, φ_1 динамической составляющей $\Phi = \begin{bmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\end{bmatrix}$ волновой функции φ имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} -\chi_1\varphi_1 = E\varphi_0 \\ \left\{E^2 - \chi_1\chi_2 + (\partial_2 + g)(\partial_2 - g)\right\}\varphi_0 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Расписывая детально последнее выражение, получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка для компоненты φ_0:

$$\left\{\partial_2^2 - \frac{b(b-1)}{x^2} - a(2b+1) + \right.$$

$$\left. + E^2 - \chi_1\chi_2 - ax^2\right\}\varphi_0 = 0 \qquad (7)$$

Его решения хорошо известны [2] и выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию, которая в дискретном случае представляет собой полиномы Лагерра. Таким образом, нами найдены решения для соответствующих компонент φ_0, φ_1 волновой функции в нашем случае спина 0.

2. Спин 1/2

В данном случае спина 1/2 согласно [1] отправным уравнением будет являться линеаризованное методом Дирака скалярное уравнение Клейна – Фока второго порядка в двумерном релятивистском пространстве:

$$[\sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + m]\varphi_0 = 0, \qquad (8)$$

где двухкомпонентная функция есть спинор

$$\varphi_0^T = (\varphi_1, \varphi_2)$$

и выбраны известные 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \sigma_2 = i\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad (9)$$

в качестве матриц Дирака со стандартными свойствами

$$\sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k = 2\delta_{kl}.$$

Чтобы быстрее прийти к конечному результату, выберем представление матриц Дирака, полученное из (9) преобразованием подобия с помощью матрицы

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}; V^2 = 1,$$

то есть

$$\sigma_1 \to \sigma_3 \equiv V\sigma_1 V^{-1}; \sigma_1 \to -\sigma_2 \equiv V\sigma_2 V^{-1} \qquad (10)$$

Введя внешнее поле в виде модели сингулярного осциллятора согласно формуле (4), запишем наше уравнение в шредингероподобном виде с учетом (10):

$$\partial_1\varphi_0 = -\sigma_3\left[-\sigma_2 D_2 + \mathrm{m}\right]\varphi_0 = \left[i\sigma_1 D_2 - \sigma_3 \mathrm{m}\right]\varphi_0.$$

В качестве матрицы эрмитизации η выберем матрицу σ_3. Учитывая вышеуказанное, можно для двух компонент φ_1, φ_2 спинора φ_0 получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} [E+m]\varphi_1 = i[\partial_2 + g]\varphi_2 \\ [E-m]\varphi_2 = i[\partial_2 - g]\varphi_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} [E+m]\varphi_1 = i[\partial_2 + g]\varphi_2 \\ \left[E^2 - m^2 + (\partial_2 + g)(\partial_2 - g)\right]\varphi_2 = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Последнее выражение в (11) совпадает с последним выражением в формуле (6). Таким образом, имеем аналогичное по форме нулевому спину дифференциальное уравнение второго порядка (7) и его решение для соответствующих компонент волновой функции в нашем случае спина 1/2.

3. Единичный спин

В данном случае единичного спина согласно [1] систему уравнений Прока в двумерном релятивистском пространстве можно представить в следующей унифицированной форме уравнения первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры:

$$(\beta_1\partial_1 + \beta_2\partial_2 + \chi_1 \mathrm{P}_1 + \chi_2 \mathrm{P}_2)\varphi(x) = 0. \qquad (12)$$

Выше были введены представление волновой функции $\varphi(x) = \varphi_A(x)$, где $A = \{k, [kl]\} \equiv$ $\equiv \{1, 2, [12]\}$ (здесь $\varphi_{[12]} = -\varphi_{[21]}$ – антисимметричный тензор, состоящий из одной компоненты в рассматриваемом пространстве), и элементы обобщенной матричной алгебры:

$$(\varepsilon^{AB})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD}; \varepsilon^{AB}\varepsilon^{CD} = \delta_{BC}\varepsilon^{AD};$$

$$\beta_k = \varepsilon^{[lk]l} + \varepsilon^{l[lk]}; \beta_k^3 = \beta_k;$$

$$P_1 = \varepsilon^{kk}; P_1^2 = P_1; P_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^{[kl][kl]};$$

$$P_2^2 = P_2; P_1 + P_2 = 1;$$

$$\beta_k\beta_l = \varepsilon^{[mk][ml]} + \delta_{[mk][sl]}\varepsilon^{ms};$$

$$\beta_k\beta_l\beta_m + \beta_m\beta_l\beta_k = \delta_{kl}\beta_m + \delta_{ml}\beta_m;$$

