ФІЗІКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2018. № 4. С. 5–10.

УДК 530.12.01

ОДНОМЕРНЫЕ (1+1) РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МОДЕЛИ

А. Н. Лавренов,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий в образовании БГПУ

UDC 530.12.01

ONE-DIMENSIONAL (1+1) RELATIVISTIC MODELS

A. Lavrenov,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Informational Technologies in Education, BSPU

Поступила в редакцию 16.10.18.

Received on 16.10.18

В статье проанализированы одномерные (1+1) релятивистские модели для спинов 0, 1/2, 1 и мультиспином 0,1. Получены шредингероподобные выражения для гамильтониана. Описание дано в унифицированной форме волновых уравнений первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры.

Ключевые слова: одномерные релятивистские модели, волновые уравнения первого порядка, спин, мультиспин, обобщенная матричная алгебра, гамильтониан.

The one-dimensional (1+1) relativistic models for spins 0, 1/2, 1 and a multispin 0,1 are analysed. The matrix Hamiltonian form of equations is obtained after the exclusion of the nondynamical components. The description is given in the unified form of the first order wave equations by means of the generalized matrix algebra.

Keywords: one-dimensional relativistic models, first order wave equations, spin, multispin, the generalized matrix algebra, Hamiltonian.

Введение. В последние время одномерные модели [1–2] стали более привлекательны для теоретических исследований по нескольким причинам. Нельзя не отметить методологический аспект таких моделей, когда из-за простоты их рассмотрения они служат удобным наглядным примером различных аспектов обсуждения. Появление практических возможностей построения наноструктур в квантовых точках или на плоскости делает рассматриваемые модели особо актуальными. Еще одной причиной может служить природная реализация таких моделей в сильном электромагнитном поле, когда одно из измерений становится наиболее существенным по сравнению с другими. Такую ситуацию можно иметь не только в земных лабораторных условиях, но и в галактических масштабах при черных дырах. Цель данной работы – двоякая. С одной стороны, будет предпринята попытка в унифицированном виде подойти к описанию одномерных моделей для спинов 0, 1/2, 1 и для мультиспина 0,1 в рамках уравнений первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры. Такое теоретическое описание элементарных частиц методически полезно для первоначального знакомства с эффективным общим подходом, предложенным Ф. И. Федоровым [3]. В его рамках получение шредингероподобных выражений для гамильтониана свободных частиц с исключением нединамической компоненты позволяет заложить основу для последующего анализа поведения частиц во внешнем поле или их взаимодействия, что составляет вторую цель этой работы. Изложение дано последовательно для вышеуказанных значений (мульти) спина с 1 по 4 пункт основной части.

Основная часть.

1. Нулевой спин. В данном случае нулевого спина отправным уравнением является скалярное уравнение Клейна – Фока второго порядка в двумерном релятивистском пространстве $\{(x_k) = (x_1, x_2) = (it, x_2)\}$, k = {1, 2}[3]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - m^2\right]\varphi_0 \equiv \left[\partial_1^2 + \partial_2^2 - m^2\right]\varphi_0 = 0; \quad (1)$$

Вводя функции $\varphi_k^T \equiv (\varphi_1, \varphi_2) \equiv (\varphi_k)$ путем соотношений:

$$\partial_1\varphi_0 + m\varphi_1 = 0; \quad \partial_2\varphi_0 + m\varphi_2 = 0$$
$$\text{или} \quad \partial_k\varphi_0 + m\varphi_k = 0,$$

можно привести исходное уравнение (1) к следующему виду:

$$\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + m\varphi_0 = 0 \quad \text{или} \quad \partial_k\varphi_k + m\varphi_0 = 0.$$

Здесь и далее подразумевается, если не оговорено противное, суммирование по повторяющимся индексам. Таким образом, из одного уравнения второго порядка получается для трехкомпонентной функции

$$\varphi^T = (\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2) = (\varphi_0,\varphi_k) \qquad (2)$$

