Весці БДПУ. Серыя 3. 2017. № 2. С. 20–28.

УДК 512.81

СВЯЗНОСТИ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Н. П. Можей,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ПОИТ БГУИР

Поступила в редакцию 18.04.17.

UDC 512.81

CONNECTIONS OF ZERO CURVATURE ON HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS

N. Mozhey,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the SITD, BSUIR

Received on 18.04.17.

В работе представлена в явном виде локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих аффинную связность только нулевой кривизны. В статье рассматривается случай неразрешимой группы Ли преобразований. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Описаны также сами инвариантные аффинные связности вместе с их тензорами кручения. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: аффинная связность, группа преобразований, однородное пространство, тензор кривизны.

The article presents a local classification of three-dimensional homogeneous spaces allowing a affine connection of zero curvature only. The case of the unsolvable Lie group of transformations is considered. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. We describe invariant affine connections together with their torsion tensors. The studies are based on the use of properties of the Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as compound of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

Keywords: affine connection, transformation group, homogeneous space, curvature tensor.

Введение. Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике. Вопрос о существовании связности нулевой кривизны является одной из нерешенных проблем, такие связности позволяют дать геометрическую интерпретацию некоторым понятиям математики и физики, например, понятие связности, определяющей представление нулевой кривизны, играет важную роль в теории солитонов. Анализируя разрешимость дифференциального уравнения, определяющего однородную геометрическую структуру, также приходим к исследованию связности. Большой вклад в развитие теории связностей внесли работы Э. Картана, А. П. Нордена, П. К. Рашевского, М. Куриты, А. П. Широкова, Э. Б. Винберга, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1] и др. Трехмерные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, допускающие аффинные связности без кручения, изучались в [2], где приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В данной работе также изучаются однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, но внимание сосредоточено на пространствах, допускающих аффинную связность только нулевой кривизны.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M,\bar{G})$ равносильна классификации пар групп Ли $(\bar{G},G)$, где $G \subset \bar{G}$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ [3]. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [1]. Опишем локально однородные пространства и связности на них. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}},$$

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]), \quad x, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$), $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \ldots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующие приведенным в [4]. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, тривиальная пара типа $d.n$ будет обозначаться $d.n.1$, так как она всегда существует и будет являться первой парой соответствующего типа.

Теорема 1. *Пусть тривиальная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ допускает аффинную связность только нулевой кривизны, а $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима. Тогда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$:*

$$4.2. \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x + y & z & \\ u & \lambda x - y & \\ & & x \\ \hline\end{array}; \quad 4.3. \begin{array}{|ccc|}\hline x + y & z & \\ u & x & z \\ & u & x - y \\ \hline\end{array};$$

$$4.5. \begin{array}{|ccc|}\hline x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \\ \hline\end{array}; \quad 5.1. \begin{array}{|ccc|}\hline x & u & \\ v & y & \\ & & z \\ \hline\end{array};$$

$$5.3. \begin{array}{|ccc|}\hline & u & v \\ & x & y \\ & z & -x \\ \hline\end{array}; \quad 6.2. \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x + y & z & w \\ u & \lambda x - y & v \\ & & x \\ \hline\end{array};$$

$$6.3. \begin{array}{|ccc|}\hline & v & w \\ & x & z \\ & y & u \\ \hline\end{array}; \quad 6.4. \begin{array}{|ccc|}\hline x & v & w \\ & \lambda x + y & z \\ & u & \lambda x - y \\ \hline\end{array};$$

$$7.1. \begin{array}{|ccc|}\hline x & u & t \\ v & y & w \\ & & z \\ \hline\end{array}; \quad 7.2. \begin{array}{|ccc|}\hline x & w & t \\ & y & u \\ & v & z \\ \hline\end{array};$$

$$8.1. \begin{array}{|ccc|}\hline x & z & v \\ w & y - x & u \\ t & s & -y \\ \hline\end{array}; \quad 9.1. \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}).$$

Замечание. Переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$, а параметры – греческими буквами, подалгебры с разными значениями параметров не сопряжены друг другу. Базис, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Аффинная связность называется тривиальной, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. У всех вышеперечисленных пар связность является тривиальной с нулевой кривизной и кручением, за исключением случаев 5.3.1, 4.2.1 (λ=1/2), 6.4.1 (λ=1/2); в этих случаях

Пара	Аффинная связность
6.4.1 (λ=1/2), 5.3.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r_{1,2} \in \mathbb{R}$

