Учреждение образования
«Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной и информационно-аналитической работе
В.М. Зеленкевич
«15» __________ 2016 г.

Регистрационный № УД 24-1-№10-2016 уч.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:
1-02 05 01 Математика и информатика**

2016 г.

Учебная программа составлена на основе Образовательного стандарта высшего образования первая ступень специальность 1-02 05 01 Математика и информатика (ОСВО 1-02 05 01 – 2013) и Учебного плана специальности 1-02 05 01 Математика и информатика (регистрационный № 152 – 2013/у от 25. 07. 2013 г.)

СОСТАВИТЕЛЬ:

О.А. Баркович, доцент кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В.В.Курсов, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
Д.Ф. Базылев, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математики и методики преподавания математики
(протокол № 10 от 10.06.2016 г.);

И.о. заведующего кафедрой ________ С.И. Василец

Научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»
(протокол № 6 от 15.06.2016 г.)

Оформление учебной программы и сопровождающих её материалов действующим требованиям Министерства образования Республики Беларусь соответствует

Методист учебно-методического управления БГПУ

____________ С.А. Стародуб

Ответственная за редакцию: О.А. Баркович
Ответственная за выпуск: О.А. Баркович

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа по учебной дисциплине «Теория чисел» составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования по специальности 1-02 05 01 Математика и информатика.

Дисциплина «Теория чисел» для педагогических университетов представляет собой обоснование теоретико-числовых основ школьного курса алгебры. С точки зрения профессиональной направленности, теория чисел занимает особо важное место в подготовке будущих преподавателей математики, так как многие темы этой учебной дисциплины могут служить фундаментом для факультативных занятий.

Цели и задачи учебной дисциплины

Основными целями учебной дисциплины «Теория чисел» являются:

– развитие математического мышления обучающихся;

– освоение студентами методов исследования теоретико-числовых закономерностей процессов реального мира.

Основными задачами учебной дисциплины «Теория чисел» являются:

– усвоение специфического понятийного аппарата и символики теории чисел;

– ознакомление с методами и приемами решения теоретико-числовых задач;

– усовершенствование навыков самостоятельной работы с научной литературой.

Учебно-воспитательный процесс при изучении теории чисел должен быть организован таким образом, чтобы он давал возможность будущему преподавателю приобрести основные профессиональные качества:

- сформировать установку на творческую профессиональную деятельность;

- развить профессиональное мышление, которое обеспечило бы будущему специалисту возможность свободно оперировать профессиональными знаниями, формулировать проблемы и выбирать оптимальные пути их решения в самостоятельной практической деятельности;

- воспитать в себе активную профессиональную позицию, вырабатывать свой подход в решении педагогических задач, обеспечивающих результативность учебно-воспитательной деятельности;

- развивать познавательную активность и потребность будущего специалиста в самостоятельном повышении своего профессионального уровня.

Для успешного изучения дисциплины «Теория чисел» студентам необходимо усвоить следующие разделы дисциплины «Алгебра»: «Целые числа», «Комплексные числа», «Основные алгебраические структуры».

Изучение учебной дисциплины «Теория чисел» должно обеспечить формирование у студентов академических и социально-личностных компетенций.

Требования к академическим компетенциям

Студент должен:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть методами научно-педагогического исследования.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

Требования к социально-личностным компетенциям

Студент должен:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

Требования к профессиональным компетенциям

Студент должен:

ПК-1. Управлять учебно-познавательной и учебно-исследовательской деятельностью обучающихся.

ПК-2. Использовать оптимальные методы, формы и средства обучения.

ПК-3. Организовывать и проводить учебные занятия различных видов и форм.

ПК-4. Организовывать самостоятельную работу обучающихся.

ПК-17. Осуществлять профессиональное самообразование и самовоспитание с целью совершенствования профессиональной деятельности.

Требования к уровню усвоения содержания учебной дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины студент должен овладеть следующими навыками и умениями.

Студент должен

знать:

– основные определения и теоремы теории чисел;

– основные методы доказательств теорем теории чисел;

– теорему о делении с остатком для целых чисел и целых гауссовых чисел;

– основные числовые функции и их свойства;

– основные свойства сравнений;

уметь:

– приводить примеры основных теоретико-числовых понятий;

– формулировать и доказывать основные теоретико-числовые теоремы и утверждения;

– применять теоретические знания и основные методы доказательств при решении теоретико-числовых задач;

– находить каноническое разложение целого числа;

– решать линейные диофантовы уравнения;

– решать сравнения с одной неизвестной;

– применять теорию сравнений к решению арифметических задач: отысканию остатков от деления некоторого числа на заданное число; установлению признаков делимости чисел;

владеть:

– навыками корректного использования теоретико-числовой терминологии;

– навыками изложения доказательств теоретико-числовых утверждений;

– навыками решения типовых теоретико-числовых задач.