система трех уравнений первого порядка (здесь и далее дается обобщение для двух значений массы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, то есть $m^2 = \varkappa_1 * \varkappa_2$):

$$\begin{aligned} &\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + \varkappa_2\varphi_0 = 0 \\ &\quad \partial_1\varphi_0 + \varkappa_1\varphi_1 = 0; \\ &\quad \partial_2\varphi_0 + \varkappa_1\varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} &\partial_k\varphi_k + \varkappa_2\varphi_0 = 0 \\ &\partial_k\varphi_0 + \varkappa_1\varphi_k = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Если ввести матричные обозначения, то вышеприведенная система (3) может принять следующую унифицированную форму уравнений первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры

$$\begin{bmatrix} \varkappa_2 & \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_1 & \varkappa_1 & 0 \\ \partial_2 & 0 & \varkappa_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\partial_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\partial_2 + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\varkappa_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\varkappa_2 \right\}\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left\{ (\varepsilon^{01} + \varepsilon^{10})\partial_1 + (\varepsilon^{02} + \varepsilon^{20})\partial_2 + \varkappa_1(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22}) + \right.$$

$$\left. + \varkappa_2\varepsilon^{00}) \right\}\varphi(x) \equiv (\alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2)\varphi(x) = 0$$

или

$$\begin{bmatrix} \varkappa_2 & \partial_k \\ \partial_k & \varkappa_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_k \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (\partial_k\delta_{kB} + \varkappa_2\delta_{0B})\delta_{0A} \\ (\partial_k\delta_{0B} + \varkappa_1\delta_{kB})\delta_A \end{bmatrix}\varphi_B(x) \equiv$$

$$\equiv \left[\partial_k\left(\varepsilon^{0k} + \varepsilon^{k0}\right) + \varkappa_1\varepsilon^{kk} + \varkappa_2\varepsilon^{00} \right]_{AB}\varphi_B(x) \equiv \qquad (4)$$

$$\equiv (\alpha_k\partial_k + \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2)\varphi(x) = 0$$

Выше были введены представление волновой функции $\varphi(x) = \{\varphi_A(x)\}$, где $A = \{0,k\} \equiv \{0,1,2\}$, и элементы обобщенной матричной алгебры:

$$\alpha_1 = \varepsilon^{01} + \varepsilon^{10};\ \ \alpha_2 = \varepsilon^{02} + \varepsilon^{20};$$

$$P_1 = \varepsilon^{11} + \varepsilon^{22};\ \ P_2 = \varepsilon^{00}$$

или

$$(\varepsilon^{AB})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD};\ \ \varepsilon^{AB}\varepsilon^{CD} = \delta_{BC}\varepsilon^{AD};$$

$$\alpha_k = \varepsilon^{0k} + \varepsilon^{k0};\ \ \alpha_k^3 = \alpha_k;$$

$$P_1 = \varepsilon^{kk};\ P_1^2 = P_1;\ P_2 = \varepsilon^{00};\ P_2^2 = P_2;\ P_1 + P_2 = 1;$$

$$\alpha_k\alpha_l = \varepsilon^{kl} + \delta_{kl}\varepsilon^{00};\ \ \alpha_k\alpha_l\alpha_m + \alpha_m\alpha_l\alpha_k = \delta_{kl}\alpha_m + \delta_{ml}\alpha_k$$

Элементы матрицы ε^{AB} состоят из нулей и только одного единичного элемента, находящегося на пересечении строки *A* и столбца *B*. Запишем уравнение (4) в шредингероподобном виде, выделяя гамильтониан **H**. Для этого необходимо влево перенести временную компоненту и исключить так называемые нединамические компоненты:

$$-\alpha_1\partial_1\varphi(x) \equiv (\alpha_2\partial_2 + \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2)\varphi(x).$$

Умножая данное уравнение на α_1 и $1-\alpha_1^2$, получим соответственно два уравнения

$$-\alpha_1^2\partial_1\varphi(x) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\partial_1\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv -\left\{ (\varepsilon^{00} + \varepsilon^{11})\partial_1 \right\}\varphi(x) \equiv$$

$$\equiv \alpha_1(\alpha_2\partial_2 + \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2)\varphi(x) \equiv$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\partial_2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\varkappa_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\varkappa_2 \right\} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \equiv \left\{ (\varepsilon^{12}\partial_2 + \varepsilon^{01}\varkappa_1 + \varkappa_2\varepsilon^{10}) \right\}\varphi(x)$$

