МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2018. № 4. С. 11–14.

УДК 517.968.25

ІНТЭГРАЛЬНАЕ ВЫЯЎЛЕННЕ ДЛЯ ГІПЕРКАМПЛЕКСНЫХ F-МАНАГЕННЫХ ФУНКЦЫЙ АДНАГО КЛАСА

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі БДПУ

Паступіў у рэдакцыю 22.10.18

UDC 517.968.25

INTEGRAL REPRESENTATION FOR HYPERCOMPLEX F-MONOGENIC FUNCTIONS OF ONE CLASS

V. Shilinets,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics of Higher Educational Establishment of the Federation of Trade Unions of Belarus «International University «MITSO»;

I. Gulo,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, BSPU

Received on 22.10.18

Для гіперкамплексных F-манагенных функцый аднаго класа атрымана інтэгральнае выяўленне і рэшана краявая задача.

Ключавыя словы: гіперкамплексная функцыя, манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, інтэгральнае выяўленне, краявая задача.

For hypercomplex functions of one class the integral representation is obtained and the boundary value problem is solved.

Keywords: hypercomplex function, monotonicity in the sense of V. S. Fedorov, integral representation, solution of the boundary value problem.

Уводзіны. Для вывучэння дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных выкарыстоўваюцца розныя метады. Адным з такіх метадаў з’яўляецца метад функцый, манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенных) [1–8]. У прыватнасці, пры дапамозе F-манагенных функцый удаецца пабудаваць функцыянальна-інварыянтныя рашэнні сістэмы Максвэла для электрамагнітнага поля ў пустаце [9; 10]. Акрамя гэтага, пры дапамозе адзначаных функцый удаецца для асобных відаў дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў будаваць рашэнні ў замкнутай форме.

У дадзенай працы даследуюцца F-манагенныя гіперкамплексныя функцыі аднаго класа. Для гэтых функцый атрымана інтэгральнае выяўленне, пры дапамозе якога рэшана краявая задача.

Асноўная частка. Няхай D – адназвязны абсяг чатырохмернай рэчаіснай эўклідавай прасторы $E^4(x,y,z,t)$. Разгледзім гіперкамплексныя функцыі выгляду

$$f = f_1(x,y,z,t) + f_2(x,y,z,t)j + $$
$$+ f_3(x,y,z,t)j^2 + f_4(x,y,z,t)j^3,$$

$$p = x + yj + zj^2 + tj^3,$$

дзе f_1, f_2, f_3, f_4 – рэчаісныя функцыі класа $C^1(D)$; $1, j, j^2, j^3$ – базіс асацыятыўна-камутатыўнай алгебры над полем рэчаісных лікаў з законам множання $j^4 = -1$.

Для любых пунктаў $M(x,y,z,t)$ і $M'(x',y',z',t')$ абсягу D мяркуем

$$\Delta f = f(M') - f(M), \quad \Delta p = p(M') - p(M).$$

Азначэнне. Гіперкамплексная функцыя называецца манагеннай у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагеннай) [1] па гіперкамплекснай функцыі p у абсягу D, калі існуе такая гіперкамплексная функцыя

$$\theta = \theta_1(x,y,z,t)+\theta_2(x,y,z,t)j+ \\ +\theta_3(x,y,z,t)j^2+\theta_4(x,y,z,t)j^3$$

($\theta_i(x,y,z,t)(i=1,2,3,4)$ – адназначныя рэчаісныя функцыі пункта (x, t, z, t) абсягу D), што для любога фіксаванага пункта $M \in D$ і любога зменнага пункта $M \in D$ маем

$$\Delta f=\Delta p\theta(M)+\alpha(M,M'), \text{ дзе } \frac{\alpha(M,M')}{\rho}\to 0$$

$$\text{пры } \rho\to 0 \quad \rho=\left|\overline{MM'}\right|.$$

Лёгка паказаць, што калі функцыя f – F-манагенная па функцыі p у абсягу D, то існуюць частковыя вытворныя $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial t}$, і пры гэтым

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}\theta, \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}\theta, \frac{\partial f}{\partial z}= \\ =\frac{\partial p}{\partial z}\theta, \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\theta.$$

Абазначым функцыю θ праз $\frac{\partial f}{\partial p}$. Тады апошнюю роўнасць можна запісаць у выглядзе

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Разгледзім наступную краявую задачу.