Методы обучения рекомендованные к использованию в процессе преподавания учебной дисциплины: сообщение преподавателя, беседа, анализ, построение алгоритмов, моделирование, численный эксперимент, самостоятельная работа.

Информационно-методическая часть учебной программы включает список основной и дополнительной литературы, методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов, перечень рекомендуемых средств диагностики учебной деятельности.

Организация самостоятельной работы студентов

На самостоятельную работу студентов отведено по темам следующее количество часов:

дневная форма получения образования всего 62 часа (тема 1.1 – 4 часа, тема 1.2 – 4 часа, тема 1.3 – 4 часа, тема 1.4 – 4 часа, тема 1.5 – 6 часов, тема 1.6 – 4 часа, тема 2.1 – 4 часа, тема 2.2 – 4 часа, тема 2.3 – 4 часа, тема 2.4 – 6 часов, тема 2.5 – 6 часов, тема 2.6 – 6 часов, тема 2.7 – 6 часов);

заочная форма получения образования всего 110 часов (тема 1.1 – 6 часов, тема 1.2 – 6 часов, тема 1.3 – 8 часов, тема 1.4 – 8 часов, тема 1.5 – 10 часов, тема 1.6 – 8 часов, тема 2.1 – 8 часов, тема 2.2 – 8 часов, тема 2.3 – 8 часов, тема 2.4 – 10 часов, тема 2.5 – 10 часов, тема 2.6 – 10 часов, тема 2.7 – 10 часов).

Контролируемая самостоятельная работа студентов планируется в пределах учебных часов, отведённых на аудиторные занятия по дисциплине.

В принципе, каждая тема учебной программы позволяет организовать учебно-исследовательскую самостоятельную работу студентов. Эта работа должна органично включаться в учебный процесс в сочетании со всеми видами учебных занятий.

Особое внимание необходимо обращать на организацию индивидуальной работы мини-групп (малых подвижных групп) студентов под руководством преподавателя. Рекомендуется разработка системы заданий для организации индивидуальных образовательных траекторий мини-групп.

Диагностика компетенций студента

Учебная дисциплина преподается в 7 семестре дневной формы получения образования и на 5 курсе (9 семестр) заочной формы получения образования. Может планироваться проведение контрольных работ. По каждому разделу программы рекомендуется проведение коллоквиума.

Программа составлена в соответствии с типовым учебным планом по специальности 1-02 05 01 Математика и информатика, рассчитана для

дневной формы получения образования на 164 часа, из них 66 часов аудиторных (лекций – 32, практических занятий – 34). Форма контроля – экзамен;

заочной формы получения образования на 164 часа, из них 18 часов аудиторных (лекций – 8, практических занятий – 10). Форма контроля – экзамен

Рейтинговые контрольные работы проводятся по темам:

№ 1 – тема 1 «Отношение делимости в кольце целых чисел»;

№ 2 – тема 2 «Сравнения и их основные свойства»;

№ 3 – тема 3 «Первообразные корни и индексы. Символ Лежандра. Преобразование несократимой обыкновенной дроби в периодическую дробь».

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел I. Отношение делимости в кольце целых чисел

1.1. Свойства делимости целых чисел. Простые и составные числа

Свойства делимости целых чисел. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких целых чисел. Взаимно простые и попарно взаимно простые числа. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики. Решето Эратосфена для построения таблиц простых чисел. Важнейшие примеры простых чисел: простые числа Мерсенна и простые числа Ферма.

1.2. Конечные цепные дроби. Подходящие дроби

Конечные цепные дроби. Единственность представления рационального числа в виде конечной цепной дроби, взаимосвязь с алгоритмом Евклида. Подходящие дроби и их свойства: рекуррентные формулы для вычисления подходящих дробей; несократимость подходящих дробей; линейное представление наибольшего общего делителя двух целых чисел; возрастающая последовательность чётных подходящих дробей и убывающая последовательность нечётных подходящих дробей.

1.3. Кольцо целых гауссовых чисел

Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. Норма целого гауссова числа и её свойства. Мультипликативность нормы. Представление произведения чисел в виде суммы двух квадратов. Делители единицы, тривиальные делители. Ассоциированные числа и их геометрическая интерпретация. Теорема о делении с остатком в $\mathbb{Z}[i]$. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух целых гауссовых чисел. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя. Теорема о существовании наибольшего общего делителя и его линейном представлении.

