Л.П. ФАЛЬКО
МИТСО (г. Минск, Республика Беларусь)

НАХОЖДЕНИЕ СУММЫ СТЕПЕННОГО РЯДА: МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ

В дидактике как наука об обучении и образовании, их целях, содержании, методах, средствах, организации, достигаемых результатах [1] представлены категории (основные понятия) или структурные компоненты целостного педагогического процесса.

Реформа образования, как в содержательном аспекте, так и в управленческом аспекте опирается на методологию формирования нравственных и волевых качеств и творческое развитие личности обучаемого. Современная педагогика, социальное проектирование, менеджмент системы образования становятся инструментом реформирования и адаптации системы образования к изменяющимся условиям жизни.

Эффективность (качество) каждого нового этапа обучения зависит от продуктивности предыдущего этапа и достигнутых на нём результатов, характера и объёма изучаемого материала, организационно-педагогического воздействия обучающих, обучаемости студентов и времени обучения. Продуктивность обучения зависит от интенсивности обратных связей в системе обучения, обусловленности корректирующих воздействий [2].

Одним из принципов (требований, предписаний) педагогического процесса является сознательность и активность обучения. Практическая реализация данного принципа основана на следующей аксиоме: обучайте так, чтобы студент понимал, что, почему и как нужно делать, и никогда механически не выполнял учебных действий, предварительно и глубоко не осознавая их.

Покажем на примере изучения темы «Степенные ряды. Нахождение суммы степенного ряда» реализацию принципа сознательности и активности обучения.

Функциональный ряд – это ряд, члены которого функции вида: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$

Согласно определению [3]: Функциональный ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ называется степенным рядом; действительные числа $a_n, (n = 0, 1, 2, \cdots,)$ называются его коэффициентами.

Степенные ряды замечательны тем, что их члены $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ являются простейшими многочленами и поэтому суммы этих рядов с любой степенью точности могут быть заменены многочленами – их частичными суммами. Это обуславливает специфические свойства степенных рядов, которыми не обладают другие функциональные ряды.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд становится числовым рядом. Если этот ряд сходится, то точка $x = x_0$ называется точкой сходимости функционального ряда. Множество точек сходимости x ряда называется областью сходимости, а функция $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, как предел частичных сумм, называется суммой ряда.

Свойство о почленном интегрировании: интеграл суммы функционального ряда равен сумме ряда, составленного из интегралов его членов

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

Свойство о почленном дифференцировании: производная суммы ряда равна сумме ряда, составленного из производных его членов

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

Следствие из свойств:

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$, где *S(x)* – сумма ряда, тогда:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x))'_x = v(x) \Rightarrow S(x) = \int_0^x v(x)dx$$

и

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x u(x)dx = v(x) \Rightarrow S(x) = (v(x))'_x$$

Практическое правило: Когда интегрировать, а когда дифференцировать?

Если в степенном ряду степень x^n умножается на многочлен, то сумму ряда нужно интегрировать, до тех пор, пока многочлена со степенью *n* не будет.

Если степень x^n делится на многочлен, содержащий *n*, то сумму ряда следует дифференцировать до тех пор, пока многочлена со степенью *n* не будет.

Методическая особенность изучения данной темы состоит в том, что бесконечную сумму ряда нужно записать в виде функции. Этот момент не учтен в рекомендуемых для студентов пособиях [4, 5]. Проиллюстрируем это на примерах. Запись суммы в виде функции основывается на нахождении суммы геометрической прогрессии:

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q},\text{ при } |q|<1 \text{ ряд сходится.}$$

Примеры:

1. $$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\begin{bmatrix}a=1\\ q=x\end{bmatrix}=\frac{1}{1-x}.$$

2. $$x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\begin{bmatrix}a=x\\ q=x\end{bmatrix}=\frac{x}{1-x}.$$

3. $$x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\begin{bmatrix}a=x^2\\ q=x^2\end{bmatrix}=\frac{x^2}{1-x^2}.$$

4. $$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\begin{bmatrix}a=1\\ q=-x\end{bmatrix}=\frac{1}{1+x}.$$

5. $$1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{2(n-1)}x^{2(n-1)}=\begin{bmatrix}a=1\\ q=-x^2\end{bmatrix}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Применим эти знания для нахождения суммы степенного ряда.

Примеры:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}=\left[\frac{x}{3}=y\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot y^{n-1}=\frac{1}{3}S(y)=S(x)$$

$$S(y)=\left(\frac{y}{1-y}\right)'_y=\frac{y'(1-y)-y(1-y)'}{(1-y)^2}=\frac{1-y+y}{(1-y)^2}=\frac{1}{(1-y)^2},$$

$$S(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{9}{3\cdot(3-x)^2}=\frac{3}{(3-x)^2}\frac{1}{2}.$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=S(x)$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'_x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\cdot x^{2n}}{(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{x^2}{1-x^2}dx=\int_0^x\frac{1-1+x^2}{1-x^2}dx=\int_0^x\frac{1-(1-x^2)}{1-x^2}dx=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}-\int_0^x dx=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-x.$$

Список использованных источников

1. Подласый, И.П. Педагогика. Учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений. – М.: Просвещение: Гуманитарный изд. Центр ВЛАДОС, 1996. – С. 42–71.
2. Сарапулов, В.А. Дидактика: теория и практика обучения: учебное пособие. – Чита: Изд-во ЗабГПУ, 2000. – 288 с.
3. Черняк, А.А., Черняк Ж.А., Доманова Ю.А. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 608 с.: ил.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 608 с.: ил.
5. Шилинец. В.А. Практикум по высшей математике: учеб.-метод. пособие: в 4 ч. / В.А. Шилинец, П.И. Кибалко, В.В. Подгорная. – Минск: Междунар. Ун-т «МИТСО», 2018. – Ч. 4. – 232 с.