

УДК 91.502:338.504

Коротун С. І., к.геогр.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Каропа Г. М., к.пед.н., доцент** (Гомельський державний університет ім. Ф. Скорини, м. Гомель)

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І КАТЕГОРІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ХАОСА

У статті розглядаються основні положення математичної теорії хаосу, уточнюються деякі її поняття і категорії, розкриваються можливості застосування теорії хаосу в сучасних географічних, економічних і психолого-педагогічних дослідженнях.

В статье рассматриваются основные положения математической теории хаоса, уточняются ее некоторые понятия и категории, раскрываются возможности применения теории хаоса в современных географических, экономических и психолого-педагогических исследованиях.

The substantive provisions of mathematical theory of chaos are examined in the article, specified her some concepts and categories, possibilities of application of theory of chaos open up in modern geographical, economical, psychological and pedagogical researches.

Теорія хаосу – окрема наукова методологія, що використовує математичний апарат для опису поведінки деяких нелінійних динамічних систем, які за певних умов набувають стану, відомого в науці як хаос [1, 4, 7].

Ця нова область наукових досліджень, що використовує загальні математичні принципи і комп'ютерне моделювання, об'єднує філософію, математику, природознавство і теорію освіти, відкриває нові шляхи пізнання світу природи, суспільства і людини.

Теорія хаосу, розвиваючи деякі принципово нові моделі інноваційного творчого мислення, може стати дуже зручною науковою парадигмою для розуміння і пояснення багатьох проблем сучасного розвитку суспільства, як з географічної та екологічної, так і з економічної точок зору.

Теорія хаосу почала зароджуватися ще в XIX столітті, проте дійсний науковий розвиток вона отримала в другій половині XX століття, разом з роботами Едварда Лоренца (Edward Lorenz) з Массачусетського технологічного інституту і франко-американського математика Бенуа Б. Мандельброта (Benoit B. Mandelbrot).

Едвард Лоренц свого часу (початок 60-х років XX століття, робота опублікована в 1963 році) розглядав причини складності прогнозування погоди. Відмітимо, що до появи роботи Лоренца в науковому середовищі панували дві думки відносно можливості точного прогнозування погоди на нескінченно тривалий термін.

Перший підхід був сформульований в 1776 році французьким математиком Пьером Симоном Лапласом. Він стверджував, що: "Якщо ми уявимо собі розум, який в цю мить досягнув усі зв'язки між об'єктами у Всесвіті, то він зможе визначати відповідне положення, рух і загальні взаємодії усіх цих об'єктів у будь-який час у минулому або в майбутньому". Таким чином, Лаплас і прибічники його теорії говорили, що для точного прогнозування погоди необхідно тільки зібрати більше інформації про усі частки у Всесвіті, їх місце розташування, швидкість, масу, напрям руху, прискоренні тощо. Лаплас вважав, що чим більше людина матиме інформації, тим точніше буде її прогноз відносно майбутнього.

Другий підхід відносно можливості прогнозування погоди був сформульований іншим французьким математиком Жюлем Анрі Пуанкаре. У 1903 році він сказав: "Якби ми точно знали закони природи і положення Всесвіту в початковий момент, ми могли б точно передбачити положення того ж Всесвіту в наступний момент. Але навіть, якщо б закони природи відкрили нам усі свої таємниці, ми і тоді могли б тільки наближено знати початкове положення. Якби це дозволило нам передбачити наступне положення з тим же наближенням, це було б все, що нам потрібно, і ми могли б сказати, що явище було передбачене, що воно керується законами. Але це не завжди так: може статися, що малі відмінності у вихідних умовах викличуть дуже великі відмінності в кінцевому положенні явища. Мала помилка на початку породить величезну помилку в кінці. Прогноз стає неможливим, і ми маємо справу з явищем, що розвивається за волею випадку".

У цьому висловлюванні Пуанкаре і полягає постулат теорії хаосу про залежність від початкових умов. Подальший розвиток науки, особливо квантової механіки, спростував детермінізм теорії Лапласа. У 1927 році німецький фізик Вернер Гейзенберг відкрив і сформулював принцип невизначеності. Цей принцип пояснює, чому деякі випадкові явища не підкоряються детермінізму Лапласа. Гейзенберг показав принцип невизначеності на прикладі радіоактивного розпаду ядра. Так, із-за дуже малих розмірів ядра неможливо знати усі процеси, що відбуваються усередині нього. Тому, скільки б ми не збирали інформації про ядро, точно передбачити, коли воно розпадеться - неможливо.