1.4. Простые гауссовы числа

Простые гауссовы числа и их свойства. Аналог основной теоремы арифметики в $\mathbb{Z}[i]$: представление целых гауссовых чисел в виде произведения простых гауссовых чисел. Описание всех простых гауссовых чисел: $(1+i)$, простые натуральные числа вида $p = 4k+3, k \in \mathbb{N},$ и ассоциированные с ними; множители $a+bi$ простого натурального числа $p = 4k+1, k \in \mathbb{N}$. Алгоритм факторизации (разложения на простые множители) в $\mathbb{Z}[i]$.

1.5. Диофантовы уравнения

Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными, критерий существования решения. Общее решение неоднородного линейного диофантова уравнения как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения. Алгоритм решения линейных диофантовых уравнений.

Нелинейные диофантовы уравнения. Уравнение Ферма, геометрическая интерпретация, формулы для нахождения пифагоровых троек. Уравнение Пелля, фундаментальное решение, формулы для нахождения решений. Некоторые методы решения нелинейных диофантовых уравнений: разложение на множители, испытание остатков.

1.6. Числовые функции

Числовые функции. Целая часть числа и её свойства. Формула для вычисления наибольшего показателя, с которым простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$. Число $\tau(n)$ и сумма $\sigma(n)$ натуральных делителей натурального числа n: формулы для вычисления, мультипликативность. Дружественные и совершенные числа. Формула для чётных совершенных чисел (теорема Евклида). Функция Эйлера: определение и вычисление для простого числа p и $p^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}$.

Раздел 2. Отношение сравнимости в кольце целых чисел

2.1. Сравнения и их основные свойства

Отношение сравнимости на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ как отношение эквивалентности. Критерий сравнимости двух целых чисел. Операции над сравнениями по одинаковому модулю: сложение; умножение; возведение в степень; возможность деления на общий делитель, взаимно простой с модулем. Кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Свойства классов вычетов. Число классов вычетов по модулю m и число классов вычетов, взаимно простых с m, по модулю m. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_m$ как группа классов вычетов, взаимно простых с модулем m, её порядок.

2.2. Полная и приведенная системы вычетов

Полная и приведенная системы вычетов. Свойства полной и приведенной систем вычетов, число элементов. Признаки полной и приведенной систем вычетов. Мультипликативность функции Эйлера, формула для её вычисления.

2.3. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера

Малая теорема Ферма и теорема Эйлера, примеры использования при решении задач. Теорема Вильсона.

2.4. Линейные сравнения и системы сравнений

Линейные сравнения (сравнения первой степени) с одной неизвестной $ax \equiv b \ (mod\, m)$, $a \not\equiv 0 \ (mod\, m)$, критерий разрешимости и число решений, общий вид и структура решения в зависимости от значения $\text{НОД}(a, m)$. Методы решения линейных сравнений: подбор, преобразование коэффициентов, использование теоремы Эйлера и свойств подходящих дробей. Применение линейных сравнений для решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными: нахождение частного решения. Системы линейных сравнений: эквивалентные преобразования. Китайская теорема об остатках.

2.5. Первообразные корни и индексы

Порядок (показатель) числа и первообразные корни по данному модулю. Существование первообразного корня по простому модулю. Свойства порядков. Приведенная система вычетов по простому модулю, состоящая из степеней первообразного корня. Индексы по простому модулю и их свойства. Составление таблиц индексов для простых модулей. Решение линейных сравнений с использованием таблиц индексов.

2.6. Квадратичные вычеты и символ Лежандра

Двучленные сравнения: критерий разрешимости и число решений. Критерий существования корня степени n по простому модулю p в поле $\mathbb{Z}_p$. Показательное двучленное сравнение и его решение с помощью индексирования. Квадратичные вычеты по простому модулю p и решение двучленного сравнения $x^2 \equiv a \ (mod\, p)$. Число классов квадратичных вычетов по нечётному простому модулю. Критерий Эйлера. Символ Лежандра и его свойства.

2.7. Арифметические приложения теории сравнений: преобразование несократимой обыкновенной дроби в периодическую дробь; признаки делимости

Десятичные дроби. Чистые и смешанные бесконечные периодические дроби. Представление рациональных чисел в виде периодических десятичных дробей. Критерий представимости рационального числа в виде конечной десятичной дроби. Длина периода чистой периодической дроби. Длина предпериода и длина периода смешанной периодической дроби. Правила обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь. Представление чисел в различных системах счисления (систематические числа) и операции над ними, переход из одной системы счисления в другую. Общий признак делимости (равноостаточности) Паскаля. Признаки делимости на 2, 3, 9, 11. Признак делимости на составное число.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
(дневная форма получения образования)

