МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2017. № 2. С. 12–19.

УДК 517.968.72

МНОЖЕСТВА УСТОЙЧИВОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Е. А. Барабанов,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики НАН Беларуси;
Н. Г. Серебрякова,
кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики БГАТУ;
А. Ф. Касабуцкий,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики БГАТУ

Поступила в редакцию 03.11.16.

UDC 517.968.72

STABILITY AND ASYMPTOTIC STABILITY SETS OF PARAMETER FAMILY LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEM

E. Barabanov,
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus;
N. Serebryakova,
Candidate of Pedagogic, Head of the Department of Applied Informatics, BSATU;
A. Kasabutsky,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, BSATU

Received on 03.11.16.

Рассматриваются непрерывно зависящие от вещественного параметра семейства линейных дифференциальных систем с непрерывными и равномерно ограниченными на полуоси коэффициентами. Множеством устойчивости, асимптотической устойчивости или экспоненциальной устойчивости такого семейства называется множество всех тех значений параметра, при которых отвечающие им системы семейства устойчивы, асимптотически устойчивы или экспоненциально устойчивы. Доказано, что множество вещественной оси тогда и только тогда является множеством асимптотической устойчивости некоторого такого семейства, когда оно – $F_{\sigma\delta}$-множество, и множеством устойчивости (множеством экспоненциальной устойчивости), когда оно – F_{δ}-множество.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость, система $<\mu>_A$ семейства (*).

We consider continuous dependence of family of linear differential systems on a real parameter with continuous and uniformly bounded on the half coefficients. Set of stable, asymptotic stability and exponential stability of the family is the set of all those values of the parameter for which they meet the family stable system asymptotically stable or exponentially stable. It is proved that the set of the real axis is the set of asymptotic stability of some of the family when it is the set, and the set of sustainability (the set of exponential stability), when it is F_σ the set.

Keywords: asymptotic stability, exponential stability, system $<\mu>_A$ of family (*).

Рассмотрим однопараметрическое семейство n-мерных линейных дифференциальных систем

$$dx/dt = A(t,\mu)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \; t \ge 0, \qquad (*)$$

где матрица $A(\cdot,\cdot):[0,+\infty)\times\mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных и при каждом фиксированном $\mu \in \mathbb{R}$ ограничена на временно́й полуоси $t \ge 0$ своей, вообще говоря, для каждого μ постоянной: $\sup_{t\ge 0}\|A(t,\mu)\| \le c_\mu < +\infty$.

Класс всех таких однопараметрических семейств обозначим через K_n. Фиксируя в семействе (*) параметр μ, получаем линейную дифференциальную систему, которую ниже обозначаем через $<\mu>_A$. Пусть $\mathfrak{S}$ – некоторое свойство линейных дифференциальных систем с непрерывными и ограниченными на полуоси коэффициентами (основной интерес для нас будут представлять асимптотические свойства [1] этих систем, то есть свойства, инвариантные относительно преобразований Ляпунова [2, с. 42; 3, с. 243]). Что может представлять собой множество всех тех $\mu \in \mathbb{R}$, при которых система $<\mu>_A$ этого семейства обладает свойством $\mathfrak{S}$?

Этот вопрос поставлен и рассмотрен в [4] для свойства $\mathfrak{S}$ правильности по Ляпунову в случае линейной мультипликативной зависимости матрицы $A(t,\mu)$ семейства от параметра: $A(t,\mu) \equiv \mu A(t)$ при всех $t \in [0,+\infty)$ и $\mu \in \mathbb{R}$. В этом случае в [4] показано, что множество P_A тех μ, при которых система $<\mu>_A$ правильна, может быть как счетным, так и континуальным, отличным от $\mathbb{R}$, а в [5] доказано, что множество P_A должно быть $F_{\sigma\delta}$-множеством (при этом доказательство последнего факта в [5] существенно использует специфику указанной зависимости от параметра, а значит, для общих семейств (*) дает только оценку снизу номера борелевского класса, которому принадлежат множества P_A, $A \in K_n$).

В статье дан полный ответ на поставленный выше вопрос для свойств устойчивости, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости.

