О. А. НОВИЦКИЙ
БГУФК (г. Минск, Республика Беларусь)
С. Н. ПАСТУШОНОК
ВАРБ (г. Минск, Республика Беларусь)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В MATHCAD

Стремительное развитие компьютерной техники и программного обеспечения значительно расширило круг пользователей, не обладающих глубокими математическими знаниями, которые могут успешно реализовывать математические методы управления и планирования в различных областях человеческой деятельности, в частности, в спорте. За последние десятки лет появились математические программы, такие как Mathcad, Matlab, Maple и др., позволяющие решать многие задачи без применения сложных и громоздких математических выкладок.

Линейное программирование является частным приемом теории операций и довольно часто применяется при планировании спортивных состязаний.

Рассмотрим решение задачи о назначениях на примере расстановки игроков баскетбольной команды [1]. Для начала ограничимся рассмотрением достаточно простой и не столь уже редкой ситуации. Незадолго до ответственной встречи в команде были заменены не только ряд игроков, но также и тренер. Его место занял новый, недостаточно опытный наставник, к тому же мало знакомый с отдельными игроками и с их возможностями. Перед новым тренером стоит задача: распределить между игроками команды обязанности таким способом, чтобы общая результативность действий всей команды оказалась наибольшей.

Для применения методов исследования операций придадим задаче, сформулированной на вербальном уровне, более точную форму и займемся построением ее математической модели. Если ничего не знать об игроках, то нечего и решать, – можно действовать наугад. Поэтому полезны даже ограниченные сведения. Обычно поступают следующим образом. Членам команды предлагают серию тестов, позволяющих оценить их способности играть центровым, защитником, разводящим, на левом и правом краях. Действия игроков, назовем их A, B, C, D, E, оцениваются в некоторых условных баллах.

Сведем результаты тестирования в таблицу 1.

Таблица 1

Игрок	Защитник	Центровой	Разводящий	Левый крайний	Правый крайний
A	6	8	4	4	2
B	8	9	6	2	6
C	8	6	2	2	2
D	6	2	7	6	6
E	2	6	2	4	2

Чем выше балл, тем предпочтительнее назначение игрока на соответствующее амплуа. Запомним смысл записанных чисел и будем работать с матрицей баллов Г:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Примем естественное предположение (критерий эффективности), согласно которому эффективность игры всей команды определяется суммой баллов, оценивающих игру каждого.

Построим математическую модель задачи о назначениях. Припишем игрокам A, B, C, D, E, соответственно номера i = 1, 2, 3, 4, 5. Аналогично обозначим номерами j=1, 2, 3, 4, 5 обязанности защитника, центрового, разводящего, левого и правого крайних соответственно. Затем введем в рассмотрение 25 неизвестных X_{ij} (i=1,...,5, j =1 ,...., 5), значения которых мы станем интерпретировать как указания о назначении игрока под номером i на выполнение обязанностей типа j. При этом каждая из переменных X_{ij} может принимать лишь одно из двух возможных значений:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если игрок } i \text{ назначен на роль } j, \\ 0, \quad \text{в ином случае.} \end{cases} \qquad (1)$$

Совокупность пока неизвестных величин X_{ij} составляет матрицу назначений

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{45} \\ X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} \end{pmatrix}$$

В каждой строке и каждом столбце матрицы X лишь единственный из элементов равен 1, остальные равны нулю. Это обязательное условие (ограничение) может быть записано в соответствующей форме: сумма всех элементов по каждой строке (столбцу) равна 1:

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} &= 1, \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} &= 1, \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} &= 1, \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} &= 1, \\ X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} &= 1, \end{aligned} \qquad (2)$$

К этому следует присоединить требование неотрицательности неизвестных

$X_{ij} \geq 0$ (i= 1, ...,5; j= 1, ...,5). (3)

Игрок под номером *i*, назначенный на амплуа j, внесет свою долю в общую эффективность Ф(X) в размере $a_{ij} * x_{ij}$. Здесь a_{ij} – элемент соответствующей матрицы баллов Г, расположенный на пересечении ее i-й строки и j-го столбца. Общая эффективность игры команды составит сумму из 25 слагаемых

$\Phi(X) = 6x_{11} + 8x_{12} + ...+ 2x_{55}$. (4)

Поиск матрицы назначений X, доставляющей эффективности Φ(X) наибольшее значение, сводится к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений

$X_{ij} \geq 0$ (i=1,...,5; j=1,...,5)

системы ограничений (1) и (2) выбрать такое, которое придает функции (4) наибольшее значение (оптимизирует Φ(X)).

Сформулированная задача и есть математическая модель задачи о распределении обязанностей в баскетбольной команде (при отсутствии запасных игроков).

Допустим, что игроков в команде n > 5. Тогда введем дополнительно к известным пяти еще k = n – 5 фиктивных амплуа (мест в команде), считая, что на каждом из них тестовый балл a_{ij} (i = 1, .., n; j = 6, 7, ...,n*)* каждого из игроков равен нулю. После такого шага приходим к известной уже задаче о выборе при равном числе претендентов и мест в команде. Возникает математическая модель, отличающаяся от (1) – (4) только числом переменных X_{ij} и числом ограничений.

Решение общей задачи о назначениях может быть осуществлено универсальным симплекс-методом [2]. Однако при большой размерности процесс решения весьма громоздок. Применение ЭВМ значительно облегчает решение [3]. Листинг решения рассмотренной задачи в Mathcad имеет следующий вид:

Ввод конечных значений индексов:

$ORIGIN := 1 \quad m := 5 \quad n := 5 \quad i := 1..m \quad j := 1..n$

Матрица Г и векторы ограничений:

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Целевая функция:

$$\Phi(x) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\Gamma_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Начальные значения:

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Блок решения:

$x \ge 0 \quad x \cdot e1 = A \quad x^T e2 = B \quad sol := \mathrm{Maximize}(\Phi, x)$

Вывод результатов:

$$sol = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Phi(sol) = 33$$

Согласно полученному решению, оптимальная расстановка игроков следующая: A – центровой, B- правый крайний, C – защитник, D – разводящий, E – левый крайний.

Аналогично, по вышеуказанной методике, решается задача при наличии в команде запасных игроков.

Рассмотренное решение можно реализовать в среде Excel, Maple, Matlab и др. Однако, на наш взгляд, применение Mathcad предпочтительнее, благодаря понятному и достаточно простому пользовательскому интерфейсу. Применение Mathcad позволяет решить множество других задач по исследованию операций, встречающихся в различных спортивных дисциплинах.

Список использованных источников

1. Садовский Л.Е. Математика и спорт / Л.Е. Садовский, А.Л. Садовский. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
2. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
3. Имамов, А.И. Организация решения задач исследования операций в MATHCAD / А.И. Имамов, Б.С. Эргашев // Молодой ученый. – 2015. – № 8. – С. 5–19.