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов: лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа студента	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литература	Форма контроля знаний
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	7 семестр							
1	**Отношение делимости в кольце целых чисел**	**12**	**14**		**26**			
1.1	**Свойства делимости целых чисел. Простые и составные числа**	**2**	**2**		**4**			
	Свойства делимости целых чисел. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких целых чисел. Взаимно простые и попарно взаимно простые числа. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики. Решето Эратосфена для построения таблиц простых чисел. Важнейшие примеры простых чисел: простые числа Мерсенна и простые числа Ферма.	2				Материалы в электрон-ном виде	[1-4, 7, 12]	Коллоквиум, устный опрос
	Свойства делимости целых чисел. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное		2		4		[5, 11]	Выполнение заданий

	нескольких целых чисел. Взаимно простые и попарно взаимно простые числа. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики. Решето Эратосфена для построения таблиц простых чисел.							
1.2	**Конечные цепные дроби. Подходящие дроби**	**2**	**2**		**4**			
	Конечные цепные дроби. Единственность представления рационального числа в виде конечной цепной дроби, взаимосвязь с алгоритмом Евклида. Подходящие дроби и их свойства: рекуррентные формулы для вычисления подходящих дробей; несократимость подходящих дробей; линейное представление наибольшего общего делителя двух целых чисел; возрастающая последовательность чётных подходящих дробей и убывающая последовательность нечётных подходящих дробей.	2					[1-4, 8, 12]	Коллоквиум, устный опрос
	Конечные цепные дроби, взаимосвязь с алгоритмом Евклида. Подходящие дроби и их свойства.		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий
1.3	**Кольцо целых гауссовых чисел**	**2**	**2**		**4**			
	Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. Норма целого гауссова числа и её свойства. Мультипликативность нормы. Представление произведения чисел в виде суммы двух квадратов. Делители единицы, тривиальные делители. Ассоциированные числа и их	2				Материалы в электрон-ном виде	[7, 12]	

	геометрическая интерпретация. Теорема о делении с остатком в $\mathbb{Z}[i]$. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух целых гауссовых чисел. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя. Теорема о существовании наибольшего общего делителя и его линейном представлении.							
	Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. Представление произведения чисел в виде суммы двух квадратов. Ассоциированные числа и их геометрическая интерпретация. Деление с остатком в $\mathbb{Z}[i]$. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя (НОД). Линейное представление НОД. Наименьшее общее кратное двух целых гауссовых чисел.		2		4	Индивиду-альные задания	[12]	Выполнение заданий
1.4	**Простые гауссовы числа**	**2**	**2**		**4**			
	Простые гауссовы числа и их свойства. Аналог основной теоремы арифметики в $\mathbb{Z}[i]$: представление целых гауссовых чисел в виде произведения простых гауссовых чисел. Описание всех простых гауссовых чисел: $(1+i)$, простые натуральные числа вида $p = 4k+3, k \in \mathbb{N}$, и ассоциированные с ними; множители $a+bi$ простого натурального числа	2				Материалы в электрон-ном виде	[7, 12]	

	$p = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$. Алгоритм факторизации (разложения на простые множители) в $\mathbb{Z}[i]$.							
	Простые гауссовы числа и их свойства. Представление целых гауссовых чисел в виде произведения простых гаусcсовых чисел. Алгоритм факторизации в $\mathbb{Z}[i]$.		2		4	Индивиду-альные задания	[12]	Выполнение заданий
1.5	**Диофантовы уравнения**	**2**	**4**		**6**			
	Диофантовы уравнения Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными, критерий существования решения. Общее решение неоднородного линейного диофантова уравнения как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения. Алгоритм решения линейных диофантовых уравнений. Нелинейные диофантовы уравнения. Уравнение Ферма, геометрическая интерпретация, формулы для нахождения пифагоровых троек. Уравнение Пелля, фундаментальное решение, формулы для нахождения решений. Некоторые методы решения нелинейных диофантовых уравнений: разложение на множители, испытание остатков.	2					[1-4, 7, 10, 12]	
	Линейные диофантовы уравнения Общее решение неоднородного линейного диофантова уравнения как сумма общего решения соответствующего однородного		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 6, 10,11]	Выполнение заданий

	уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения. Алгоритм решения линейных диофантовых уравнений.							
	Нелинейные диофантовы уравнения Уравнение Ферма, геометрическая интерпретация, формулы для нахождения пифагоровых троек. Уравнение Пелля, фундаментальное решение, формулы для нахождения решений. Некоторые методы решения нелинейных диофантовых уравнений: разложение на множители, испытание остатков.		2		2	Индивиду-альные задания	[5, 6, 10,11]	Выполнение заданий
1.6	**Числовые функции**	**2**	**2**		**4**			
	Целая часть числа и её свойства. Формула для вычисления наибольшего показателя, с которым простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$. Число $\tau(n)$ и сумма $\sigma(n)$ натуральных делителей натурального числа n: формулы для вычисления, мультипликативность. Дружественные и совершенные числа. Формула для чётных совершенных чисел (теорема Евклида). Функция Эйлера: определение и вычисление для простого числа p и $p^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}$.	2					[1-4, 7, 12]	
	Целая часть числа и её свойства. Вычисление наибольшего показателя, с которым простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$. Число $\tau(n)$ и сумма $\sigma(n)$ натуральных		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Рейтинговая работа № 1