Теорема 1. *Для любого семейства (*) из K_n множество Sa_A тех μ, при которых система $<\mu>_A$ этого семейства асимптотически устойчива, является $F_{\sigma\delta}$-множеством. Обратно, для любого $F_{\sigma\delta}$-множества $M \subset \mathbb{R}$ существует такое семейство (*) из K_n, множество Sa_A которого совпадает с множеством M.*

Доказательство. 1. Для каждой упорядоченной пары $(k,m) \in \mathbb{N}^2$ обозначим через $S(k,m)$ множество

$$\{\mu \in \mathbb{R} : \| X_\mu(k,0) \| \le m^{-1}\},$$

где $X_\mu(\cdot,\cdot)$ – матрица Коши системы $<\mu>_A$ семейства (*). Поскольку отображение $u \mapsto \| X_\mu(k,0) |$ непрерывно ($k = \mathrm{fix}$), то множество $S(k,m)$ замкнуто. Система $<\mu>_A$ семейства (*) асимптотически устойчива (см. равенство в (1)), если и только если $\lim\limits_{t\to+\infty} \| X_\mu(t,0) \| = 0$. Так как матрица коэффициентов системы $<\mu>_A$ равномерно ограничена на временно́й полуоси, то в последнем равенстве можно, аналогично [3, с. 537], считать $t \in \mathbb{N}$. Поэтому верно равенство

$$Sa_A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=l}^{\infty} S(k,m),$$

откуда, в силу замкнутости множества $S(k,m)$, для любых $(k,m) \in \mathbb{N}^2$, и вытекает первое утверждение теоремы 1.

2. Пусть $(f_p(\cdot))_{p\in\mathbb{N}}$ – та же последовательность непрерывных функций, что и в доказательстве второй части теоремы 1. Построим по ней новую последовательность $(h_p(\cdot))_{p\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций, определив их равенством:

$$h_p(\mu) = \max\{| f_p(\mu) |, p^{-1}\}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Следующие свойства функций $h_p(\cdot)$ в силу их определения и отмеченных ранее свойств функций $f_p(\cdot)$ очевидны:

$p^{-1} \le h_p(\mu) \le 1$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{N}$,

а также

$$\lim_{p\to+\infty} h_p(\mu) = 0 \text{ для } \mu \in \mathbb{R}$$

и

$$\overline{\lim_{p\to+\infty}} h_p(\mu) > 0 \text{ для } \mu \in \mathbb{R} \setminus M.$$

Зафиксируем на временно́й полуоси какую-либо последовательность $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющую условиям: $T_1 = 0$, $T_k \in \mathbb{N}$ при $k \ge 2$, $T_{k+1}/T_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ и $T_k - T_{k-1} \ge \ln(k/2)$ при всех $k \ge 2$.

Построим семейство (*), для которого $Sa_A = M$. Его матрицу возьмем диагональной: $A(t,\mu) = \mathrm{diag}[a(t,\mu),\ldots,a(t,\mu)]$ при всех $(t,\mu) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Функцию $a(\cdot,\cdot)$ зададим равенствами:

$$a(t,\mu) = (T_{2k} - T_{2k-1})^{-1} \ln\left(h_k(\mu)/h_{k-1}(\mu)\right),$$

если $t \in [T_{2k-1}, T_{2k}]$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$, где считаем $h_0(\mu) \equiv 1$, и $a(t,\mu) \equiv 0$, если $t \in \coprod_{k\in\mathbb{N}} [T_{2k}+1, T_{2k+1}-1]$, $\mu \in \mathbb{R}$. На те единичные отрезки временно́й полуоси, на которых функция $a(\cdot,\cdot)$ пока не определена, продолжим ее при всех $\mu\in\mathbb{R}$ по непрерывности следующим образом:

$$a(t,\mu)=a(T_{2k},\mu)(1+T_{2k}-t)\cos(2\pi t),$$

если $t\in[T_{2k},T_{2k}+1]$, $k\in\mathbb{N}$, $\mu\in\mathbb{R}$,

и $a(t,\mu)=a(T_{2k+1},\mu)(t-T_{2k+1}+1)\cos(2\pi t)$,

если $t\in[T_{2k+1}-1,T_{2k+1}]$, $k\in\mathbb{N}$, $\mu\in\mathbb{R}$.