Задача. Няхай V – чатырохмерны абмежаваны абсяг з граніцай σ $(\sigma\subset D, V\subset D)$. Мяркуем далей, што p і функцыя f, F-манагенная па p, вызначаны на замкнутай трохмернай паверхні σ, гомеаморфнай сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкай для магчымасці скарыстаць формулу Астраградскага.

Патрабуецца знайсці ў любым унутраным пункце абсягу V значэнне функцыі f, F-манагеннай па p, калі вядомы яе значэнні на паверхні .

Для функцыі пры

$$f=f_1(x,y,z,t)+f_2(x,y,z,t)j+ \\ +f_3(x,y,z,t)j^2+f_4(x,y,z,t)j^3$$

і адвольнага пункта $M(x_0,y_0,z_0)\notin\sigma$ лічым [11]:

$$I_\sigma=\int_\sigma\{\alpha_1(\frac{\partial\phi}{\partial x}-j\frac{\partial\phi}{\partial y}-j^2\frac{\partial\phi}{\partial z}-j^3\frac{\partial\phi}{\partial t})+ \\ +\alpha_2(j\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y})+\alpha_3(j^2\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z})+ \\ +\alpha_4(j^3\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t})\}fd\sigma, \quad (1)$$

дзе $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да паверхні у яе бягучым пункце $P(x,y,z,t)$, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2}$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{x-x_0}{r^4}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{y-y_0}{r^4}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{z-z_0}{r^4}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{t-t_0}{r^4}.$$

Няхай M – любы дадзены пункт абсягу D, $M\notin\bar{V}$.

Тэарэма 1. Для любой гіперкамплекснай функцыі f, F-манагеннай па гіперкамплекснай функцыі p у абсягу D, маем $I_\sigma=0$, дзе I_σ вызначаецца роўнасцю (1).

Доказ. Па формуле Астраградскага атрымоўваем

$$I_\sigma=\int_V\{\frac{\partial}{\partial x}((\frac{\partial\phi}{\partial x}-j\frac{\partial\phi}{\partial y}-j^2\frac{\partial\phi}{\partial z}-j^3\frac{\partial\phi}{\partial t})f)+ \\ +\frac{\partial}{\partial y}((j\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y})f)+\frac{\partial}{\partial z}((j^2\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z})f)+ \\ +\frac{\partial}{\partial t}((j^3\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t})f)\}dV= \\ =\int_V\{(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-j\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}-j^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}-j^3\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x})f+ \\ +(\frac{\partial\phi}{\partial x}-j\frac{\partial\phi}{\partial y}-j^2\frac{\partial\phi}{\partial z}-j^3\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial x}+ \\ +(j\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2})f+(j\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial y}+ \\ +(j^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2})f+ \\ +(j^2\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial z}+(j^3\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2})f+ \\ +(j^3\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial t}\}dV=$$

$$= \int_V \{(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2})f +$$

$$+(\frac{\partial\phi}{\partial x} - j\frac{\partial\phi}{\partial y} - j^2\frac{\partial\phi}{\partial z} - j^3\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial x}+$$

$$+(j\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial y}+$$

$$+(j^2\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial z}+(j^3\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial t}\}dV.$$

