В. Ю. МЕДВЕДЕВА
ГрГУ им. Я. Купалы (г. Гродно, Республика Беларусь)

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ЗАДАНИЙ ПО РАЗЛОЖЕНИЮ ФУНКЦИИ В РЯД ЛОРАНА

Проблема разложения функции комплексного переменного в ряд Лорана может быть рассмотрена как конечная задача и как промежуточная при нахождении изолированных особых точек функции и определении их вида, а также при вычислении вычетов функции в изолированных особых точках.

Известно [1], если функция аналитична в кольце, то в этом кольце она представима сходящимся рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

причём это представление единственно; коэффициенты c_n однозначным образом определяются равенствами

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},\ r<\rho<R, n\in Z. \qquad (1)$$

При разложении в ряд Лорана не всегда рационально использовать формулы (1) для вычисления коэффициентов. Часто в этом случае инструментами являются следующие разложения:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n \text{ и } \frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1. \qquad (2)$$

Существенным здесь является условие $|z|<1$.

Пример. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$, в *которой* $1<|z|<+\infty$.

<u>Решение:</u> так как по условию $|z|>1$, чтобы воспользоваться моделью (2), преобразуем функцию:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{z^n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}.$$

Описанная простая модель позволяет создать несколько наборов заданий на построение разложения в ряд Лорана задачи, в которых функция имеет не действительные, а комплексные изолированные особые точки.

Задание 1. *Разложить функцию* $f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ *по степеням* $(z-ai)$ *в ряд Лорана в кольце* $0<|z-ai|<2a$, $a=1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. По условию задачи мы должны построить лорановское разложение функции по степеням $(z-ai)$. Для этого сначала начала разлагаем функцию в сумму простейших дробей. Для применения модели (2) преобразуем вторую дробь. Так как $\left|\dfrac{z-ai}{2ai}\right|<1$, то строим требуемое разложение:

$$f(z)=-\frac{i}{2a}\cdot\frac{1}{z-ai}+\frac{i}{2a}\cdot\frac{1}{z+ai}=-\frac{i}{2a}\cdot\frac{1}{z-ai}+\frac{i}{2a}\cdot\frac{1}{(z-ai)+2ai}=$$

$$=-\frac{i}{2a}\cdot\frac{1}{z-ai}+\frac{i}{2a\cdot 2ai}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-ai}{2ai}}=-\frac{i}{2a}\cdot\frac{1}{z-ai}+\frac{1}{4a^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-ai}{2ai}\right)^n.$$

Задание 2. *Разложить функцию* $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2azi+2a^2}$ *по степеням* $(z-a-ai)$ *в ряд Лорана в кольце* $0<|z-(a+ai)|<2a$, $a=1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. Разлагаем знаменатель на множители, представляем функцию в виде суммы простейших дробей и применяем модель (2):

$$f(z)=\frac{i}{2a}\frac{1}{z-(a+ai)}-\frac{i}{2a}\frac{1}{z-(a-ai)}=\frac{i}{2a}\frac{1}{z-(a+ai)}-\frac{i}{2a}\frac{1}{2ai}\frac{1}{1+\dfrac{z-(a+ai)}{2ai}}=$$

$$=\frac{i}{2a}\cdot\frac{1}{z-(a+ai)}--\frac{1}{4a^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z-(a+ai)}{2ai}\right)^n.$$

Задание 3. *Разложить функцию* $f(z)=\dfrac{1}{(z-(-a+ai))\cdot(z-(-a-ai))}$ *по степеням* $(z+a-ai)$ *в ряд Лорана в кольце* $0<|z-(-a+ai)|<2a$, $a=1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. Решая аналогично вышеуказанным примерам, получим искомое разложение:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+2az+2a^2}=\frac{i}{2a}\cdot\frac{1}{z-(-a+ai)}-\frac{1}{4a^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-(-a+ai)}{2ai}\right)^n.$$

Так как преподавателю математических дисциплин постоянно приходится составлять самостоятельные и контрольные работы, зачётные и экзаменационные материалы, тестовые задания, а также представлять разработанные материалы в электронном виде, во всех примерах был введён параметр a и диапазон его изменения, что позволяет выделить существенное при разложении функции указанного вида. Такое представление заданий может помочь преподавателю составить варианты для самостоятельной работы из примеров, различающихся по виду, но схожих по сути (рисунок 1).

6 Самостоятельная работа

1) Разложить функцию

$$f(z)=\frac{8}{(z-3)(z-5)}$$

в ряд Лорана по степеням z в кольце:
а) $0<|z|<3$;
б) $3<|z|<5$;
в) $|z|>5$.

2) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$ в заданном кольце:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+25},\quad z_0=5i,\ 0<|z-z_0|<10.$$

3) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$:

$$f(z)=\frac{1-\cos 3z}{z^4}.$$

Рисунок 1 – Вариант самостоятельной работы по разложению в ряд Лорана

При разработке условий в результате анализа ограничения накладывались на численные значения параметров, исходя из требований существования решения и получения «красивых» результатов вычисления. Такая работа всегда опирается на глубину понимания материала, а также часто происходит в направлении от ответа к условию. Задавая простой ответ, решение ведется в обратном порядке, позволяя корректно формулировать условие через параметры, выбор которых обусловлен не только решением задачи вариативности, но и получением не слишком больших числовых коэффициентов в условиях заданий и решениях.

Список использованных источников

1. Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ. В 6 ч. Кн. 4. Ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного : учеб. пособие для студ./ Э.И. Зверович.- Минск : Вышэйшая школа, 2008. – 319 с.