и

$$(1-\alpha_1^2)\alpha_1\partial_1\varphi(x) =$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\partial_1\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv -\left\{ \varepsilon^{22}(\varepsilon^{01} + \varepsilon^{10})\partial_1 \right\}\varphi(x) \equiv$$

$$\equiv -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\partial_1\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \equiv 0 \equiv$$

$$\equiv (1-\alpha_1^2)(\alpha_2\partial_2 + \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2)\varphi(x) =$$

$$\left\{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\partial_2+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\varkappa_1+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\varkappa_2\right\}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\varphi_0\\\varphi_1\\\varphi_2\end{bmatrix}\equiv\{\varepsilon^{20}\partial_2+\varepsilon^{22}\varkappa_1\}\varphi(x).$$

Данные матрицы $R=\alpha_1^2\equiv\varepsilon^{00}+\varepsilon^{11}$ и $\bar{R}=1-\alpha_1^2\equiv\varepsilon^{22}$ являются проекторами, выделяя соответственно динамическую $\Phi=R\varphi$ и нединамическую $\Psi=\bar{R}\varphi$ составляющие в волновой функции φ. Из второго уравнения в общем виде можно получить уравнение для нединамической составляющей $\Psi=\bar{R}\varphi=-\frac{1}{\varkappa_1}\bar{R}\alpha_2\partial_2\Phi\equiv-\frac{1}{\varkappa_1}\varepsilon^{20}\partial_2\Phi.$

Подставляя его в первое уравнение, с учетом свойств матриц получаем следующее уравнение в шредингероподобном виде для динамической составляющей $\Phi=R\varphi$

$$\partial_1\Phi=\mathbf{H}\Phi\equiv$$

$$\equiv-\left\{\alpha_1(\varkappa_1P_1+\varkappa_2P_2)-\frac{1}{\varkappa_1}\alpha_1\alpha_2\bar{R}\alpha_2\partial_2^2\right\}\Phi\equiv \qquad (5)$$

$$\equiv\left\{\varkappa_1\varepsilon^{01}+(\varkappa_2-\frac{1}{\varkappa_1}\partial_2^2)\varepsilon^{10}\right\}\Phi$$

2. Единичный спин. В данном случае единичного спина отправным уравнением примем систему уравнений Прока в двумерном релятивистском пространстве [3]:

$$\partial_l\varphi_{[kl]}+m\varphi_k=0;\ \partial_l\varphi_k-\partial_k\varphi_l+m\varphi_{[kl]}=0$$

или в покомпонентной записи (k, l = {1, 2})

$$\partial_2\varphi_{[12]}+m\varphi_1=0;\quad \partial_1\varphi_{[21]}+m\varphi_2=0;$$

$$\partial_2\varphi_1-\partial_1\varphi_2+m\varphi_{[12]}=0 \qquad (6)$$

Вводя трехкомпонентную функцию $\varphi^T=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_{[12]})\equiv(\varphi_k,\varphi_{[kl]})$ (здесь $\varphi_{[12]}=-\varphi_{[21]}$ – антисимметричный тензор, состоящий из одной компоненты в рассматриваемом пространстве) и матричные обозначения, то вышеприведенную систему Прока (6) можно переписать в виде унифицированной формы уравнений первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры:

$$\begin{bmatrix}\varkappa_1&0&\partial_2\\0&\varkappa_1&-\partial_1\\\partial_2&-\partial_1&\varkappa_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_{[12]}\end{bmatrix}\equiv\{-(\varepsilon^{2[12]}+\varepsilon^{[12]2})\partial_1+$$

$$+(\varepsilon^{1[12]}+\varepsilon^{[12]1})\partial_2+\varkappa_1(\varepsilon^{11}+\varepsilon^{22})+$$

$$+\varkappa_2\varepsilon^{[12][12]})\}\varphi(x)=(\beta_1\partial_1+\beta_2\partial_2+$$

$$+\varkappa_1P_1+\varkappa_2P)\varphi(x)=0$$

или

$$\begin{bmatrix}\varkappa_1&\partial_l\\2\varepsilon_{kl}\partial_l&\varkappa_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_k\\\varphi_{[kl]}\end{bmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{bmatrix}(\partial_l\delta_{[kl]B}+\varkappa_1\delta_{kB})\delta_{kA}\\(\partial_l\delta_{kB}-\partial_k\delta_{lB}+\varkappa_2\delta_{[kl]B})\frac{1}{2}\delta_{[kl]A}\end{bmatrix}\varphi_B(x)\equiv$$