4.2.1 (λ=1/2)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, p_{3,2} \in \mathbb{R}$
Пара	**Тензор кручения**
6.4.1 (λ=1/2), 5.3.1	$(0,0,0),(0,0,0),$ $(-2r_{1,2},0,0), r_{1,2} \in \mathbb{R}$
4.2.1 (λ=1/2)	$(0,0,2p_{3,2}),(0,0,0),$ $(0,0,0), p_{3,2} \in \mathbb{R}$

Доказательство. Пусть здесь и далее

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ (при $i,j = \overline{1,3}$). Поскольку пара является тривиальной, а $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, то $\mathfrak{g}$ также неразрешима. Все неразрешимые подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ описаны в [4], они задают тривиальные пары. Из них выбраны пары, допускающие аффинную связность, причем только нулевой кривизны.

Рассмотрим, например, локально однородное пространство 8.1.1, однозначно определены $\Lambda(e_i)$, $i = \overline{1,8}$, так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, тогда

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1,u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1),$$
$$p_{1,1} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,1} = p_{3,3} = 0.$$

Поскольку

$$[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)] = \Lambda([e_2,u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)] = 0,$$

имеем $p_{1,3} = p_{3,2} = 0$.

Так как

$$[\Lambda(e_5),\Lambda(u_1)] = \Lambda(u_2),$$

получим $q_{i,j} = 0$, $i,j = \overline{1,3}$.

Если

$$[\Lambda(e_7),\Lambda(u_1)] = \Lambda(u_3),$$

то $r_{i,j} = 0$, , $i,j = \overline{1,3}$.

Таким образом,

$$\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0,$$

по определению тензоры кривизны и кручения нулевые.

Рассмотрим теперь, например, локально однородное пространство 4.2.1 (λ=1/2),

$$[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1) \Rightarrow$$
$$p_{1,1} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,1} = p_{3,3} = 0;$$
$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)] = (1/2)\Lambda(u_1),$$

тогда $p_{1,3} = 0$.

Так как

$$[\Lambda(e_4),\Lambda(u_1)] = \Lambda(u_2),$$
$$q_{1,1} = q_{1,2} = q_{1,3} = q_{2,1} = q_{2,2} = q_{2,3} = 0,$$
$$q_{3,1} = -p_{3,2},\ q_{3,2} = q_{3,3} = 0.$$

Если $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)] = 0$,

то $r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,1} = 0, r_{2,3} = r_{3,1} = r_{3,2} = 0$.

Поскольку

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)] = \Lambda(u_3),\quad r_{1,1} = r_{2,2} = r_{3,3} = 0.$$

На остальных базисных векторах условие выполняется. Прямыми вычислениями получим, что связность имеет вид, представленный в таблице. Тензор кривизны получился нулевым, а тензор кручения

$$T(u_1,u_2) = \Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_2)(u_1)_{\mathfrak{m}} - [u_1,u_2]_{\mathfrak{m}} =$$
$$= (0,0,2p_{3,2}),\ T(u_1,u_3) = T(u_2,u_3) = 0.$$

Для остальных случаев рассуждения аналогичны.

Теорема 2. *Все трехмерные нетривиальные однородные пространства, допускающие аффинную связность только нулевой кривизны, такие, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *неразрешима, локально имеют следующий вид:*

6.3.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	$-e_5$	e_6	0	u_2	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	$-e_6$	0	0	0	u_2
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	0	$-e_5$	0	u_3	0
e_4	0	0	0	0	$-e_5$	$-e_6$	0	u_2	u_3
e_5	e_5	e_6	0	e_5	0	0	0	$u_1+3e_4+e_1$	$2e_3$
e_6	$-e_6$	0	e_5	e_6	0	0	0	$2e_2$	$u_1+3e_4-e_1$
u_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1-3e_4-e_1$	$-2e_2$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-u_3$	$-2e_3$	$-u_1-3e_4+e_1$	0	0	0

5.9.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	0	e_3	0	e_5	u_1	0	0	
e_2	0	0	0	$-e_4$	$-e_5$	0	0	u_3	
e_3	$-e_3$	0	0	e_5	0	0	u_1	0	
e_4	0	e_4	$-e_5$	0	0	e_5	$2e_4$	u_2	,
e_5	$-e_5$	e_5	0	0	0	0	e_5	u_1	
u_1	$-u_1$	0	0	$-e_5$	0	0	$-u_1$	0	
u_2	0	0	$-u_1$	$-2e_4$	$-e_5$	u_1	0	$2u_3$	
u_3	0	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0	