Під теорією хаосу будемо розуміти розділ математики, що вивчає динамічні системи, які є детермінованими (тобто відповідні рівняння не містять випадкових величин чи процесів), однак, які в майбутньому ведуть

себе як випадкові (мають непередбачувану в деякому розумінні поведінку).

Для пояснення хаосу розглянемо рівняння, яке є детермінованим, тому що не містить випадкових величин. $\{ \}$ - це дробова частина.

$$\alpha_{n+1} = \{ M \cdot \alpha_n \} \quad \alpha_0 = 2^{-m} \quad M = 5^{2p+i}$$

Якщо зобразити це на прямій, то утвориться багато точок практично уся пряма буде в точках. По суті це хаос, тому що точки розміщені хаотично, але ж ця система зображається рівнянням, тому це й буде хаотичною системою.

Поняття "Нелінійні динамічні системи". У реальному світі людина має справу не з лінійними строго детермінованими процесами, а з нелінійними системами. Прикладами нелінійних динамічних систем є: атмосфера, гідросфера, біосфера, соціосфера, турбулентні потоки в тропосфері, адіабатичний процес, астеносферні течії, біологічні популяції, ТВК (територіально-виробничі комплекси), соціальні і економічні системи та ін.

У сучасній науці вивчення нелінійних систем, разом з аналітичним дослідженням доступних причинно-наслідкових зв'язків, зазвичай здійснюється за допомогою математичного або комп'ютерного моделювання.

Динамічна система, яка класифікується як хаотична, повинна мати наступні істотні властивості: 1) вона має бути чутливою до початкових умов; 2) вона повинна мати властивість топологічного (просторового) змішування. Крім того, для того, щоб динамічна система була хаотичною, вона має бути нелінійною. Лінійні системи є суворо детермінованими і, отже, вони, як правило, не бувають хаотичними. Згідно з теоремою Пуанкаре-Бендиксона, безперервна динамічна система на площині не може бути хаотичною.

Одне з найуспішніших застосувань теорії хаосу в дослідженнях пов'язане з використанням динамічних систем для розкриття залежності приросту чисельності населення від величини його щільності. Нині теорія хаосу може бути застосовна практично в усіх наукових дослідженнях, де необхідно передбачити деякий "кінцевий" (чи проміжний) стан якого-небудь процесу, враховуючи його первинний ("початковий") стан.

Щоб відрізнити детермінований процес від стохастичного, необхідно пам'ятати, що лінійна детермінована система завжди розвивається по одному і тому ж шляху від вказаної відправної точки. Для перевірки якого-небудь процесу на детермінізм необхідно: по-перше, вибрати тестовий стан; по-друге, знайти декілька подібних або майже подібних станів; по-третє, порівняти їх розвиток в часі.

Детермінована система, як правило, має дуже маленьку похибку (стійкий, постійний результат). В деяких випадках похибка з часом збільшується за експонентою. При цьому величина похибки визначається як від-

мінність між змінами в тестовому і подібному станах. Важливо зазначити, що усі нелінійні стохастичні системи мають безладно розподілену похибку.

Теорія хаосу вивчає нелінійні стохастичні системи, які розвиваються за законами загальної теорії відносності. Ця теорія відкриває нові горизонти в дослідженні не лише географічних, екологічних, економічних, але і психолого-педагогічних проблем, пов'язаних з формуванням основ просторового мислення, у осіб що навчаються.

Поняття "*Чутливість до початкових умов*" і "*ефект метелика*". З точки зору сучасної математичної теорії хаосу чутливість до початкових умов в нелінійній системі означає, що:

по-перше, усі точки, спочатку близько наближені між собою, в майбутньому мають значно відмінні траєкторії;

по-друге, невелика довільна зміна поточної траєкторії може привести до значних змін в її майбутній поведінці.

Ці дві властивості фактично мають на увазі чутливість до початкових умов.

У теорії хаосу чутливість до початкових умов відома як "ефект метелика". Цей термін виник у зв'язку із статтею американського кліматолога Е. Лоренца "Прогнозування: Помах крил метелика у Бразилії викличе торнадо в штаті Техас" (1972 р.). Помах крил метелика символізує дрібні зміни в первинному стані системи, які викликають ланцюжок подій, що ведуть до великомасштабних змін. Якби метелик не плескав крилами, стверджував Лоренц, то траєкторія системи була б зовсім іншою, що в принципі доводить певну лінійність системи. Але дрібні зміни в первинному стані системи можуть і не викликати ланцюжок "катастрофічних" подій. Звідси впливає відомий ефект метелика, який у формулюванні Лоренца звучить як дещо на перший погляд "дивне" питання: "Чи може помах крил в лісах Бразилії викликати торнадо в Техасі"?