$$\equiv\left[\partial_l\left(\varepsilon^{k[kl]}+\frac{1}{2}\varepsilon^{[kl]k}-\frac{1}{2}\varepsilon^{[lk]k}\right)+\right.$$

$$\left.+\varkappa_1\varepsilon^{kk}+\varkappa_2\frac{1}{2}\varepsilon^{[kl][kl]}\right]_{AB}\varphi_B(x)\equiv \qquad (7)$$

$$\equiv(\beta_l\partial_l+\varkappa_1P_1+\varkappa_2P_2)\varphi(x)=0$$

Выше были введены представление волновой функции $\varphi(x)=\{\varphi(x)\}$, где $A=\{k,[kl]\}\equiv\{1,2,[12]\}$, и элементы обобщенной матричной алгебры:

$$-\beta_1=\varepsilon^{2[12]}+\varepsilon^{[12]2};\ \beta_2=\varepsilon^{1[12]}+\varepsilon^{[12]1};$$

$$P_1=\varepsilon^{22}+\varepsilon^{11};\ P_2=\varepsilon^{[12][12]};$$

или

$$(\varepsilon^{A,B})_{CD}=\delta_{AC}\delta_{BD};$$

$$\varepsilon^{A,B}\varepsilon^{C,D}=\delta_{BC}\varepsilon^{A,D};\ \varepsilon_{lk}=-\varepsilon_{kl};$$

$$\beta_k=\varepsilon^{[lk]l}+\varepsilon^{l[lk]};\ \beta_k^3=\beta_k;$$

$$P_1=\varepsilon^{kk};\ P_1^2=P_1;\ P_2=\frac{1}{2}\varepsilon^{[kl][kl]};$$

$$P_2^2=P_2;\ P_1+P_2=1;$$

$$\beta_k\beta_l=\varepsilon^{[mk][ml]}+\delta_{[mk][sl]}\varepsilon^{ms};$$

$$\beta_k\beta_l\beta_m+\beta_m\beta_l\beta_k=\delta_{kl}\beta_m+\delta_{ml}\beta_k.$$

Запишем уравнение (7) в шредингероподобном виде. Перенося влево временную компоненту, получим:

$$-\beta_1\partial_1\varphi(x)=(\beta_2\partial_2+\varkappa_1 P_1+\varkappa_2 P_2)\varphi(x).$$

Далее, действуя аналогично случаю нулевого спина, умножим данное уравнение на β_1 и $1-\beta_1^2$ и получим соответственно два уравнения

$$-\beta_1^2\partial_1\varphi(x)\equiv-\left\{\left(\varepsilon^{22}+\varepsilon^{[12][12]}\right)\partial_1\right\}\varphi(x)\equiv$$

$$\equiv\beta_1(\beta_2\partial_2+\varkappa_1 P_1+\varkappa_2 P_2)\varphi(x)\equiv$$

$$\equiv\left(\varepsilon^{21}\partial_2+\varepsilon^{[12]2}\varkappa_1+\varkappa_2\varepsilon^{2[12]}\right)\varphi(x)$$

и

$$(1-\beta_1^2)\beta_1\partial_1\varphi(x)=$$

$$=-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\partial_1\begin{bmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_{[12]}\end{bmatrix}\equiv 0\equiv$$

$$\equiv(1-\beta_1^2)(\beta_2\partial_2+\varkappa_1 P_1+\varkappa_2 P_2)\varphi(x)\equiv$$

$$\equiv\left\{\varepsilon^{1[12]}\partial_2+\varepsilon^{11}\varkappa_1\right\}\varphi(x).$$

Из второго уравнения в общем виде при помощи проектора $\bar{R}=1-\beta_1^2\equiv\varepsilon^{11}$ имеем следующее уравнение для нединамической составляющей волновой функции $\varphi\Psi=\bar{R}\varphi=-\frac{1}{\varkappa_1}\bar{R}\beta_2\partial_2\Phi\equiv-\frac{1}{\varkappa_1}\varepsilon^{1[12]}\partial_2\Phi.$ Подстановка его в первое уравнение и учет явного вида как проектора $R=\beta_1^2\equiv\varepsilon^{[12][12]}+\varepsilon^{22}$, так и свойств остальных матриц позволяют получить следующее уравнение в шредингероподобном виде для динамической составляющей $\Phi=R\varphi$.