Определим проекторы $R = \beta_1^2 \equiv \varepsilon^{[12][12]} + \varepsilon^{22}$ и $\bar{R} = 1 - \beta_1^2 \equiv \varepsilon^{11}$ для выделения нединамической $\Psi = \bar{R}\phi$ и динамической $\Phi = R\phi$ составляющих в волновой функции φ и получим для них такие уравнения:

$$\Psi = -\frac{1}{\chi_1}\bar{R}\beta_2\partial_2\Phi \equiv -\frac{1}{\chi_1}\varepsilon^{1[12]}\partial_2\Phi$$

$$-\partial_1\Phi = \left\{\beta_1(\chi_1 \mathrm{P}_1 + \chi_2 \mathrm{P}_2) - \frac{1}{\chi_1}\beta_1\beta_2\bar{R}\beta_2\partial_2^2\right\}\Phi \equiv$$

$$\equiv \left\{-\chi_1\varepsilon^{[12]2} + \varepsilon^{2[12]}\left(\frac{1}{\chi_1}\partial_2^2 - \chi_2\right)\right\}\Phi.$$

Поступая аналогично предыдущему случаю нулевого значения спина, введем внешнее поле в виде модели сингулярного осциллятора согласно формуле (4). Однако матрица эрмитизации η здесь будет удовлетворять следующим соотношениям:

$$\eta = 2\beta_1^2 - 1 \equiv -\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{[12][12]}; \ \eta\beta_1 = \eta\beta_1;$$

$$\eta\beta_2 = -\eta\beta_2.$$

Учитывая вышеуказанное, можно получить соответственно для Ψ и Φ следующие уравнения:

$$\Psi = -\frac{1}{\chi_1}\bar{R}\beta_2 D_2\Phi \equiv -\frac{1}{\chi_1}\varepsilon^{1[12]}D_2\Phi$$

$$E\Phi \equiv \left\{-\beta_1(\chi_1 \mathrm{P}_1 + \chi_2 \mathrm{P}_2) + \beta_1\beta_2 D_2\frac{1}{\chi_1}\bar{R}\beta_2 D_2\right\}\Phi \equiv$$

$$\equiv \left\{-\chi_1\varepsilon^{[12]2} - \chi_2\varepsilon^{2[12]} + \frac{\varepsilon^{2[12]}}{\chi_1}(\partial_2 + g)(\partial_2 - g)\right\}\Phi.$$

Это означает, что для компонент $\varphi_2, \varphi_{[12]}$ динамической составляющей $\Phi = \begin{bmatrix}\varphi_2 \\ \varphi_{[12]}\end{bmatrix}$ волновой функции φ имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} -\chi_1\varphi_{[12]} = E\varphi_2 \\ \left\{E^2 - \chi_1\chi_2 + (\partial_2 + g)(\partial_2 - g)\right\}\varphi_2 = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Последнее выражение в (13) совпадает с последним выражением в формуле (6). Таким образом, опять имеем аналогичное по форме нулевому спину дифференциальное уравнение второго порядка (7) с его решением для соответствующих компонент волновой функции в нашем случае единичного спина.

4. Мультиспин 0,1

В данном случае мультиспина 0,1 согласно [1] исходным уравнением является следующее унифицированной формы уравнение первого порядка:

$$(\gamma_1\partial_1+\gamma_2\partial_2+\mathrm{m})\varphi(\mathrm{x})=0 \qquad (14)$$

Выше были введены представление волновой функции $\varphi(x)=\varphi_A(x)$, где $A=\{0,k,[kl]\}\equiv\{0,1,2,[12]\}$, и элементы обобщенной матричной алгебры:

$$(\varepsilon^{AB})_{CD}=\delta_{AC}\delta_{BD};\varepsilon^{AB}\varepsilon^{CD}=\delta_{BC}\varepsilon^{AD};$$

$$\gamma_1=\varepsilon^{01}+\varepsilon^{10}-\varepsilon^{[12]2}-\varepsilon^{2[12]};\gamma_1^2=1;$$
$$\gamma_2=\varepsilon^{02}+\varepsilon^{20}+\varepsilon^{[12]1}+\varepsilon^{1[12]};\gamma_2^2=1.$$

