Весці БДПУ. Серыя 3. 2017. № 4. С. 15–17.

УДК 517.9

РАШЭННЕ КРАЯВОЙ ЗАДАЧЫ ДЛЯ АДНОЙ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ФАРМАЛЬНЫХ ВЫТВОРНЫХ

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры інфармацыйных тэхналогій і вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт МІТСО»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі БДПУ

UDC 517.9

SOLVING THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A SINGLE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN FORMAL DERIVATIVES

V. Shilinets,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Information Technology and Higher Mathematics of Higher Educational Establishment of the Federation of Trade Unions of Belarus «International University MITSO»;

I. Gulo,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, BSPU

Паступіў у рэдакцыю 18.10.17.

Received on 18.10.17.

Пры дапамозе F-манагенных функцый даследавана краявая задача для адной сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных.

Ключавыя словы: манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, фармальныя вытворныя, сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных, дыферэнцыяльнае раўнанне ў фармальных вытворных.

The boundary value problem for one system differential equations based on F-monogenic functions is investigated.

Keywords: monogenic in the sense V. S. Fedorov, formal derivatives, system of differential equations in the formal derivatives, differential equation in the formal derivatives.

Уводзіны. У шэрагу прац [1–4] гіперкамплексныя функцыі, манагенныя ў сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенныя) [5], і фармальныя вытворныя [6] выкарыстоўваліся для даследавання дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных.

Прадметам даследавання ў дадзенай працы з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}&=a_1 f+b_1\varphi,\\ \frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial \varphi}{\partial p}&=a_2 f+b_2\varphi,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

дзе $a_1=-b_2$, $b_1=-a_2$ – вядомыя камплексныя функцыі класа $C^1(D)$,

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{1}{\delta}(f'_x q'_y - f'_y q'_x), \quad \frac{\partial f}{\partial q}=\frac{1}{\delta}(f'_y p'_x - f'_x p'_y) \qquad (2)$$

– «фармальныя» вытворныя ад функцыі f па вядомых функцыях $p=p(x, y)$, $q=q(x, y)$ класа $C^1(D)$, $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x \neq 0$ у дадзеным абсягу D.

Заўсёды абазначаем праз $C^1(D)$ клас рэчаісных або камплексных функцый рэчаісных зменных x, y, якія непарыўна дыферэнцавальныя ў некаторым адназвязным абсягу D.

«Фармальныя» вытворныя, якія вызначаюцца формуламі (2), пераўтвараюцца ў звычайныя вытворныя, калі $p = x$, $q = y$. Пры $p = x + iy \equiv z$, $q = x - iy \equiv \bar{z}$ формулы (2) вызначаюць вядомыя дыферэнцыяльныя апе-ратары $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(f'_x - if'_y)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(f'_x + if'_y)$ [7].

Репозиторий БГПУ

Асноўная частка. Лёгка даказаць наступную тэарэму.

Тэарэма. У выпадку $a_1 = -b_2, b_1 = -a_2$ сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных раўназначная раўнанню

$$\frac{\partial w}{\partial Q} = Aw, \tag{3}$$

дзе $w = f + \varepsilon\varphi$ – шуканая двайная функцыя; $\varepsilon^2 = 1$; $A = \frac{1}{2}(a_1 + \varepsilon b_1)$ – вядомая двайная функцыя; $\frac{\partial}{\partial Q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)$; $Q = p - \varepsilon q$; $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$ вызначаны роўнасцямі (2).

У дадзенай працы намі фармулюецца і даследуецца наступная краявая задача.

Задача. Знайсці рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных (1) $w = f + \varepsilon\varphi$ (раўнання (3)) у адназвязным абсягу *D*, калі вядома рашэнне гэтай сістэмы на граніцы абсягу *D* – крывой *C*.

Агульнае рашэнне раўнання (3), раўназначнага сістэме дыферэнцыяльных раўнанняў (1), мае выгляд

$$w = e^{\alpha}\Phi[P], \tag{4}$$

дзе $\Phi[P]$ – адвольная двайная функцыя, манагенная па функцыі $P = p + \varepsilon q$ [4], напрыклад, аналітычная ад *P*, а функцыя α – якое-небудзь частковае рашэнне раўнання

$$\frac{\partial \alpha}{\partial Q} = A.$$

Напрыклад, калі *A* ёсць аналітычная функцыя ад *p* і *q* у абсягу *D*, то $\alpha = \int_{M_0}^{M} AdQ$, дзе крывалінейны інтэграл $\int_{M_0}^{M} AdQ$ ($dQ = Q'_x dx + Q'_y dy$), узяты па кускова-гладкай крывой, якая злучае пункты M_0 і *M* у абсягу *D*, не залежыць ад шляху інтэгравання.

Пры дапамозе агульнага рашэння раўнання (3), якое вызначаецца формулай (4), мы можам рашыць сфармуляваную краявую задачу.

Перапішам роўнасць (4) у выглядзе

$$e^{-\alpha}w = \Phi[P]. \tag{5}$$

Функцыя $e^{-\alpha}$ – вядомая ў абсягу *D* і на яе граніцы *C*. Мяркуем, што функцыя *w* вядомая на граніцы *C* (такая ўмова краявой задачы). Тады адвольная F-манагенная па *P* функцыя $\Phi[P]$ будзе вядомай на крывой *C*.

Таму, скарыстаўшы вядомае інтэгральнае выяўленне У. С. Фёдарава [8], для любога пункта $M \in D$ атрымаем

$$\Phi[P(M)] = \frac{1}{K}\int_C \frac{\Phi[P(N)]}{P(N) - P(M)}dP(N), \tag{6}$$

дзе $K = \int_C ((P(N) - P(M))^{-1}dP(N)$.