У науково-популярних роботах чутливість до початкових умов часто невірно ототожнюється з самим хаосом. Слід зауважити, що межа між чутливістю до первинних умов і реальним хаосом надзвичайно тонка, оскільки ця межа значною мірою залежить від вибору показників виміру і визначення відстаней в конкретній стадії системи.

Наприклад, розглянемо просту динамічну систему, яка неодноразово подвоює свої початкові значення (геометрична прогресія). Прикладом такої динамічної системи є математична модель зростання чисельності народонаселення, запропонована Томасом Мальтусом у 1786 р. За Мальтусом, чисельність населення має тенденцію зростати в геометричній прогресії, в той час, як кількість їжі (засобів існування) може збільшуватися лише в арифметичній прогресії [3]. У географії відомим прикладом динамічних систем є також моделі Римського клубу [10].

Проста динамічна система має чутливу залежність від початкових умов скрізь, оскільки, висловлюючись мовою математики, будь-які дві сусідні точки в початковій стадії згодом випадковим чином виявляться на значній відстані одна від одної. Поведінка простої системи в цілому прогнозована, оскільки усі точки (окрім нуля) мають тенденцію до нескінченності. Така поведінка системи не є топологічним змішуванням.

У сучасних визначеннях хаосу, зазвичай, увага обмежується тільки закритими системами, в яких розширення і чутливість до початкових умов об'єднуються зі змішуванням (накладенням).

Згідно з сучасними науковими уявленнями, найважливішою причиною виникнення хаосу є нестійкість (чутливість) по відношенню до початкових умов і параметрів: незначна зміна початкової умови з часом призводить до скільки завгодно великих змін динаміки системи.

У зв'язку з тим, що початковий стан фізичної системи не може бути заданий абсолютно точно (наприклад, через величезну кількість змінних або ж через обмеження вимірювальних інструментів), то в науковому дослідженні зазвичай розглядають тільки деяку обмежену область початкових умов. Згідно з принципами математичної теорії хаосу, при русі в обмеженій області простору експоненціальна розбіжність з часом близьких орбіт призводить до перемішування початкових точок по усій області.

Після такого перемішування безглуздо говорити про координату частки, але завжди можна спробувати знайти вірогідність її знаходження в деякій заданій точці.

Зворотним, в деякому розумінні, динамічному хаосу являються динамічна рівновага і явища гомеостазу [4].

Поняття "Топологічне змішування". Топологія (від грец. *topos* – місце) – це розділ математики, що вивчає топологічні властивості фігур, тобто властивості, що не змінюються при будь-яких деформаціях, що відбуваються без розривів і склеювань (точніше – при взаємооднозначних і безперервних відображеннях) [11, С. 1352].

Топологічне змішування в теорії хаосу означає таку схему розширення системи, коли одна її область в якійсь стадії розширення накладається на будь-яку іншу область. В результаті такого накладення формується деяка багатовимірна просторова структура. У роботах по теорії хаосу топологічне змішування часто образно представляється як процес змішування двох і більше різноколірних фарб, в результаті якого з'являється фарба абсолютно нового кольору (наприклад, змішування фарб жовтого і червоного кольору дає фарбу коричневого кольору).

Поняття про прості і дивні аттрактори в природі. Надзвичайно важливим поняттям теорії хаосу є "аттрактор" (від англ. *attract* – притягати, притягувати). У теорії хаосу аттрактор – ця безліч станів (точніше – точок

фазового простору) динамічної системи, до якого вона прагне ("притягується") з часом. Це не якась заздалегідь чітко задана мета, але один з можливих (прогнозних) станів.

У географії прикладами аттракторів є пенеплен як кінцева "точка" руйнування гірської країни, шляхи міграції птахів і звірів, що призводять до зміни ареалів їх мешкання і т.п. Проте, в природі бувають і значно складніші приклади аттракторів (наприклад, схеми зародження і переміщення циклонів в тропосфері, господарське освоєння нових регіонів та ін.).

Деякі динамічні системи є хаотичними завжди, але у більшості випадків хаотична поведінка спостерігається тільки в тих випадках, коли параметри системи належать до деякого специфічного підпростору (наприклад, океанічні течії – океану, циклони – атмосфері; атмосфера і океаносфера – підпростори географічної оболонки).

Більшість типів лінійного руху описуються простими аттракторами (обмеженими циклами). Хаотичний же, нелінійний рух, описується дивними аттракторами, які є дуже складними і багатопараметричними. Наприклад, проста тривимірна система погоди описується відомим аттрактором Лоренца – однією з найвідоміших діаграм хаотичних систем, яка і досі є однією з найскладніших.