Учитывая внешнее поле в виде модели сингулярного осциллятора согласно формуле (4), наше уравнение в шредингероподобном виде будет иметь следующий вид:

$$\partial_1\varphi(x)=-\gamma_1\left[\gamma_2 D_2+\mathrm{m}\right]\varphi(x)=$$
$$=\left[-\gamma_1\gamma_2\partial_2-\gamma_2 g-\gamma_1\mathrm{m}\right]\varphi(x),$$

где в качестве матрицы эрмитизации η выбрана матрица γ_1. Следовательно, для всех компонент волновой функции $\varphi(x)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} E & m & g & \partial_2 \\ m & E & \partial_2 & g \\ g & -\partial_2 & E & -m \\ -\partial_2 & g & -m & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_{[12]}\end{bmatrix}=0 \qquad 3$$

или

$$\begin{cases} E\varphi_{[12]}=\partial_2\varphi_0-g\varphi_1+m\varphi_2 \\ (E^2-m^2)\varphi_2=(m\partial_2-Eg)\varphi_0+ \\ +(E\partial_2-mg)\varphi_1 \\ \left[E(\partial_2^2+E^2-m^2-g^2)-mg^{(1)}\right]\varphi_0+ \\ +\left[m(\partial_2^2+E^2-m^2-g^2)-Eg^{(1)}\right]\varphi_1=0 \\ \left[m(\partial_2^2+E^2-m^2-g^2)-Eg^{(1)}\right]\varphi_0+ \\ +\left[E(\partial_2^2+E^2-m^2-g^2)-mg^{(1)}\right]\varphi_1=0, \end{cases}$$

где введено обозначение $g^{(1)}\equiv\partial_2 g$.

Если сложить два последних уравнения, а также вычесть из предпоследнего уравнения последнее, то после несложных преобразований можно прийти к паре дифференциальных уравнений второго порядка:

$$(E\pm m)\left[\partial_2^2+E^2-m^2-g^2\mp g^{(1)}\right]\times$$
$$\times\left[\varphi_0\pm\varphi_1\right]=0, \qquad (15)$$

которые с точностью до явных переобозначений совпадают с формулой (7).

Таким образом, опять имеем аналогичные по форме нулевому спину линейные комбинации решений дифференциального уравнения второго порядка (7) для соответствующих компонент волновой функции в нашем случае мультиспина 0,1.

Заключение. В данной работе анализируется поведение частицы во внешнем поле, которое имитируется моделью сингулярного осциллятора в шредингероподобном выражении для одномерного релятивистского гамильтониана с исключением нединамической компоненты в рамках волновых уравнений первого порядка для спинов 0, 1/2, 1 и для мультиспина 0,1. Получены соответствующие решения в рамках вышеуказанной модели.

Литература

1. *Лаврёнов, А. Н.* Одномерные (1+1) релятивистские модели / А. Н. Лаврёнов // Весці БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2018. – № 4. – С. 5–10.
2. Nogueira, Pedro H. F. and de Castro, Antonio S., From the generalized Morse potential to a unified treatment of the D-dimensional singular harmonic oscillator and singular Coulomb potentials / Pedro H. F. Nogueira and Antonio S. de Castro [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2016. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1605.00280.pdf. – Date of access: 20.03.2019.

References

1. *Lavrenov, A. N.* Odnomernyye (1+1) relyativistskiye modeli / A. N. Lavrenov // Vestsi BDPU. Seryya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya. – 2018. – № 4. – S. 5–10.
2. Nogueira, Pedro H. F. and de Castro, Antonio S., From the generalized Morse potential to a unified treatment of the D-dimensional singular harmonic oscillator and singular Coulomb potentials / Pedro H. F. Nogueira and Antonio S. de Castro [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2016. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1605.00280.pdf. – Date of access: 20.03.2019.

3. De Bie, Hendrik, Genest, Vincent X., de Vijver, Wouter van, Vinet, Luc, A higher rank Racah algebra and the Z_2^n n Laplace-Dunkl operator / Hendrik De Bie, Vincent X. Genest, Wouter van de Vijver, Luc Vinet, [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2016. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1610.02638.pdf. – Date of access: 20.03.2019.

3. De Bie, Hendrik, Genest, Vincent X., de Vijver, Wouter van, Vinet, Luc, A higher rank Racah algebra and the Z_2^n Laplace-Dunkl operator / Hendrik De Bie, Vincent X. Genest, Wouter van de Vijver, Luc Vinet, [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2016. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1610.02638.pdf. – Date of access: 20.03.2019..