$$\partial_1\Phi(x)=\mathbf{H}\Phi\equiv$$

$$\equiv\left\{-\beta_1(\varkappa_1 P_1+\varkappa_2 P_2)+\frac{1}{\varkappa_1}\beta_1\beta_2\bar{R}\beta_2\partial_2^2\right\}\Phi\equiv \qquad (8)$$

$$\equiv\left\{\varkappa_1\varepsilon^{[12]2}+\varepsilon^{2[12]}(\varkappa_2-\frac{1}{\varkappa_1}\partial_2^2)\right\}\Phi$$

Таким образом, имеем аналогичный по форме нулевому спину результат, за единственным, но важным исключением – входящих в конечное выражение матрицах.

3. Спин 1/2. В данном случае спина 1/2 отправным уравнением будет являться линеаризованное методом Дирака скалярное уравнение Клейна – Фока второго порядка [4] в двумерном релятивистском пространстве, где в качестве матриц Дирака со стандартными свойствами $\sigma_k\sigma_l+\sigma_l\sigma_k=2\delta_{kl}$ выбраны известные 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};$$

$$\sigma_2=i\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix};\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Чтобы описать два массовых состояния фермиона $m_{1,2}=\pm\frac{1\mp\sqrt{1+4a}}{2a}\geq0,$ в уравнение Дирака вводится производная второго порядка

$$\left[\sigma_k\partial_k-\frac{a}{m}\partial_k^2+m\right]\varphi_0=0, \qquad (9)$$

где двухкомпонентная функция $\varphi_0^{T}=(\varphi_1,\varphi_2)$ есть биспинор. Для переписывания уравнения (9) в виде унифицированной формы уравнений первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры далее действуем аналогично случаю нулевого спина, введя двухкомпонентную функцию $\varphi(x)=\{\varphi_A(x)\}$, где $A=\{0,k]\}\equiv\{0,1,2\}$.

$$[\sigma_k\partial_k+m]\varphi_0-\frac{a}{m}\partial_k(-m\varphi_k)\equiv$$

$$\equiv[\sigma_k\partial_k+m]\varphi_0+a\partial_k\varphi_k=0;$$

$$\partial_k\varphi_0+m\varphi_k=0,$$

или

$$\begin{bmatrix}\sigma_k\partial_k+m & a\partial_k\\ \partial_k & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_0\\\varphi_k\end{bmatrix}\equiv$$

$$\equiv\left\{\begin{bmatrix}\sigma_k & a\\1&0\end{bmatrix}\partial_k+m\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_0\\\varphi_k\end{bmatrix}\equiv$$

$$\equiv[\gamma_k\partial_k+m]\varphi(x)=0,$$

или

$$\begin{bmatrix}\sigma_k\partial_k+m & a\partial_k\\ \partial_k & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_0\\\varphi_k\end{bmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{bmatrix}(\sigma_k\partial_k\delta_{0B}+a\partial_k\delta_{kB}+m\delta_{0B})\delta_{0\grave{A}}\\(\partial_k\delta_{0B}+m\delta_{kB})\delta_{k\grave{A}}\end{bmatrix}\varphi_B(x)\equiv$$

$$\equiv\left[\partial_k\left(\varepsilon^{k0}+a\varepsilon^{0k}+\varepsilon^{00}\sigma_k\right)+m(\varepsilon^{kk}+\varepsilon^{00})\right]_{AB\varphi_B}(x)\equiv$$

$$\equiv[\gamma_k\partial_k+m]\varphi(x)=0 \qquad (10)$$

Подчеркнем небольшое отличие от предыдущих выводов – в определении $\gamma_k = \left(\varepsilon^{k0} + a\varepsilon^{0k}\right) \otimes \mathrm{I}_2 + \varepsilon^{00} \otimes \sigma_k$ необходимо вводить знак прямого произведения $\otimes$ матриц из-за исходной матричной структуры составляющих. Перенося влево временную компоненту в уравнении (10), запишем его в шредингероподобном виде:

$$\gamma_1 \partial_1 \varphi(\mathrm{x}) = -[\gamma_2 \partial_2 + m]\varphi(\mathrm{x}).$$