Теорема Пуанкаре-Бендиксона доводить, що дивний аттрактор може виникнути у безперервній динамічній системі (за умови того, що ця система має три або більше виміри). Рух трьох або більшої кількості тіл, що знаходяться під впливом гравітаційного тяжіння, за деяких початкових умов часто виявляється хаотичним рухом [12].

Логістичне відображення як приклад простої хаотичної системи. Прикладом простих хаотичних систем може служити логістичне відображення, яке описує зміну кількості населення з часом. Логістичне відображення часто наводиться в якості типового прикладу того, як хаотична поведінка може виникати з дуже простих нелінійних динамічних рівнянь. Ще один відомий приклад логістичного відображення – це модель Рікера, що описує динаміку чисельності населення. Згідно з принципами логістичного відображення, прості природні форми (вулкани, хмари, гори, пагорби і т.д.) можуть бути відтворені через систему повторюваних функцій.

Поняття "біфуркація". Узагальнена математична умова виникнення хаосу полягає в тому, що якась система, що безперервно розвивається, повинна мати нелінійні характеристики і в цілому має бути глобально стійкою. В той же час ця система повинна мати хоча б одну нестійку точку рівноваги коливального типу. Наявність нестійкої точки рівноваги спроможна забезпечити можливість "ефекту метелика". До стану хаосу системи можуть приходити різними шляхами. Одним з таких шляхів є біфуркація.

Біфуркація (від латів. *bifurcus* – роздвоєння) – це процес якісного переходу від стану рівноваги до хаосу через послідовну дуже малу зміну пе-

ріодичних точок. При біфуркації відбувається якісна зміна властивостей системи (катастрофічний стрибок), в результаті якого кількість нестримно переходить в якість. Момент стрибка відбувається саме в точці біфуркації. Хаос найчастіше виникає саме через біфуркацію. При переході через точку біфуркації навколо точки рівноваги виникає граничний цикл.

Американський фахівець в галузі фізико-математичних наук Мітчелл Фейгенбаум принцип дії біфуркації показав на прикладі динаміки популяції живих організмів. Спочатку чисельність особин в популяції стійко зростає, наступного року виникає перенаселення і через рік чисельність особин в популяції зменшується (у зв'язку із зубожінням харчових ресурсів, поширенням інфекцій і т. д.). Фейгенбаум неодноразово підкреслював, що звичайним станом еволюціонуючих систем є стан динамічного хаосу, а стабільність – стан тимчасовий [13].

У будь-якій популяції виникає безліч випадкових процесів, пов'язаних як з внутрішніми, так і із зовнішніми по відношенню до популяції чинниками [2, 13]. Стан системи у момент біфуркації є вкрай нестійким і нескінченно малий вплив може привести до критичного вибору подальшого напрямку руху, що є істотною ознакою будь-якої хаотичної системи.

У наукових дослідженнях описано, що біфуркації виникають під час переходу системи від стану видимої стабільності і рівноваги до стану динамічного хаосу. У природі прикладами таких переходів є утворення диму в процесі горіння речовини, перехід води з одного агрегатного стану в інший, витік магми на земну поверхню і утворення лави та ін.

У географії та економіці за допомогою принципу біфуркацій можна у загальних рисах передбачити характер руху, що виникає під час переходу системи з одного стану в якісно новий, а також окреслити область існування системи і оцінити її стійкість.

Поняття про фрактали. Фрактал (лат. *fractus* – подрібнений, зламаний, розбитий) – термін, що означає складну геометричну фігуру, що має властивість самоподібності, тобто складену з декількох частин, кожна з яких подібна до усієї фігури в цілому. Іншими словами, фрактал – це деяка геометрична фігура, певна частина якої повторюється знову і знову, змінюючись не в суті, але лише в розмірах. Звідси слідує принцип самоподіб'я фракталів. Усі фрактали подібні до самих себе, тобто вони схожі на усіх рівнях. У природі існує багато типів фракталів, усі вони проявляють хаотичну поведінку. В цьому відношенні фрактал може розглядатися як одиниця аналізу хаотичної поведінки нелінійної динамічної системи.

Найважливіша властивість усіх фракталів – дробовість. Дробовість є математичним відображенням міри неправильності фрактала. Фактично все, що здається випадковим і неправильним може бути фракталом. У природі прикладами типових фракталів є хмари, вигини русел річок, арреа-

ли розселення рослин і тварин, схили морених і камових пагорбів, вершини гір і т.п.