Адсюль і з умоў F-манагеннасці функцыі f па функцыі p у абсягу D, паколькі $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0,$ атрымоўваем

$$I_\sigma = \int_V \{(\frac{\partial\phi}{\partial x} - j\frac{\partial\phi}{\partial y} - j^2\frac{\partial\phi}{\partial z} - j^3\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial p}+$$

$$+(j\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial p}j+(j^2\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial p}j^2+$$

$$+(j^3\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial p}j^3\}dV=$$

$$= \int_V \{(\frac{\partial\phi}{\partial x} - j\frac{\partial\phi}{\partial y} - j^2\frac{\partial\phi}{\partial z} - j^3\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial p}+$$

$$+(j^2\frac{\partial\phi}{\partial x}+j\frac{\partial\phi}{\partial y})\frac{\partial f}{\partial p}+(-\frac{\partial\phi}{\partial x}+j^2\frac{\partial\phi}{\partial z})\frac{\partial f}{\partial p}+$$

$$+(-j^2\frac{\partial\phi}{\partial x}+j^3\frac{\partial\phi}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial p}\}dV=0.$$

Тэарэма 2. Калі гіперкамплексная функцыя f з'яўляецца F-манагеннай па гіперкамплекснай функцыі p у абсягу D, то для любога пункта M, які ляжыць унутры V, маем

$$f(M)=\frac{1}{2\pi^2}\int_\sigma\{(\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial\phi}{\partial z}+\alpha_4\frac{\partial\phi}{\partial t})+$$

$$+(\alpha_2\frac{\partial\phi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial y})j+(\alpha_3\frac{\partial\phi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial z})j^2+$$

$$+(\alpha_4\frac{\partial\phi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial t})j^3\}fd\sigma.$$

Доказ. Няхай σ_1 – сфера з цэнтрам у пункце $M(x_0,y_0,z_0,t_0)$, якая размешчана ўнутры σ. Калі L – радыус сферы σ_1, то маем

$$I_{\sigma_1}=\int_{\sigma_1}\{(\alpha_1+\alpha_2 j+\alpha_3 j^2+\alpha_4 j^3)\frac{\partial\phi}{\partial x}+$$

$$+(\alpha_2-\alpha_1 j)\frac{\partial\phi}{\partial y}+$$

$$+(\alpha_3-\alpha_1 j^2)\frac{\partial\phi}{\partial z}+(\alpha_4-\alpha_1 j^3)\frac{\partial\phi}{\partial t}\}fd\sigma_1=$$

$$=\int_{\sigma_1}\{(\alpha_1+\alpha_2 j+\alpha_3 j^2+\alpha_4 j^3)\frac{x-x_0}{l^4}+$$

$$+(\alpha_2-\alpha_1 j)\frac{y-y_0}{l^4}+$$

$$+(\alpha_3-\alpha_1 j^2)\frac{z-z_0}{l^4}+(\alpha_4-\alpha_1 j^3)\frac{t-t_0}{l^4}\}fd\sigma_1=$$

$$=\int_{\sigma_1}\{\frac{1}{l^3}(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2 j+\alpha_1\alpha_3 j^2+\alpha_1\alpha_4 j^3+$$

$$+\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2 j+$$

$$+\alpha_3^2-\alpha_1\alpha_3 j^2+\alpha_4^2-\alpha_1\alpha_4 j^3)\}fd\sigma_1= \quad (2)$$

$$=\int_{\sigma_1}\{\frac{1}{l^3}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)\}fd\sigma_1.$$

Вядома, што $\sum_{k=1}^{4}\alpha_k^2=1$, $d\sigma_1=l^3 d\omega$ ($d\omega$ – элемент адзінкавай сферы).

З роўнасці (2) атрымаем

$$f(M)=\frac{1}{2\pi^2}I_{\sigma_1} \quad (3)$$

З тэарэмы 1 вынікае, што $I_{\sigma_1}=I_\sigma$. Тады з роўнасці (3) маем

$$f(M)=\frac{1}{2\pi^2}\int_\sigma\{(\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\phi}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial\phi}{\partial z}+$$

$$+\alpha_4\frac{\partial\phi}{\partial t})+(\alpha_2\frac{\partial\phi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial y})j+ \quad (4)$$

$$+(\alpha_3\frac{\partial\phi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial z})j^2+(\alpha_4\frac{\partial\phi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\phi}{\partial t})j^3\}fd\sigma.$$

Заключэнне. Пры дапамозе пабудаванага ў тэарэме 2 інтэгральнага выяўлення (4) і рашаецца сфармуляваная краявая задача.

