У. А. ШЫЛІНЕЦ
Міжнародны ўніверсітэт «МІТСО» (г. Мінск, Рэспубліка Беларусь)

АБ РЭДУЦЫРАВАННІ ДА КАНАНІЧНАГА ВЫГЛЯДУ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ

У шэрагу прац [1–4] пры дапамозе фармальных вытворных [5] лінейныя сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных рэдуцыруюцца да кананічнага выгляду.

У дадзенай працы разглядаецца сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў, адрозная ад раней вывучаемых:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= B_1 \frac{\partial v}{\partial x} + B_2 \frac{\partial v}{\partial y} + M_1 u + N_1 v + F_1 u^2 + E_1 v^2 + C_1 uv, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= B_3 \frac{\partial v}{\partial x} + B_4 \frac{\partial v}{\partial y} + M_2 u + N_2 v + F_2 u^2 + E_2 v^2 + C_2 uv, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

дзе $B_k, M_i, N_i, F_i, E_i, C_i$ (u,v) – вядомыя (шуканыя) функцыі класса $C^1(D)(C^2(D)); k=1,...,4; i=1,2$.

Праз $C^k(D)$ абазначаем клас рэчаісных або камплексных функцый ад x, y, якія маюць непарыўныя вытворныя да k–га парадку ўключна ў некаторым адназвязным абсягу D.

Даследавалася наступная задача: пры наяўнасці сістэмы выгляду (1) знайсці неабходныя і дастатковыя ўмовы, пры якіх існуюць такія функцыі $p, q \in C^2(D)$, што сістэма (1) рэдуцыруецца да выгляду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= a_1 f + a_2 f^2 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + c_1 f\varphi, \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= a_3 f + a_4 f^2 + b_3\varphi + b_4\varphi^2 + c_2 f\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

дзе f, φ – лінейныя функцыі ад u, v з каэфіцыентамі класа $C^1(D)$; a_k, b_k, c_j $(k=1,...,4; j=1,2)$ – вядомыя функцыі таго ж класа; $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}$ –фармальныя вытворныя, вызначаемыя роўнасцямі

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p} &\equiv \frac{1}{\delta}(f'_x q'_y - f'_y q'_x),\\ \frac{\partial f}{\partial q} &\equiv \frac{1}{\delta}(f'_y p'_x - f'_x p'_y),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

дзе $\delta = \begin{vmatrix} p'_x & p'_y \\ q'_x & q'_y \end{vmatrix}$.

Сістема (2), на падставе (3), можа быць запісанай у выглядзе:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= A_1\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + T_1 f + \Theta_1\varphi + \Phi_1 f^2 + Q_1\varphi^2 + K_1 f\varphi,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= A_3\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_4\frac{\partial \varphi}{\partial y} + T_2 f + \Theta_2\varphi + \Phi_2 f^2 + Q_2\varphi^2 + K_2 f\varphi,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

дзе

$$T_1 = a_1 p'_x + a_3 q'_x,\ T_2 = a_1 p'_y + a_3 q'_y,\ \Theta_1 = b_1 p'_x + b_3 q'_x,\ \Theta_2 = b_1 p'_y + b_3 q'_y,$$

$$\Phi_1 = a_2 p'_x + a_4 q'_x,\ \Phi_2 = a_2 p'_y + a_4 q'_y,\quad Q_1 = b_2 p'_x + b_4 q'_x,\ Q_2 = b_2 p'_y + b_4 q'_y,$$

$$K_1 = c_1 p'_x + c_2 q'_x,\ K_2 = c_1 p'_y + c_2 q'_y,$$

$$-A_1 = \frac{p'_x p'_y}{\delta},\ -A_1 = A_4,\ A_2 = \frac{(p'_x)^2}{\delta},\ -A_3 = \frac{(p'_y)^2}{\delta}.$$

Даказана наступная тэарэма.

Тэарэма 1. Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў (4) зводзіцца да сістэмы выгляду (2) тады і толькі тады, калі выконваюцца ўмовы:

$$-A_1 = A_4,\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Высветлены таксама ўмовы пераўтварэння сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў (1) да сістэмы выгляду (4).

Тэарэма 2. Сістэма (1) зводзіцца да сістэмы (4) пры дапамозе лінейнай падстаноўкі $u = f + \sigma\varphi$, $v = \varphi$ тады і толькі тады, калі $D = \sigma^2$, дзе

$$\sigma = \frac{B_1 + B_4}{2}, D = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

Спіс скарыстаных крыніц

1. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. – М.: Физматгиз, 1959.– 628 с.
2. Стельмашук, Н.Т. О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н.Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – Т. 5. – № 1. – С. 166–173.
3. Стэльмашук, М.Т. Рэдуцыраванне адной сістэмы раўнанняў у частковых вытворных да кананічнага выгляду пры дапамозе двайных функцый / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2005. – № 1. – С. 21–23.
4. Стельмашук, Н.Т. О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 61–65.
5. Гусев, В.А. Об одном обобщении ареолярных производных / В.А. Гусев // Bul. Stiint. si Tehnic Inst. Pol. Timisoara. – 1962. – T. 7. – F. 2. – P. 223–238.