4.2.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	0	0	0	$(1/2)u_1$	$(1/2)u_2$	u_3	
e_2	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	$-u_2$	0	
e_3	0	$-2e_3$	0	e_2	0	u_1	0	,
e_4	0	$2e_4$	$-e_2$	0	u_2	0	0	
u_1	$-(1/2)u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0	
u_2	$-(1/2)u_2$	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0	
u_3	$-u_3$	0	0	0	0	0	0	

4.19.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	0	$-e_3$	$-e_4$	0	0	u_3	
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	0	
e_3	e_3	$-e_4$	0	0	$-e_4$	$-2e_3$	u_2	
e_4	e_4	0	0	0	0	$-e_4$	u_1	
u_1	0	0	e_4	0	0	u_1	0	
u_2	0	$-u_1$	$2e_3$	e_4	$-u_1$	0	$-2u_3$	
u_3	$-u_3$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	$2u_3$	0	

4.21.11 ($\mu\neq0,1/2$)	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	e_2	$-\mu e_3$	$(1-\mu)e_4$	u_1	0	μu_3	
e_2	$-e_2$	0	e_4	0	0	e_2+u_1	0	
e_3	μe_3	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	u_2	
e_4	$(\mu-1)e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	e_2+u_1	
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0	
u_2	0	$-e_2-u_1$	$2e_3$	e_4	0	0	$-2u_3$	
u_3	$-\mu u_3$	0	$-u_2$	$-e_2-u_1$	0	$2u_3$	0	

3.6.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	0	e_1	e_1	0	u_1	
e_2	0	0	0	0	u_2	0	
e_3	$-e_1$	0	0	0	0	u_3	
u_1	$-e_1$	0	0	0	0	u_3	
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	
u_3	$-u_1$	0	$-u_3$	$-u_3$	0	0	

3.12.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	$-e_2$	$-e_3$	0	0	u_3	
e_2	e_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2	
e_3	e_3	0	0	0	e_3	u_1	
u_1	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0	
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$	
u_3	$-u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0	

3.13.6 ($\mu\neq-1,0,1/2$)	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	$-\mu e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	0	μu_3	
e_2	μe_2	0	0	e_3	$2e_2$	u_2	
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	e_3	u_1	
u_1	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0	
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$	
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0	

3.28.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	e_3-e_2	$-e_3$	0	u_1	u_3	
e_2	e_2-e_3	0	0	e_3	$2e_3$	$2e_1+u_2$	
e_3	e_3	0	0	0	$-e_3$	u_1	
u_1	0	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0	
u_2	$-u_1$	$-2e_3$	e_3	u_1	0	0	
u_3	$-u_3$	$-2e_1-u_2$	$-u_1$	0	0	0	

2.8.7 ($\lambda\neq-1,0,1/2$)	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	λe_1	e_1	0	u_1	
e_2	$-\lambda e_1$	0	0	u_2	λu_3	
u_1	$-e_1$	0	0	0	u_3	
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	
u_3	$-u_1$	$-\lambda u_3$	$-u_3$	0	0	

Замечание. В случаях 4.2.2 и 6.3.2 подалгебра $\mathfrak{g}$ неразрешима, в остальных случаях $\mathfrak{g}$ разрешима. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются некоторые дополнительные условия, то они записываются сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала классифицированы подалгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, далее найдены пары ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) (с подробным описанием можно ознакомиться в [4]). Из них выбраны пары с неразрешимой $\bar{\mathfrak{g}}$, допускающие аффинную связность, причем только нулевой кривизны.

Рассмотрим, например, случай 3.6. Пусть $\mathfrak{h}$ – нильпотентная подалгебра, порожденная e_2 и e_3, тогда $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}e_3\oplus\mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}\supset\mathbb{R}u_3$ и, с учетом тождества Якоби, получим

$$[e_1,u_1]=pe_1,\ [u_1,u_2]=0,$$
$$[u_1,u_3]=pu_3,\ [u_2,u_3]=0.$$

При $p=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, при $p\neq0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.6.2 при помощи отображения

$$\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}},\ \pi(e_i)=e_i,\ i=\overline{1,3},$$
$$\pi(u_1)=pu_1,\ \pi(u_2)=u_2,\ \pi(u_3)=pu_3.$$

Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1=1$, а $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2=3$, эти пары не эквивалентны.