Літаратура

1. Федоров, В. С. Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958.– № 6.– С. 257–265.
2. Павлов, С. Д. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью моногенных функций в смысле В. С. Фе-

References

1. Fyodorov, V. S. Osnovnyye svoystva obobshchyonnykh monogennykh funktsiy / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958. - № 6. – S. 257–265.
2. Pavlov, S. D. Resheniye sistem lineynykh differentsialnykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi s pomoshchyu monogennykh funktsiy v smysle V. S. Fyodorova

дорова / С. Д. Павлов // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962.– F. 2. – T. 8.– P. 323–329.
3. Стельмашук, Н. Т. О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – № 1.– Т. 5. – С. 166–173.
4. Кусковский, Л. Н. О краевой задаче типа Римана – Гильберта / Л. Н. Кусковский // Дифференциальные уравнения. – 1975. – № 3.– Т. 11.– С. 523–532.
5. Стельмашук, Н. Т. Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 11. – С. 2019–2020.
6. Stelmashuk, N. T. The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators /N. T. Stelmashuk, V. A. Shylinets // Труды института математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2.– Т. 12.– С. 170–171.
7. Стельмашук, Н. Т. О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2.– С. 61–65.
8. Шылінец, У. А. Аб рэдуцыраванні адной сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных да кананічнага выгляду / У. А. Шылінец, І. М. Гуло // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2018. – № 2. – С. 5–9.
9. Стельмашук, Н. Т. Об одном исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций / Н. Т. Стельмашук // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967.– № 2. – Т. 7. – С. 431–436.
10. Стэльмашук, М. Т. Пабудова інтэгральных выяўленняў для функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў Максвэла / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1999.– № 2.– С. 147–150.
11. Федоров, В. С. Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1957.– №1.– С. 227–233.

/ S. D. Pavlov // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962.– F. 2.– T. 8.– P. 323–329.
3. Stelmashuk, N. T. O nekotorykh lineynykh differentsialnykh sistemakh v chastnykh proizvodnykh / N. T. Stelmashuk // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. – 1964.– № 1.– T. 5.– S. 166–173.
4. Kuskovskiy, L. N. O krayevoy zadache tipa Rimana-Gilberta / L. N. Kuskovskiy // Differentsialnyye uravneniya. – 1975.– № 3.– T. 11. – S. 52–532.
5. Stelmashuk, N. T. Metod formalnykh proizvodnykh dlya resheniya zadachi Koshi dlya odnoy sistemy differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Differentsialnyye uravneniya. – 1993. – № 11. – T. 29. – S. 2019–2020.
6. Stelmashuk, N. T. The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N. T. Stelmashuk, V. A. Shylinets // Trudy instituta matematiki NAN Belarusi. – 2004. – № 2.– T. 12. – S. 170–171.
7. Stelmashuk, N. T. O preobrazovanii k kanonicheskomu vidu sistemy lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s pomoshchyu dvoynykh differentsialnykh operatorov / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 61–65.
8. Shylinets, U. A. Ab redutsyravanni adnoy sistemy dyferentsyyalnykh raunannyay u chastkovykh vytvornykh da kananichnaga vyglyadu / U.A. Shylinets, I. M. Gulo // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2018. – № 2.– S. 5–9.
9. Stelmashuk, N. T. Ob odnom issledovanii sistemy Maksvella s pomoshchyu F-monogennykh funktsiy / N. T. Stelmashuk // Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki. – 1967. – № 2. – T. 7. – S. 431–436.
10. Stelmashuk, M. T. Pabudova integralnykh vyyaulennyau dlya funktsyyanalna-invaryyantnykh rashennyau sistemy dyferentsyyalnykh raunannyau Maksvela / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets // Vestsi BDPU. – 1999. – № 2. – S. 147–150.
11. Fyodorov, V. S. Ob odnom obobshchenii integrala tipa Koshi v mnogomernom prostranstve / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1957. – № 1. – S. 227–233.