Вследствие неравенств

$T_{2k}-T_{2k-1}\ge\ln k$ и $k^{-1}\le h_k(\mu)\le 1$

при всех $k\in\mathbb{N}$, $\mu\in\mathbb{R}$ и задания функции $a(\cdot,\cdot)$ очевидно неравенство $|a(t,\mu)|\le 1$ при всех $(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Далее, легко убедиться в справедливости равенств

$$\int_{T_{2k-1}}^{T_{2k}} a(\tau,\mu)\mathrm{d}\tau=\ln\left(h_k(\mu)/h_{k-1}(\mu)\right)$$

и

$$\int_{T_{2k}}^{T_{2k+1}} a(\tau,\mu)\mathrm{d}\tau=0$$

при всех $k\in\mathbb{N}$, $\mu\in\mathbb{R}$.

Стало быть, если $t\in[T_{2k-1},T_{2k}]$, то $\int_0^t a(\tau,\mu)\mathrm{d}\tau\le\max\{\ln h_k(\mu),\ln h_{k-1}(\mu)\}$, а если $t\in[T_{2k},T_{2k+1}]$, то

$$\int_0^t a(\tau,\mu)\mathrm{d}\tau\le\ln h_k(\mu)+1.$$

Поэтому $\exp\int_0^t a(\tau,\mu)\mathrm{d}\tau\to 0$ при $t\to+\infty$, если $\mu\in M$, а значит, система $<\mu>_A$ при $\mu\in M$ асимптотически устойчива.

Если же $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$, то, поскольку

$$\exp\int_0^{T_{2k}} a(\tau,\mu)\mathrm{d}\tau=h_k(\mu),$$

система $<\mu>_A$ не является асимптотически устойчивой. Теорема 1 доказана.

Хотя следующая теорема 2, описывающая множества S_A и Se_A семейств $A\in K_n$, может быть доказана в своей конструктивной части так же, как и теорема 1, мы, стремясь разнообразить способы построения семейств (*) с нужными свойствами, докажем ее иначе, воспользовавшись приемом, примененным впервые в [11] и использованным с аналогичной целью в [4]. Для этого нам понадобится одна лемма, содержащая небольшое усиление теоремы В. Серпинского [8, с. 262], уточняющее возможный тип сходимости последовательности непрерывных функций в точках их поточечной сходимости.

Скажем, что числовая последовательность $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется, если она, начиная с некоторого номера, является стационарной последовательностью. Если последовательность $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется и $a_k=a$ для всех k, начиная с некоторого, то скажем, что последовательность $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется к числу a.

Лемма. *Для любой последовательности* $(\varphi_m(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ *непрерывных функций* $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *множество* C *тех* μ, *для которых числовая последовательность* $(\varphi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ *стабилизируется, является* F_σ*-множеством. Обратно, для любого* F_σ*-множества* $M\subset\mathbb{R}$ *существует последовательность*

$$(\varphi_m(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$$

непрерывных равномерно ограниченных функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такая, что ее множество C совпадает с M; при этом указанную последовательность функций можно выбрать как такой, чтобы для каждого $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$ числовая последовательность $(\varphi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ сходилась, так и такой, чтобы она для каждого $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$ расходилась.

Доказательство. **1**. Докажем первую часть леммы. Для каждой упорядоченной пары $(k,m)\in\mathbb{N}^2$, где $k<m$, через $F(k,m)$ обозначим множество $\{\mu\in\mathbb{R}:\varphi_k(\mu)=\varphi_m(\mu)\}$. Поскольку функции $\varphi_k(\cdot)$ и $\varphi_m(\cdot)$ по условию непрерывны, то множество $F(k,m)$ замкнуто. Для множества C тех μ, для которых числовая последовательность $(\varphi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется, очевидно в силу определения стабилизируемости равенство $C=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{m=k+1}^{\infty}F(k,m)$, из которого и следует первая часть леммы.