В случае 3.12 $\mathfrak{h}$ порождена вектором e_1. Поскольку

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}e_3,$$
$$\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}u_1\oplus\mathbb{R}u_2,$$
$$\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}u_3,$$

в силу тождества Якоби имеем

$$[e_2,u_1]=p_1e_2+p_2e_3,\ [e_2,u_2]=2p_2e_2,$$
$$[e_3,u_1]=2p_1e_3,\ [e_3,u_2]=p_1e_2+p_2e_3,$$
$$[u_1,u_2]=-p_2u_1+p_1u_2,\ [u_1,u_3]=2p_1u_3,$$
$$[u_2,u_3]=2p_2u_3.$$

Если $p_1=p_2=0$, то $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре, а иначе она эквивалентна 3.12.2 при помощи $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\mathfrak{g}$, где

при $p_1\neq0,\ p_2=0$:

$$\pi(e_1)=e_1,\ \pi(e_2)=e_3,\ \pi(e_3)=e_2,\ \pi(u_1)=p_1u_2,$$
$$\pi(u_2)=p_1u_1,\ \pi(u_3)=p_1u_3;$$

при $p_1=0,\ p_2\neq0$:

$$\pi(e_i)=e_i,\ \pi(u_j)=p_2u_j,\ i,j=\overline{1,3};$$

при $p_1\neq0,\ p_2\neq0$:

$$\pi(e_1)=e_1,\ \pi(e_2)=e_2,\ \pi(e_3)=p_1e_2+e_3,$$
$$\pi(u_1)=p_2u_1+p_1p_2u_2,\ \pi(u_2)=p_2u_2,\ \pi(u_3)=p_2u_3.$$

Поскольку $Z(\bar{\mathfrak{g}}_1)=\mathbb{R}u_1+\mathbb{R}u_2$,, а $Z(\bar{\mathfrak{g}}_2)=0$,, пары не эквивалентны.

В случае 3.28 в силу тождества Якоби $[u_1,u_2]=-pu_1,[u_1,u_3]=[u_2,u_3]=0,$

$$[e_2,u_1]=pe_3,[e_2,u_2]=2pe_3,$$
$$[e_2,u_3]=2pe_1+u_2,[e_3,u_2]=-pe_3.$$

При $p=0$ пара тривиальна, при $p\neq0$ – паре 3.28.2 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}\to\bar{\mathfrak{g}}_2$, $\pi(e_i)=e_i$, $\pi(u_i)=(1/p)u_i$, $i=\overline{1,3}$.

Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_1\neq\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}_2$, пары не эквивалентны.

В случае 4.2 $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1 и e_2, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,2)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0,-2)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}e_4$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(\lambda,-1)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h})\supset\mathbb{R}u_3$.

Поэтому

$$[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak g}^{(2\lambda,0)}(\mathfrak h),$$
$$[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak g}^{(\lambda+1,1)}(\mathfrak h),$$
$$[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak g}^{(\lambda+1,-1)}(\mathfrak h),$$

тогда

$$[u_1,u_2]=a_1e_1+a_2e_2+\alpha_3u_3,$$
$$[u_1,u_3]=[u_2,u_3]=0.$$

В силу тождества Якоби $[u_1,u_2]=\alpha_3u_3$, где $(2\lambda-1)\alpha_3=0$. Если $\lambda\ne 1/2$ или $\alpha_3=0$, то пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ эквивалентна тривиальной. Если $\lambda=1/2$, $\alpha_3\ne 0$, то эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ и 4.2.2 показывается посредством

$$\pi:\bar{\mathfrak g}_2\to\bar{\mathfrak g},\ \pi(e_i)=e_i,\ i=\overline{1,4},$$
$$\pi(u_1)=u_1,\ \pi(u_2)=u_2,\ \pi(u_3)=\alpha_3u_3.$$

Поскольку $\dim D(\tau(D\bar{\mathfrak g}_1))\ne\dim D(\tau(D\bar{\mathfrak g}_2))$, пары не эквивалентны.