	делителей натурального числа n. Дружественные и совершенные числа. Функция Эйлера: определение и вычисление для простого числа p и $p^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}$.							
2	**Отношение сравнимости в кольце целых чисел**	**20**	**20**		**36**			
2.1	**Сравнения и их основные свойства**	**2**	**2**		**4**			
	Отношение сравнимости на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ как отношение эквивалентности. Критерий сравнимости двух целых чисел. Операции над сравнениями по одинаковому модулю. Кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Свойства классов вычетов. Число классов вычетов по модулю m и число классов вычетов, взаимно простых с m, по модулю m. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_m$ как группа классов вычетов, взаимно простых с модулем m, её порядок.	2					[1-4, 7, 12]	
	Операции над сравнениями по одинаковому модулю. Кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Свойства классов вычетов. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_m$ как группа классов вычетов,		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий

	взаимно простых с модулем m.							
2.2	**Полная и приведенная системы вычетов**	**2**	**2**		**4**			
	Свойства полной и приведенной систем вычетов, число элементов. Признаки полной и приведенной систем вычетов. Мультипликативность функции Эйлера, формула для её вычисления.	2					[1-4, 7, 12]	
	Свойства полной и приведенной систем вычетов, число элементов. Признаки полной и приведенной систем вычетов. Вычисление функции Эйлера.		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий
2.3	**Малая теорема Ферма и теорема Эйлера**	**2**	**2**		**4**			
	Малая теорема Ферма и теорема Эйлера. Теорема Вильсона.	2					[1-4, 7, 12]	
	Использование малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера при решении задач. Теорема Вильсона.		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий
2.4	**Линейные сравнения и системы сравнений**	**4**	**4**		**6**			
	Линейные сравнения с одной неизвестной Линейные сравнения с одной неизвестной $ax \equiv b \ (mod\ m)$, $a \not\equiv 0 \ (mod\ m)$, критерий разрешимости и число решений, общий вид и структура решения в зависимости от значения НОД(a, m). Методы решения линейных сравнений. Применение линейных сравнений для решения линейных диофантовых уравнений с	2					[1-4, 7, 12]	

	двумя неизвестными: нахождение частного решения.							
	Линейные сравнения с одной неизвестной Решение линейных сравнений с одной неизвестной: подбор, преобразование коэффициентов, использование теоремы Эйлера и свойств подходящих дробей. Нахождение частного решения линейного диофантова уравнения с двумя неизвестными с использованием свойств линейных сравнений.		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий
	Системы линейных сравнений Системы линейных сравнений: эквивалентные преобразования. Китайская теорема об остатках.	2					[1-4, 7, 12]	
	Системы линейных сравнений Эквивалентные преобразования систем линейных сравнений. Решение систем линейных сравнений. Китайская теорема об остатках.		2		2	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Рейтинговая работа № 2
2.5	**Первообразные корни и индексы**	**4**	**4**		**6**			
	Первообразные корни Порядок числа и первообразные корни по данному модулю. Существование первообразного корня по простому модулю. Свойства порядков. Приведенная система вычетов по простому модулю, состоящая из степеней первообразного корня.	2					[1-4, 7, 12]	
	Первообразные корни Порядок числа и первообразные корни по данному модулю. Свойства порядков. Приведенная система вычетов по простому		2		2	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий

	модулю, состоящая из степеней первообразного корня.							
	Индексы по простому модулю Индексы по простому модулю и их свойства. Составление таблиц индексов для простых модулей. Решение линейных сравнений с использованием таблиц индексов.	2					[1-4, 7, 12]	
	Индексы по простому модулю Индексы по простому модулю и их свойства. Составление таблиц индексов для простых модулей. Решение линейных сравнений с использованием таблиц индексов.		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий
2.6	**Квадратичные вычеты и символ Лежандра**	**2**	**2**		**6**			
	Двучленные сравнения: критерий разрешимости и число решений. Критерий существования корня степени n по простому модулю p в поле $\mathbb{Z}_p$. Показательное двучленное сравнение и его решение с помощью индексирования. Квадратичные вычеты по простому модулю p и решения двучленного сравнения $x^2 \equiv a\ (mod\ p)$. Число классов квадратичных вычетов по нечётному простому модулю. Критерий Эйлера. Символ Лежандра и его свойства.	2					[1, 2, 7, 12]	
	Решение двучленных сравнений. Критерий существования корня степени n по простому модулю p в поле $\mathbb{Z}_p$. Решение показательного		2		6	Индивиду-альные задания	[5,11]	Выполнение заданий