2. Пусть F_σ-множество $M=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F_i$, где F_i – замкнутые множества и без нарушения общности $F_1\subset F_2\subset\ldots$. Функцию $h(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ зададим равенствами:

$h(\mu)=k^{-1}$, если $\mu\in F_k\setminus F_{k-1}$ (считаем $F_0=\varnothing$), и $h(\mu)=0$, если $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$. Так как при отображении h прообраз любого полуинтервала $[r,+\infty)$ замкнут (он либо пуст, либо одно из F_i, либо все $\mathbb{R}$), то функция h полунепрерывна сверху. Поэтому [8, с. 237] существует невозрастающая последовательность $(\psi_m(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такая, что $\lim\limits_{m\to+\infty}\psi_m(\mu)=h(\mu)$ для любого $\mu\in\mathbb{R}$. Поскольку функция $h(\cdot)$ ограничена сверху ($\sup\{h(\mu):\mu\in\mathbb{R}\}\le 1$), то по теореме Р. Бэра в качестве функций $\psi_m(\cdot)$ можно взять [8, с. 238] функции

$$\psi_m(\mu)=\sup\{h_m(z,\mu):z\in\mathbb{R}\},$$

где (1)

$$h_m(z,\mu)=h(z)-m|\mu-z|.$$

Докажем, что при $\mu\in M$ числовая последовательность $(\psi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется. В самом деле, если $\mu\in M$, то найдется $k\in\mathbb{N}$, для которого $\mu\in F_k\setminus F_{k-1}$. Поэтому $h_m(\mu,\mu)=h(\mu)=k^{-1}$, а значит, вследствие определения (2), верно неравенство $\psi_m(\mu)\ge k^{-1}$. Но если $z\notin F_k$, то $h_m(z,\mu)<h(z)<k^{-1}$. Следовательно, supremum в определении (2) при $\mu\in F_k\setminus F_{k-1}$ реализуется на точках $z\in F_k$. Ясно, что при $z\in F_k\setminus F_{k-1}$ значение $h_m(z,\mu)$ не больше k^{-1}. Пусть поэтому $z\in F_{k-1}$. Обозначим $\max\{|\mu-z|:z\in F_{k-1}\}\overset{\text{def}}{=}\rho(\mu)$ (так как F_{k-1} замкнуто, то max достигается, а так как $\mu\notin F_{k-1}$, то $\rho(\mu)>0$). Но легко убедиться, что при любом $m\ge[(k-1)/\rho(\mu)k]+1$, где $[\ldots]$ – целая часть, выполнено неравенство $h_m(z,\mu)<k^{-1}$.

Стало быть, если $\mu\in F_k\setminus F_{k-1}$, последовательность $(\psi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется к числу k^{-1}.

Положим, $\mu\in\mathbb{R}$. Тогда функции $\varphi_m^1(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ положительны и непрерывны и из предыдущего легко вытекает, что числовая последовательность $(\varphi_m^1(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ не возрастает и при любом μ сходится: причем, если $\mu\in M$, она стабилизируется к числу, обратному некоторому (своему для каждого μ) натуральному числу, а если $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$, она сходится к нулю и, поскольку $\varphi_m^1(\mu)\ge m^{-1}$, к нулю она не стабилизируется. Поэтому для этой последовательности функций ее множество C совпадает с множеством M, а множество точек сходимости – с $\mathbb{R}$.

Построим теперь последовательность $(\varphi_m(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций, для которой множество $C=M$, а множество точек расходимости совпадает с $\mathbb{R}\setminus M$. Для этого сначала рассмотрим неубывающую последовательность $(\varphi_m^2(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ положительных непрерывных функций, определив их равенством $\varphi_m^2(\mu)=1+2/\varphi_m^1(\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$. Вследствие предыдущего числовая последовательность $(\varphi_m^2(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ при $\mu\in M$ стабилизируется к некоторому (своему для каждого $\mu\in\mathbb{N}$) нечетному числу, а при $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$ сходится к $+\infty$. Так как $3\le\varphi_m^2(\mu)\le 2m+1$, то $0\le\varphi_{m+1}^2(\mu)-\varphi_m^2(\mu)\le 2m$ при всех $\mu\in\mathbb{R}$.