В случае 4.19 $\mathfrak h$ порождена вектором e_1,

$$\bar{\mathfrak g}^{(0)}(\mathfrak h)=\mathbb Re_1\oplus\mathbb Re_2\oplus\mathbb Ru_1\oplus\mathbb Ru_2,$$
$$\bar{\mathfrak g}^{(-1)}(\mathfrak h)=\mathbb Re_3\oplus\mathbb Re_4,\ \bar{\mathfrak g}^{(1)}(\mathfrak h)=\mathbb Ru_3,$$

а

$$[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak g}^{(0)}(\mathfrak h),[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak g}^{(1)}(\mathfrak h),[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak g}^{(1)}(\mathfrak h),$$
$$[u_1,u_3]=\beta_3u_3,\ [e_2,u_2]=u_1+pe_2,[e_3,u_3]=u_2-2pe_1,$$
$$[e_4,u_2]=pe_4,[e_4,u_3]=u_1+pe_2,$$
$$[u_1,u_2]=a_1e_1+a_2e_2+\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,[u_2,u_3]=\gamma_3u_3.$$

Использовав тождество Якоби, получим

$$a_1=a_2=\alpha_1=\alpha_2=\beta_3=q=\gamma_3=0.$$

При $p=0$ пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ эквивалентна тривиальной паре, при $p\ne 0$ – паре 4.19.2 посредством

$$\pi:\bar{\mathfrak g}_2\to\bar{\mathfrak g},\ \pi(e_i)=e_i,\ i=\overline{1,4},$$
$$\pi(u_1)=(1/p)u_1+e_2,\ \pi(u_2)=(1/p)u_2-2e_1,$$
$$\pi(u_3)=(1/p)u_3.$$

Поскольку $\bar{\mathfrak g}_1$ – разрешимая алгебра Ли, а $\bar{\mathfrak g}_2$ неразрешима, пары не эквивалентны.

В случае 5.9 $\mathfrak h$ порождена векторами e_1 и e_2, тогда

$$\bar{\mathfrak g}^{(0,0)}(\mathfrak h)=\mathbb Re_1\oplus\mathbb Re_2,\ \bar{\mathfrak g}^{(1-\lambda,0)}(\mathfrak h)=\mathbb Re_3,$$
$$\bar{\mathfrak g}^{(1,0)}(\mathfrak h)=\mathbb Ru_1,\ \bar{\mathfrak g}^{(\lambda,-1)}(\mathfrak h)=\mathbb Re_4,\ \bar{\mathfrak g}^{(\lambda,0)}(\mathfrak h)=\mathbb Ru_2,$$
$$\bar{\mathfrak g}^{(1,-1)}(\mathfrak h)=\mathbb Re_5,\ \bar{\mathfrak g}^{(0,1)}(\mathfrak h)=\mathbb Ru_3,$$

а

$$[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak g}^{(1+\lambda,0)}(\mathfrak h),\ [u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak g}^{(1,1)}(\mathfrak h),\ [u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak g}^{(\lambda,1)}(\mathfrak h).$$

Если $\lambda=0$,

то $[e_4,u_1]=pe_5,[e_4,u_2]=2pe_4,[e_5,u_2]=pe_5$,
$[u_1,u_2]=a_3e_3+\alpha_1u_1$, $[u_1,u_3]=0$, $[u_2,u_3]=\gamma_3u_3$.

В силу тождества Якоби $a_3=0$, $\alpha_1=-p$, $\gamma_3=2p$. При $p=0$ пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ эквивалентна тривиальной паре, при $p\ne 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ и 5.9.2 доказывается при помощи $\pi:\bar{\mathfrak g}_2\to\bar{\mathfrak g}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,5}$, $\pi(u_j)=pu_j$, $j=\overline{1,3}$. Если же $\lambda\ne 0$, то пара $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$ тривиальна. Поскольку $\dim D^2\bar{\mathfrak g}_1=3$, $\dim D^2\bar{\mathfrak g}_2=6$, пары не эквивалентны.

В случае 6.3 $\mathfrak h$ порождена векторами e_1 и e_4. Получим, что

$$[e_5,u_2]=pe_1+A,[e_5,u_3]=2pe_3,[e_6,u_2]=2pe_2,$$
$$[e_6,u_3]=-pe_1+A,[u_1,u_2]=[u_1,u_3]=[u_2,u_3]=0,$$

где $A=3pe_4+u_1$.

При $p=0$ пара тривиальна, при $p\ne 0$ – эквивалентна паре 6.3.2 при помощи $\pi:\bar{\mathfrak g}_2\to\bar{\mathfrak g}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,6}$, $\pi(u_j)=(1/p)u_j$, $j=\overline{1,3}$.

Поскольку $\bar{\mathfrak g}_1$ редуктивна, а $\bar{\mathfrak g}_2$ нет, пары не эквивалентны.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Замечание. У всех перечисленных пар тензор кривизны может быть только нулевым, если тензор кручения не указан, то он также являются нулевым, в противном случае тензор кручения выписан после аффинной связности.