	двучленного сравнения с помощью индексирования. Квадратичные вычеты по простому модулю p и решения двучленного сравнения $x^2 \equiv a \ (mod\ p)$. Число классов квадратичных вычетов по нечётному простому модулю. Вычисление символа Лежандра.							
2.7	**Арифметические приложения теории сравнений**	**4**	**4**		**6**			
	Арифметические приложения теории сравнений: преобразование несократимой обыкновенной дроби в периодическую дробь Десятичные дроби. Чистые и смешанные бесконечные периодические дроби. Представление рациональных чисел в виде периодических десятичных дробей. Критерий представимости рационального числа в виде конечной десятичной дроби. Длина периода чистой периодической дроби. Длина предпериода и длина периода смешанной периодической дроби. Правила обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь.	2					[1, 4, 12]	
	Арифметические приложения теории сравнений: преобразование несократимой обыкновенной дроби в периодическую дробь Десятичные дроби. Чистые и смешанные бесконечные периодические дроби. Представление рациональных чисел в виде периодических десятичных дробей. Критерий		2		4	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Рейтинговая работа № 3

	представимости рационального числа в виде конечной десятичной дроби. Длина периода чистой периодической дроби. Длина предпериода и длина периода смешанной периодической дроби. Правила обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь.							
	Арифметические приложения теории сравнений: признаки делимости Представление чисел в различных системах счисления (систематические числа) и операции над ними, переход из одной системы счисления в другую. Общий признак делимости (равноостаточности) Паскаля. Признаки делимости на 2, 3, 9, 11. Признак делимости на составное число.	2					[1, 4, 9, 12]	
	Арифметические приложения теории сравнений: признаки делимости Представление чисел в различных системах счисления (систематические числа) и операции над ними, переход из одной системы счисления в другую. Общий признак делимости (равноостаточности) Паскаля. Частные признаки делимости.		2		2	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий
	Всего:	**32**	**34**		**62**			**экзамен**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА
(заочная форма получения образования)

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов				Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Литература	Форма контроля знаний
		лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа студента			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9 семестр								
1	**Отношение делимости в кольце целых чисел**	**3**	**4**		**46**			
1.1	**Свойства делимости целых чисел. Простые и составные числа. Конечные цепные дроби. Подходящие дроби**	**1**	**1**		**12**			
	Свойства делимости целых чисел. Простые и составные числа. Решето Эратосфена для построения таблиц простых чисел. Конечные цепные дроби. Единственность представления рационального числа в виде конечной цепной дроби, взаимосвязь с алгоритмом Евклида. Подходящие дроби и их свойства.	1			6	Материалы в электронном виде	[1-4, 7, 8, 12]	Устный опрос
	Свойства делимости целых чисел. Наибольший		1		6		[5, 11]	Выполнение

	общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких целых чисел. Взаимно простые и попарно взаимно простые числа. Простые и составные числа. Решето Эратосфена для построения таблиц простых чисел. Конечные цепные дроби, взаимосвязь с алгоритмом Евклида. Подходящие дроби и их свойства.							заданий
1.2	**Кольцо целых гауссовых чисел. Простые гауссовы числа**	**1**	**1**		**16**			
	Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. Мультипликативность нормы. Представление произведения чисел в виде суммы двух квадратов. Ассоциированные числа и их геометрическая интерпретация. Теорема о делении с остатком в $\mathbb{Z}[i]$. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя. Теорема о существовании наибольшего общего делителя и его линейном представлении. Простые гауссовы числа и их свойства. Описание всех простых гауссовых чисел. Алгоритм факторизации в $\mathbb{Z}[i]$.	1			8	Материалы в электрон-ном виде	[7, 12]	
	Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. Представление произведения чисел в виде суммы двух квадратов. Ассоциированные числа и их геометрическая интерпретация. Деление с остатком в $\mathbb{Z}[i]$. Алгоритм Евклида для		1		8	Индивиду-альные задания	[12]	Выполнение заданий