Аналогично [8, с. 261–262], вставляя между функциями $\varphi_m^2(\cdot)$ и $\varphi_{m+1}^2(\cdot)$ еще 2^m-1 функций с дробными индексами:

$$\varphi_{m+j}^2(\cdot)=\varphi_m^2(\cdot)+j(\varphi_{m+1}^2(\cdot)-\varphi_m^2(\cdot)),$$

где j пробегает арифметическую (свою для каждого m) прогрессию 2^{-m}, $2\cdot2^{-m}$, ..., $(2^m-1)2^{-m}$, и нумеруя первоначальные и вставленные функции по порядку натуральными числами, получим новую неубывающую последовательность положительных непрерывных функций, которую обозначим через $(\varphi_m^3(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$. Вследствие отмеченных выше свойств последовательности $(\varphi_m^2(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ получаем, что числовая последовательность $(\varphi_m^3(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ при каждом $\mu\in M$ стабилизируется к некоторому нечетному числу, а при $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$ сходится к + ∞, причем вставленные функции гарантируют, что для каждого фиксированного $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$ и любого $m\in\mathbb{N}$ найдется такое число $k(\mu,m)$, что в каждый отрезок $[k+2^{-m},k+2^{-m+1}]$ при всех натуральных $k\geq k(\mu,m)$ попадает хотя бы одно из чисел $\varphi_m^3(\mu)$, $\in$. Искомые непрерывные функции $\varphi_m(\cdot)$, $m\in\mathbb{N}$, определим равенством

$$\varphi_m(\mu)=\cos(\pi\varphi_m^3(\mu)/2),\ \mu\in\mathbb{R}.$$

Тогда в силу предыдущего числовая последовательность $(\varphi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$, если $\mu\in M$, стабилизируется к 0, а если $\in$, ее верхний и нижний равны соответственно 1 и -1. Доказательство последнего факта – такое же, как в [8, с. 262]: действительно, поскольку для каждого $m\in\mathbb{N}$ и любого $k\in\mathbb{N}$, большего $k(\mu,m)$, в отрезок $[k+2^{-m},k+2^{-m+1}]$ попадает хотя бы одно из чисел $\varphi_m^3(\mu)$, то для таких *K*, кратных 4, имеем $\varphi_m(\mu)\geq\cos(2^{-m}\pi)$, а для k, кратных 2, но не 4, $\varphi_m(\mu)\leq-\cos(2^{-m}\pi)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любого семейства (*) из K_n множества S_A и Se_A тех μ, при которых система $<\mu>_A$ этого семейства соответственно устойчива и экспоненциально устойчива, являются F_σ-множествами. Обратно, для любого F_σ-множества $M\subset\mathbb{R}$ существует семейство (*) из K_n, такое, что каждое из множеств S_A и Se_A которого совпадает с множеством M.*

Доказательство. 1. Для каждой упорядоченной пары $(k,m)\in\mathbb{N}^2$ обозначим через *E*(*k*, *m*) множество $\{\mu\in\mathbb{R}:\|X_\mu(k,0)\|\leq\exp(-k/m)\}$, где $X_\mu(\cdot,\cdot)$ – матрица Коши системы $<\mu>_A$ семейства (*). Поскольку отображение $\mu\mapsto\|X_\mu(k,0)\|$ непрерывно ($k=\text{fix}$), то множество *E*(*k*, *m*) замкнуто. Система $<\mu>_A$ семейства (*) экспоненциально устойчива (см. последнее неравенство в (1)), если и только если $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|X_\mu(t)\|<0$.

Так как матрица коэффициентов системы $<\mu>_A$ равномерно ограничена на временной полуоси, то в последнем неравенстве можно считать $t\in\mathbb{N}$ [3, с. 537]. Поэтому $Se_A=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\bigcap_{k=l}^{\infty}E(k,m)$, откуда, в силу замкнутости множества $E(k,\ m)$ для любых $(k,m)\in\mathbb{N}^2$, и вытекает, что Se_A является F_σ-множеством.