Пара	Аффинная связность
6.3.2	$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$
5.9.2 3.12.2 3.13.6, $\mu\ne 0,1,$ $-1,\ 1/2$	$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$

Пара	Аффинная связность
4.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4.19.2.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu \neq 0,1$, 1/2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4.21.11, $\mu \neq 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.6.2 2.8.7 $\lambda \neq 0,1$, -1, 1/2	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu = 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3.28.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = 1$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тензоры *кривизны и кручения, алгебры голономии нулевые, за исключением*

Пара	Тензор кручения
4.21.11($\mu = 1$), 3.13.6($\mu = 1$)	$(0,0,0),(0,0,0),(2q_{1,3},0,0)$
4.2.2	$(0,0,2p_{3,2}-1),(0,0,0),(0,0,0)$
2.8.7, $\lambda = 1$	$(0,0,0),(0,2p_{2,3},0),(0,0,0)$

Доказательство. Рассмотрим локально однородное пространство 3.13.6 при μ=1, тогда

$$[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)] = \Lambda([e_3,u_1]) \Rightarrow [\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)] = 0,$$

имеем

$$p_{3,1} = p_{3,2} = 0,\ \ p_{3,3} = p_{1,1},\ \ p_{2,1} = 0.$$

Поскольку

$$[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)] = \Lambda(e_3),\ \ p_{1,2} = -1,\ \ p_{1,1} = p_{2,2}.$$

Так как

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)] = \Lambda(u_1),\ \ p_{1,1} = p_{2,3} = p_{1,3} = 0.$$

Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)] = \Lambda(e_3)$,

то $q_{3,1} = q_{3,2} = 0,\ \ q_{3,3} = q_{1,1}+1,\ \ q_{2,1} = 0.$

Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)] = 2\Lambda(e_2)$, $q_{1,2} = 0$, $q_{1,1} = q_{2,2}+1$. Так как $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)] = 0$, $q_{2,3} = 0$. Если $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)] = \Lambda(u_1)$, то $r_{3,1} = 0$, $r_{3,2} = -1$, $r_{3,3} = r_{1,1}$, $r_{2,1} = 0$.

Поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)] = \Lambda(u_2)$, $q_{1,1} = 0$, $r_{1,2} = -q_{1,3}$, $r_{1,1} = r_{2,2}$.

Так как

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)] = \Lambda(u_3),\ \ r_{1,1} = r_{1,3} = r_{2,3} = 0.$$

Получим, что связность имеет вид, указанный в таблице. Тензор кривизны – нулевой, а кручения

$$T(u_2,u_3) = \Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}} - [u_2,u_3]_{\mathfrak{m}} =$$

$= (2q_{1,3},0,0)$, $T(u_1,u_2) = T(u_1,u_3) = 0$,

алгебра голономии нулевая.

Заметим, что, например, при $\mu = 1/2$

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны $R(u_1,u_2)=R(u_1,u_3)=0$,

$$R(u_2,u_3)=\left[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)\right]-\Lambda([u_2,u_3])=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&-3r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, этот случай не входит в рассматриваемый в работе класс.

Для остальных случаев рассуждения аналогичны.

Заключение. В работе приведена в явном виде полная локальная классификация трехмерных однородных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих аффинную связность только нулевой кривизны. Описаны все инвариантные аффинные связности на каждом таком пространстве, найдены их тензоры кручения.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах, в частности требуют равенства нулю тензора кривизны заданной связности.

Литература

1. *Кобаяси, Ш.* Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981.
2. *Mozhey, N. P.* Torsion free affine connections on three-dimensional homogeneous spaces / N. P. Mozhey// Siberian Electronic Mathematical Reports, V. 14, pp. 280–295 (2017)
3. *Онищик, А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
4. *Можей, Н. П.* Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

References

1. *Kobayashi, Sh.* Osnovy differentsialnoy geometrii: v 2 t. / Sh. Kobayashi, K. Nomidzu. – M. : Nauka, 1981.
2. *Mozhey, N. P.* Torsion free affine connections on three-dimensional homogeneous spaces / N. P. Mozhey // Siberian Electronic Mathematical Reports, V. 14, pp. 280–295 (2017)
3. *Onishchik, A. L.* Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy / A. L. Onishchik. – M. : Fiz.-mat. lit., 1995. – 384 s.
4. *Mozhey, N. P.* Tryokhmernyye izotropno-tochnyye odnorodnyye prostranstva i svyaznosti na nikh / N. P. Mozhey. – Kazan : Izd-vo Kazan. un-ta, 2015. – 394 s.