Фундатором вивчення фракталів є франко-американський математик Бенуа Мандельброт. В середині 1960-х рр. він розробив те, що згодом назвав фрактальною геометрією природи [7].

Мандельброт виходив з положень про те, що: 1) той, хто відштовхується від лінійної перспективи, ніколи не бачитиме реального світу і тим більше не зможе функціонувати у реальному світі з успіхом і прибутком; 2) для того, щоб успішно функціонувати в якій-небудь сфері, необхідно пізнати структуру цієї сфери.

Поняття "самоорганізація". Самоорганізація - процес впорядкування елементів одного рівня в системі за рахунок внутрішніх чинників, без зовнішнього безпосереднього специфічного впливу довкілля (зміна зовнішніх умов найчастіше виявляється стимулюючим початком). Основним результатом самоорганізації є поява одиниці наступного якісного рівня.

Висновки. Теорія хаосу корисна як засіб новітньої інтерпретації наукових даних. Осмислення педагогічної дійсності в системі понять і категорій математичної теорії хаосу дозволяє сформулювати ряд вимог і умов, що пред'являються до процесу навчання взагалі і навчання географії, екології і економіки зокрема.

Сучасна теорія хаосу дозволяє інноваційно підійти до: а) визначення цілей і завдань навчання географії в сучасній вищій і середній загальноосвітній школі; б) відбору змісту освіти; в) конструювання методів і засобів навчання; г) побудови реального процесу формування у студентів та школярів норм дбайливого і відповідального ставлення до навколишнього природного середовища та розвитку регіональної економіки.

З економічної точки зору теорія хаосу передбачає три основні принципи для вивчення ринку:

1. Все у світі рухається шляхом найменшого опору (Ринок подібний до річки, яка обирає своє русло).

2. Шлях найменшого опору визначається структурою, яка завжди обумовлена причинами і зазвичай невидима (поведінку течії можна передбачити шляхом дослідження русла річки. Якщо русло річки глибоке і широкі, течія повільна, якщо неглибоке і вузьке – на річці утворюються буруни і стреміни.).

3. Основна і зазвичай невидима структура завжди може бути визначена і змінена (Ви можете змінити спосіб вашого життя і вашого бізнесу, дослідивши основну структуру вашої справи. Структура визначає поведінку.).

Перша і основна вимога, що висувається математичною теорією хаосу до педагогічної дійсності, полягає в тому, що навчання повинно носити особово-орієнтований характер і бути спрямованим на розкриття творчого потенціалу особи, що навчається. Відповідно, фронтальні підходи, пер-

винно орієнтовані на деякого абстрактного "середнього" слухача, повинні поступово поступатися місцем індивідуальним підходам, які вимагають суворого обліку і послідовної реалізації психолого-вікових і індивідуальних особливостей особистості кожного індивідуума. Теорія і практика навчання повинні носити творчий, розвиваючий характер, а не орієнтуватися на запам'ятовування деякої сукупності предметних відомостей особами, що навчаються.

1. Ахромеева Т. С. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1992. – 544 с.
2. Каропа Г. Н. Биogeография с основами экологии: курс лекций / Г. Н. Каропа. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2010. – 316 с.
3. Каропа Г. Н. История и методология географии : курс лекций / Г. Н. Каропа. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2006. – 278 с.
4. Кузнецов А. П. Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос / А. П. Кузнецов. – Саратов : Колледж, 2000. – 98 с.
5. Кун Т. Структура научных революций: пер. с англ. / Т. Кун. – М. : АСТ, 2009. – 317 с.
6. Малинецкий Г. Г. Нелинейная динамика : Основные понятия / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. – М. : РСС, 2006. – 236 с.
7. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы; пер. с англ. / Б. Мандельброт. – М. : Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 654 с.
8. Мун Ф. Хаотические колебания; пер. с англ. / Ф. Мун. – М. : Мир, 1990. – 312 с.
9. Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов; пер. с англ. / Дж. фон Нейман. – М. : URSS, 2009. – 382 с.
10. Пределы роста : доклад по проекту римского клуба "Сложное положение человечества"; пер. с англ. / Донелла Х. Медоуз, Деннис Л. Медоуз, Йорген Рэндерс, Вильям В. Беренс III. – М. : МГУ, 1991. – 205 с.
11. Советский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 1600 с.
12. Странные аттракторы : сб. статей; пер. с англ. – М. : Мир, 1981. – 251 с.
13. Feigenbaum M. J. Universal Behavior in Nonlinear Systems / M. Feigenbaum // Los Alamos Science. – 1980. – Vol. 1. – No. 1. – P. 4–27.

Рецензент: к.е.н., доцент Іванченко А. М. (НУВГП)