Аналогично, обозначив для каждой упорядоченной пары $(k,m)\in\mathbb{N}^2$ через $E(k,\ m)$ множество $\{\mu\in\mathbb{R}:\|X_\mu(k,0)\|\leq m\}$, получаем, что $S_A=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F(k,m)$, откуда, в силу замкнутости множеств $F(k,m)$ для любых $(k,m)\in\mathbb{N}^2$, и вытекает принадлежность множества S_A классу F_σ. Первая часть теоремы 2 доказана.

2. Для доказательства второй части теоремы 2 зафиксируем согласно лемме какую-либо последовательность $(\varphi_m(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такую, что множество C тех μ, при которых числовая последовательность $(\varphi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется, совпадает с заданным F_σ-множеством M. При этом вследствие доказательства леммы можно считать, что $\varphi_m(\mu)$ при $m \to +\infty$ стабилизируется к 0, если $\mu \in M$, и что $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \varphi_m(\mu) = 1$, если $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$. Зафиксируем также какую-нибудь последовательность $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек временнóй полуоси, удовлетворяющую условиям: $T_1 = 0$, $T_{2k+1} - T_{2k} = T_{2k} - T_{2k-1} - 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $T_{2k}/T_{2k-1} \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Построим вначале двумерное семейство (*), для которого $S_A = Se_A = M$. Для этого построим сначала вспомогательную 2 × 2-матрицу $A^0(t,\mu)$, непрерывную по μ (при любом $t = \text{fix} \geq 0$) и кусочно-непрерывную по t (при любом $\mu = \text{fix}$). Позже мы легко подправим ее до нужной непрерывной по совокупности переменных матрицы *A*(*t*, μ). При всех $\mu \in \mathbb{R}$ положим:

$$A^0(t,\mu) = \operatorname{diag}[-3,-1],$$

если $t \in [T_{2k-1}, T_{2k} - 1)$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$A^0(t,\mu) = \operatorname{diag}[2,0],$$

если $t \in (T_{2k}, T_{2k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$, а также

$$A^0(t,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \pi\varphi_k(\mu)/2 \\ -\pi\varphi_k(\mu)/2 & 0 \end{pmatrix},$$

если $t \in [T_{2k} - 1, T_{2k}]$, $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим семейство

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A^0(t,\mu)x$$

и его систему $<\mu>_{A^0}$.

Если $\mu \in M$, то система $<\mu>_{A^0}$ экспоненциально устойчива. Действительно, поскольку в этом случае на отрезках $[T_{2k} - 1, T_{2k}]$ при всех k, начиная с некоторого (своего для каждого $\mu \in M$), матрица $A^0(t,\mu)$ тождественно нулевая, то система $<\mu>_{A^0}$ при всех достаточно больших t диагональна и оба ее показатели Ляпунова, как легко подсчитать, равны $-1/2$. Пусть теперь $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$, и пусть $(k_l(\mu))_{l\in\mathbb{N}}$ – какая-либо (зависящая от μ) последовательность натуральных чисел, для которой $\lim\limits_{l\to+\infty} \varphi_{k_l(\mu)}(\mu) = 1$. Для упрощения записи числа T_{2k-1}, T_{2k} и T_{2k+1} при $k = k_l(\mu)$ обозначим через T_1^l, T_2^l и T_3^l соответственно. Рассмотрим отрезок $[T_1^l, T_3^l]$ и решение $x_l(\cdot)$ системы $<\mu>_{A^0}$ с начальным условием $x_l(T_1^l) = (0,1)^{\mathrm{T}}$. Для этого решения имеем:

$$x_l(T_2^l - 1) = (0, \exp\{-T_2^l + T_1^l + 1\})^{\mathrm{T}}.$$

Так как при $t \in [T_2^l - 1, T_2^l]$ матрица $A^0(t,\mu) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $l \to +\infty$, то вектор $x_l(T_2^l)$ составляет с вектором $(1,0)^{\mathrm{T}}$ угол, не больший при всех достаточно больших l, например, $\pi/6$. Поэтому в силу леммы В. М. Миллионщикова (см., напр., [12, с. 90])

$$|\, x_l(T_3^l) \,\| \geq 4^{-1} \| \, x_l(T_2^l) \,\| \exp\{2(T_3^l - T_2^l)\}.$$