	нахождения наибольшего общего делителя (НОД). Линейное представление НОД. Наименьшее общее кратное двух целых гауссовых чисел. Простые гауссовы числа и их свойства. Алгоритм факторизации в $\mathbb{Z}[i]$.							
1.3	**Диофантовы уравнения**	**1**	**1**		**10**			
	Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными, критерий существования решения. Алгоритм решения линейных диофантовых уравнений. Нелинейные диофантовы уравнения. Уравнение Ферма, геометрическая интерпретация, формулы для нахождения пифагоровых троек. Уравнение Пелля, фундаментальное решение, формулы для нахождения решений. Некоторые методы решения нелинейных диофантовых уравнений.	1			5		[1-4, 7, 10, 12]	
	Общее решение неоднородного линейного диофантова уравнения как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения. Алгоритм решения линейных диофантовых уравнений. Уравнение Ферма. Уравнение Пелля. Некоторые методы решения нелинейных диофантовых уравнений.		1		5	Индивиду-альные задания	[5, 6, 10,11]	Выполнение заданий
1.4	**Числовые функции**		**1**		**8**			
	Целая часть числа и её свойства. Формула для вычисления наибольшего показателя, с которым		1		8	Индивиду-альные задания	[1-5, 7, 11, 12]	Выполнение заданий

	простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$. Число $\tau(n)$ и сумма $\sigma(n)$ натуральных делителей натурального числа n: формулы для вычисления, мультипликативность. Дружественные и совершенные числа. Формула для чётных совершенных чисел (теорема Евклида). Функция Эйлера: определение и вычисление для простого числа p и $p^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$.							
2	**Отношение сравнимости в кольце целых чисел**	**20**	**20**		**36**		**[5, 11]**	
2.1	**Сравнения и их основные свойства. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера**	**1**	**1**		**24**			
	Отношение сравнимости на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ как отношение эквивалентности. Критерий сравнимости двух целых чисел. Операции над сравнениями по одинаковому модулю. Кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_m$, уё порядок. Признаки полной и приведенной систем вычетов. Мультипликативность функции Эйлера, формула для её вычисления. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера. Теорема Вильсона.	1			12		[1-4, 7, 12]	
	Операции над сравнениями по одинаковому		1		12	Индивиду-альные	[5, 11]	Выполнение заданий

	модулю. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_m$. Признаки полной и приведенной систем вычетов. Вычисление функции Эйлера. Использование малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера при решении задач.				задания		
2.2	**Линейные сравнения и системы сравнений**	**1**	**2**		**10**			
	Линейные сравнения с одной неизвестной $ax \equiv b \ (mod\, m)$, $a \not\equiv 0 \ (mod\, m)$, критерий разрешимости и число решений, общий вид и структура решения в зависимости от значения $\text{НОД}(a, m)$. Методы решения линейных сравнений. Применение линейных сравнений для решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными: нахождение частного решения. Системы линейных сравнений: эквивалентные преобразования. Китайская теорема об остатках.	1			4		[1-4, 7, 12]	
	Решение линейных сравнений с одной неизвестной: подбор, преобразование коэффициентов, использование теоремы Эйлера и свойств подходящих дробей. Нахождение частного решения линейного диофантова уравнения с двумя неизвестными с использованием свойств линейных сравнений. Эквивалентные преобразования систем линейных сравнений. Решение систем линейных сравнений. Китайская теорема об остатках.		2		6	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий

2.3	**Первообразные корни и индексы**	**1**	**1**		**10**			
	Порядок числа и первообразные корни по данному модулю. Существование первообразного корня по простому модулю. Свойства порядков. Приведенная система вычетов по простому модулю, состоящая из степеней первообразного корня. Индексы по простому модулю и их свойства. Составление таблиц индексов для простых модулей.	1			4		[1-4, 7, 12]	
	Порядок числа и первообразные корни по данному модулю. Свойства порядков. Приведенная система вычетов по простому модулю, состоящая из степеней первообразного корня. Составление таблиц индексов для простых модулей. Решение линейных сравнений с использованием таблиц индексов.		1		6	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий
2.4	**Квадратичные вычеты и символ Лежандра**	**1**	**1**		**10**			
	Двучленные сравнения: критерий разрешимости и число решений. Показательное двучленное сравнение. Квадратичные вычеты по простому модулю p и решения двучленного сравнения $x^2 \equiv a \ (mod\ p)$. Критерий Эйлера. Символ Лежандра и его свойства.	1			4		[1, 2, 7, 12]	
	Решение двучленных сравнений. Решение показательного двучленного сравнения с помощью индексирования. Квадратичные вычеты по простому модулю. Вычисление		1		6	Индивиду-альные задания	[5,11]	Выполнение заданий

	символа Лежандра.							
2.5	**Арифметические приложения теории сравнений**	**1**	**1**		**10**			
	Чистые и смешанные бесконечные периодические дроби. Представление рациональных чисел в виде периодических десятичных дробей. Длина периода чистой периодической дроби. Правила обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь. Представление чисел в различных системах счисления (систематические числа) и операции над ними, переход из одной системы счисления в другую. Общий признак делимости (равноостаточности) Паскаля. Признаки делимости на 2, 3, 9, 11. Признак делимости на составное число.	1			4		[1, 4, 9, 12]	
	Представление рациональных чисел в виде периодических десятичных дробей. Длина периода чистой периодической дроби. Правила обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь. Представление чисел в различных системах счисления и операции над ними, переход из одной системы счисления в другую. Общий признак делимости Паскаля. Частные признаки делимости.		1		6	Индивиду-альные задания	[5, 11]	Выполнение заданий
	Всего:	**8**	**10**		**110**			**экзамен**

ИНФОРМАЦИОННО – МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Бухштаб, А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – СПб.: Лань, 2008.

2. Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – СПб.: Лань, 2009.

3. Ильиных, А.П. Теория чисел: учебное пособие / А.П. Ильиных. – Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2003.

4. Нестеренко, Ю.В. Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю.В. Нестеренко. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.

5. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. – СПб.: Лань, 2008.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

6. Базылев, Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения / Д.Ф. Базылев. – Минск: НТЦ «АПИ», 1999.

7. Бейкер, А. Введение в теорию чисел / А. Бейкер. – Минск: Вышэйшая школа, 1995.

8. Бескин, Н.М. Замечательные дроби / Н.М. Бескин. – Минск: Вышэйшая школа, 1980.

9. Воробьев, Н.Н. Признаки делимости / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1988.

10. Гельфонд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гельфонд. – М.: Либроком, 2010.

11. Деза, Е.И. Сборник задач по теории чисел / Е.И. Деза, Л.В. Котова. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.

12. Матысик, О.В. Теория чисел / О.В. Матысик, А.А. Трофимук. – Брест: Изд-во БрГУ, 2013.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В процессе изучения учебной дисциплины «Теория чисел» большое внимание уделяется организации управляемой самостоятельной работы студентов, как при изучении теоретических вопросов, так и при выполнении практических заданий.

Самостоятельная работа студентов реализуется как в процессе аудиторных занятий (на лекциях, практических занятиях), так и на консультациях, при выполнении индивидуальных заданий и проектов в мини-группах и т.д.

Формы самостоятельной работы студентов:

– выполнение индивидуальных заданий, направленных на развитие у студентов самостоятельности и методической компетенции;

– выполнение обучающих и контрольных заданий.

Основными задачами самостоятельной работы студентов являются:

– углубление знаний и умений студентов, полученных в результате запланированных учебных занятий;

– формирование когнитивных компетенций;

– подготовка студентов к занятиям, к мероприятиям промежуточного и итогового контроля;

– формирование навыков самостоятельной научно-исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студентов проводится в предусмотренном учебным планом объёме.

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ

Для текущего контроля и самоконтроля знаний и умений студентов по учебной дисциплине «Теория чисел» можно использовать следующий диагностический инструментарий:

– проведение коллоквиумов;

— проведение текущих устных опросов по отдельным темам учебной дисциплины;

– блиц-опрос при обсуждении плана решения задачи и отдельных пунктов плана;

– организация взаимопомощи студентов при самостоятельном решении задач проблемного характера;

–презентации студентов по результатам выполнения индивидуальных заданий в мини-группах;

– контроль ведения рабочих тетрадей.

Текущий контроль успеваемости проводится в форме устного или письменного опроса на практических занятиях.

Типовым учебным планом в качестве формы итогового контроля по учебной дисциплине «Теория чисел» предусмотрен экзамен.

По каждому разделу программы рекомендуется проведение коллоквиума.

С целью текущего контроля предусматривается проведение двух контрольных работ.

Для контроля и самоконтроля знаний и умений студента по отдельным темам или разделам представляется целесообразным использование тестовых технологий.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

№ разделов, тем	Название разделов и тем	Количество часов		
		Аудиторные		
		всего	лекции	практ. занятия
1	2	3	4	5
1	**Отношение делимости в кольце целых чисел**			
1.1	Свойства делимости целых чисел. Простые и составные числа	4	2	2
1.2	Конечные цепные дроби. Подходящие дроби	4	2	2
1.3	Кольцо целых гауссовых чисел	4	2	2
1.4	Простые гауссовы числа	4	2	2
1.5	Диофантовы уравнения	4	2	4
1.6	Числовые функции	4	2	2
	ВСЕГО:	**24**	**12**	**14**
2	**Отношение сравнимости в кольце целых чисел**			
2.1	Сравнения и их основные свойства	4	2	2
2.2	Полная и приведенная системы вычетов	4	2	2
2.3	Малая теорема Ферма и теорема Эйлера	4	2	2
2.4	Линейные сравнения и системы сравнений	8	4	4
2.5	Первообразные корни и индексы	8	4	4
2.6	Квадратичные вычеты и символ Лежандра	4	2	2
2.7	Арифметические приложения теории сравнений	8	4	4
	ВСЕГО:	**42**	**20**	**20**
	ИТОГО:	**66**	**32**	**34**