Калі падставіць атрыманую з формулы (6) функцыю $\Phi[P]$ у роўнасць (4), то атрымаем рашэнне раўнання (3) $w = f + \varepsilon\varphi$, якое задавальняе краявой умове задачы.

Калі вызначыць функцыі *f* і φ з атрыманага рашэння, то знойдзем рашэнне краявой задачы для сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных (1). Такім чынам, сфармуляваная краявая задача рэшана.

Заключэнне. Такім чынам, атрымалі наступную тэарэму.

Тэарэма. Няхай a_1, a_2, b_1, b_2 – вядомыя аналітычныя ад $p = p(x, y)$ і $q = q(x, y)$ у адназвязным абсягу *D* функцыі. Калі вядома рашэнне сістэмы (1) $w = f + \varepsilon\varphi$ (раўнання (3)) на граніцы абсягу *D* – кускова-гладкай крывой *C*, то для любога пункта $M \in D$ $w = e^{\alpha}\Phi[P]$, дзе $\alpha = \int_{M_0}^{M} AdQ$, а $\Phi[P]$ вызначаецца з роўнасці (6).

Заўвага. Няхай $p = x$, $q = iy$, $P = x + \varepsilon iy$, $Q = x - \varepsilon iy$, $i^2 = -1$. Як паказана ў працы [4], адвольная двайная функцыя $\Phi[P]$, F-манагенная па функцыі *P*, мае выгляд

Рэпазіторый БДПУ

$$\Phi[P] = u[z]\varepsilon_1 + v[\bar{z}]\varepsilon_2, \qquad (7)$$

дзе $u[z]$ – камплексная функцыя, манагенная па $z = x + iy$, $v[\bar{z}]$ – камплексная функцыя, манагенная па $\bar{z} = x - iy$, $\varepsilon_1 = \frac{1+\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1-\varepsilon}{2}$.

Калі падставіць $\Phi[P]$ з формулы (7) у роўнасць (5), мы знойдзем значэнні адвольных камплексных функцый $u[z]$ і $v[\bar{z}]$, манагенных у абсягу D па z і $\bar{z}$ адпаведна.

Калі скарыстаць класічную формулу Кашы для камплекснай функцыі u па камплекснай зменнай z, а для функцыі v па зменнай $\bar{z}$, мы знойдзем значэнні функцый $u[z]$ і $v[\bar{z}]$ унутры абсягу D па іх значэннях на граніцы гэтага абсягу, а значыць, вызначым функцыю $\Phi[P] = u[z]\varepsilon_1 + v[\bar{z}]\varepsilon_2$ такую, што рашэнне сістэмы (1) $w = e^{\alpha}\Phi[P]$ будзе задавальняць краявым умовам нашай задачы.

Літаратура

1. *Стельмашук, Н. Т.* Метод формальных производных для решения задач Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1993.– Т. 29. – № 11.– С. 1999–2001.
2. *Стельмашук, Н. Т.* Решение задач Коши для одной системы дифференциальных уравнений методом F-моногенных функций / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1993.– № 3.– С. 108–110.
3. *Стельмашук, Н. Т.* Построение интегральных представлений для некоторых видов уравнений в формальных производных / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 2.– С. 288–294.
4. *Стельмашук, Н. Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 61–65.
5. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. –1958. – № 6. – С. 257–265.
6. *Гусев, В. А.* Об одном обобщении ареолярных производных / В. А. Гусев // Bul. Stiint. si tehnical inst. Pol. Timisoara.– 1962.– V. 7.– Fasc. 2. – P. 223–238.
7. *Векуа, И. Н.* Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 628 с.
8. *Федоров, В. С.* Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. –1957. – № 1. – С. 227–233.

References

1. Stelmashuk, N. T. Metod formalnykh proizvodnykh dlya resheniya zadach Koshi dlya odnoy sistemy differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Differentsialnyye uravneniya. – 1993. – T. 29. – № 11. – S. 1999–2001.
2. *Stelmashuk, N. T.* Resheniye zadach Koshi dlya odnoy sistemy differentsialnykh uravneniy metodom F-monogennykh funktsiy / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Vestsi AN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 1993. – № 3. – S. 108–110.
3. *Stelmashuk, N. T.* Postroyeniye integralnykh predstavleniy dlya nekotorykh vidov uravneniy v formalnykh proizvodnykh / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Differentsialnyye uravneniya. – 1991. – T. 27. – № 2. – S. 288–294.
4. *Stelmashuk, N. T.* O preobrazovanii k kanonicheskomu vidu sistemy lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s pomoshchyu dvoynykh differentsialnykh operatorov / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 61–65.
5. *Fyodorov, V. S.* Osnovnyye svoystva obobshchennykh monogennykh funktsiy / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958. – № 6. – S. 257–265.
6. *Gusev, V. A.* Ob odnom obobshchenii areolyarnykh proizvodnykh / V. A. Gusev // Bul. Stiint. si tehnical inst. Pol. Timishoara. – 1962. – V. 7. – Fasc. 2. – P. 223–238.
7. *Vekua, I. N.* Obobshchyonnyye analiticheskiye funktsii / I. N. Vekua. – M. : GIFML, 1959. – 628 s.
8. *Fyodorov, V. S.* Ob odnom obobshchenii integral tipa Koshi v mnogomernom prostranstve / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1957. – № 1. – S. 227–233

Рэпазіторый БрДТУ