Поэтому

$$\| \, x_l(T_3^l) \,\| \geq$$

$$\geq 4^{-1} \| \, x_l(T_1^l) \,\| \exp\{(T_3^l - T_1^l - 1)/2\} \geq$$

$$\geq 8^{-1} \| \, x(0) \,\| \exp\{-7T_1^l/2 + T_3^l/2\},$$

а значит,

$$\| \, X_\mu(T_3^l, 0) \,\| \geq$$

$$\geq 8^{-1} \| \, x(0) \,\| \exp\{-7T_1^l/2 + T_3^l/2\}.$$

Стало быть, согласно [3, с. 93, 100; 13, с. 170] для старшего показателя $\lambda_2(\mu)$ Ляпунова системы $<\mu>_{A^0}$ получаем оценку:

$$\lambda_2(\mu) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1} \ln \| \, X_\mu(t,0) \,\| \geq$$

$$\geq \lim\limits_{l\to+\infty} (T_3^l)^{-1} \ln \| \, X_\mu(T_3^l, 0) \,\| \geq 1/2,$$

так как $T_1^l/T_3^l \to 0$ при $l \to +\infty$. Следовательно, система $<\mu>_{A^0}$ при $\mu \in \mathbb{R} \setminus M$ не является ни устойчивой, ни экспоненциально устойчивой, а при $\mu \in M$ и устойчивой, и экспоненциально устойчивой.

Подправим теперь построенную 2 × 2-матрицу $A^0(t,\mu)$ до непрерывной по совокупности переменных 2 × 2-матрицы $A(t,\mu)$, $(t,\mu) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$, такой, что для любого $\mu \in \mathbb{R}$ показатели Ляпунова систем $<\mu>_{A^0}$ и $<\mu>_A$ совпадают, а поэтому вследствие установленных выше свойств систем $<\mu>_{A^0}$ для семейства (*) с этой матрицей $A(\cdot,\cdot)$ будем иметь $S_A = Se_A = M$.

Обозначим через Δ_k^1, Δ_k^2 и Δ_k^3 отрезки с центрами в точках $T_{2k}-1$, T_{2k} и T_{2k+1} соответственно и длины

$$|\Delta_k^i| = 2^{-k}\exp\{-8T_{2k+1}\},\quad k \in \mathbb{N},\ i \in \{1,2,3\}.$$

Пусть

$$\Delta_k^i = [\tau_k^i, \tau_k^{i+3}],\quad k \in \mathbb{N},\ i \in \{1,2,3\}.$$

Заменив при всех $\mu \in \mathbb{R}$ на каждом отрезке Δ_k^i матрицу $A^0(t,\mu)$ матрицей

$$A(t,\mu) = |\Delta_k^i|^{-1}\Big(A(\tau_k^i,\mu)(-t+\tau_k^{i+3}) + A(\tau_k^{i+3},\mu)(t-\tau_k^i)\Big),\quad t \in \Delta_k^i,\ k \in \mathbb{N},\ i \in \{1,2,3\},$$

а при остальных t, оставив ее без изменений, получим, как легко видеть, непрерывную по совокупности переменных матрицу $A(t,\mu)$, $(t,\mu) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Тогда каждую систему $<\mu>_A$ можно рассматривать как систему, возмущающую систему $<\mu>_{A^0}$ матрицей-возмущением

$$Q(t,\mu) = A(t,\mu) - A^0(t,\mu),\ t \in [0,+\infty).$$

Поскольку, как очевидно следует из определения матриц $A(\cdot,\cdot)$ и $A^0(\cdot,\cdot)$, при всех $(t,\mu) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\|Q(t,\mu)\| \le 3$, то

$$\int_0^{+\infty} \|Q(\tau,\mu)\|\exp(8\tau)d\tau \le \le 9\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty.$$

Сходимость этого несобственного интеграла, так как коэффициент неправильности Ляпунова [12, с. 81] любой системы $<\mu>_{A^0}$, как легко оценить, не превосходит 7, означает в силу теоремы Богданова – Гробмана [14; 15], что показатели Ляпунова систем $<\mu>_{A^0}$ и $<\mu>_A$ совпадают, а значит, $S_A = Se_A = M$. Нужное семейство (*) при $n = 2$ построено.

Для построения семейства (*) при $n > 2$ достаточно к построенному двумерному семейству присоединить $n-2$ уравнения $dx_i/dt = -x_i$, $i = 3,\ldots,n$.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Богданов, Ю. С.* // Вестн. Белорус. ун-та. 1969. Сер. 1. № 1. С. 10–14.
2. *Ляпунов, А. М.* Собр. соч.: в 6 т. / А. М. *Ляпунов*. – Т. 2. – М. – Л. : Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.
3. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. *Былов* [и др.]. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
4. *Изобов, Н. А., Макаров, Е. К.* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1870–1880.

References

1. *Bogdanov, Yu. S.* // Vestn. Belorus. un-ta. 1969. Ser. 1. № 1. S. 10-14.
2. *Lyapunov, A. M.* Sobr. soch.: v 6 t. / A. M. Lyapunov. – T. 2. – M. – L. : Izd-vo AN SSSR, 1956. – 473 s.
3. Teoriya pokazateley Lyapunova i yeyo prilozheniya k voprosam ustoychivosti / B. F. Bylov [i dr.]. – M. : Nauka, 1966. – 576 s.
4. *Izobov, N. A., Makarova, Ye. K.* // Differents. uravneniya. – 1988. – T. 24. - № 11. – S. 1870-1880.

5. *Макаров, Е. К.* // Докл. АН БССР. – 1989. – Т. 33. – № 4. – С. 302–305.
6. *Миллионщиков, В. М.* // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 8. – С. 1408–1416.
7. *Барабанов, Е. А.* // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 2. – С. 147–157.
8. *Хаусдорф, Ф.* Теория множеств. – М. – Л. : ОНТИ, 1937. – 304 с.
9. *Макаров, Е. К.* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 2. – С. 209–212.
10. *Барабанов, Е. А., Нурматов А. М.* // Асимптотические методы теории сингулярно-возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: тез. докл. – Бишкек, 1991. – С. 111.
11. *Миллионщиков, В. М.* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 4. – С. 749–750.
12. *Изобов, Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. А. *Изобов* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – М. : ВИНИТИ, 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
13. *Далецкий, Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн*. – М. : Наука, 1970. – 536 с.
14. *Гробман, Д. М.* // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30. – № 1. – С. 121–166.
15. *Богданов, Ю. С.* // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 104. – № 6. – С. 813–814.

5. *Makarov, Ye. K.* // Dokl. AN BSSR. – 1989. – T. 33. – № 4. – S. 302–305.
6. *Millionshchikov, V. M.* // Differents. uravneniya. – 1980. – T. 16. – № 8. – S. 1408-1416.
7. *Barabanov, Ye. A.* // Differents. uravneniya. – 2005. – T. 41. – № 2. – S. 147–157.
8. *Khausdorf, F.* Teoriya mnozhestv. – M. – L. : ONTI, 1937. – 304 s.
9. *Makarov, Ye. K.* // Differents. uravneniya. – 1989. – T. 25. – № 2. – S. 209–212.
10. *Barabanov, Ye. A., Nurmatov, A. M.* // Asimptotiheskiye metody teorii singulyarno-vozmushchyonnykh uravneniy i nekorrektno postavlennykh zadach: tez. dokl. – Bishkek, 1991. – S. 111.
11. Millionshchikov, V. M. // Differents. uravneniya. – 1969. – T. 5. – № 4. – S. 749–750.
12. Izobov, N. A. Lineynyye sistemy obyknovennykh differentsialnykh uravneniy / N. A. Izobov // Itogi nauki i tekhniki. Mat. analiz. – M. : VINITI, 1974. – T. 12. – S. 71–146.
13. Daletskiy, Yu. L. Ustoychivost resheniy differentsialnykh uravneniy v banakhovom prostranstve / Yu. L. Daletskiy, M. G. Kreyn. – M. : Nauka, 1970. – 536 s.
14. Grobman, D. M. // Matem. sbornik. – 1952. – T. 30. – № 1. – S. 121–166.
15. Bogdanov, Yu. S. // Dokl. AN SSSR. – 1955. – T. 104. – № 6. – S. 813–814.