Отметим, что γ_1 подчиняется следующему минимальному полиному $\gamma_k^4 - (1+2a)\gamma_k^2 + a^2\Lambda = 0$, что позволяет найти γ_1^{-1} и избавиться от матрицы γ_1 при производной по времени. Проекционные операторы

$$\Lambda^2 = \Lambda = \left(\varepsilon^{00} + \varepsilon^{11}\right) \otimes \mathrm{I}_2$$

и $\Pi^2 = \Pi = 1 - \Lambda = \varepsilon^{22} \otimes \mathrm{I}_2$

выделяют соответственно динамическую $\Phi = \Lambda\varphi$ и нединамическую $\Psi = \Pi\varphi$ составляющие в волновой функции φ. Учитывая все вышеприведенное, получим:

$$\partial_1 \Phi \equiv \boldsymbol{H} \Phi = \left[\frac{1}{a}\left\{ m(a\varepsilon^{10} \otimes I_2 + \varepsilon^{01} \otimes I_2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\varepsilon^{11} \otimes \sigma_k) + \varepsilon^{01} \otimes \sigma_2 \partial_2 \right\} - \frac{1}{m}(\varepsilon^{01} \otimes I_2)\partial_2^2 \right] \Phi. \quad (11)$$

Для случая a=0 после умножения уравнения Дирака на σ_1, получим:

$$\partial_1 \varphi_0 \equiv \mathbf{H}\varphi_0 = -\sigma_1\left[\sigma_2 \partial_2 + m\right]\varphi_0 \equiv$$
$$\equiv \left[i\sigma_3 \partial_2 + m_1 \sigma_1\right]\varphi_0. \quad (12)$$

4. Мультиспин 0,1. В данном случае мультиспина 0,1 исходными уравнениями примем следующие уравнения в двумерном релятивистском пространстве:

$$\partial_l \varphi_l + m\varphi_0 = 0; \qquad \partial_l \varphi_{[kl]} + \partial_k \varphi_0 + m\varphi_k = 0$$
$$-\partial_l \varphi_k + \partial_k \varphi_l + m\varphi_{[lk]} = 0$$

или в покомпонентной записи (k, l = {1, 2})

$$\partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + m\varphi_0 = 0;$$
$$\partial_2 \varphi_{[12]} + \partial_1 \varphi_0 + m\varphi_1 = 0; \quad \partial_1 \varphi_{[21]} + \partial_2 \varphi_0 + \mathrm{m}\varphi_2 = 0;$$
$$-\partial_1 \varphi_2 + \partial_2 \varphi_1 + \mathrm{m}\varphi_{[12]} = 0 \quad (13)$$

Вводя четырехкомпонентную функцию

$$\varphi^T = \left(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{[12]}\right) \equiv \left(\varphi_0, \varphi_k, \varphi_{[kl]}\right)$$

и матричные обозначения, вышеприведенная система (13) может принять следующий вид унифицированной формы уравнений первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры:

$$\begin{bmatrix} \varkappa_2 & \partial_1 & \partial_2 & 0 \\ \partial_1 & \varkappa_1 & 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & 0 & \varkappa_1 & \partial_1 \\ 0 & \partial_2 & -\partial_1 & \varkappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_{[12]} \end{bmatrix} \equiv$$
$$\equiv \left\{ \left(\varepsilon^{01} + \varepsilon^{10} - \varepsilon^{2[12]} - \varepsilon^{[12]2}\right)\partial_1 + \right.$$
$$+ (\varepsilon^{02} + \varepsilon^{20} + \varepsilon^{1[12]} + \varepsilon^{[12]1})\partial_2 +$$
$$\left. + \varkappa_1\left(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22}\right) + \varkappa_2(\varepsilon^{00} + \varepsilon^{[12][12]}) \right\} \varphi(x) \equiv$$
$$\equiv \left(\gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2 + \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2\right)\varphi(x) = 0$$

или

$$\begin{bmatrix} \varkappa_2 & \partial_k & 0 \\ \partial_k & \varkappa_1 & \partial_l \\ 0 & 2\varepsilon_{kl}\partial_l & \varkappa_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_k \\ \varphi_{[kl]} \end{bmatrix} \equiv$$
$$\equiv \begin{bmatrix} (\partial_k \delta_{kB} + \varkappa_2 \delta_{0B})\delta_{0A} \\ (\partial_k \delta_{0B} + \varkappa_1 \delta_{kB} + \partial_l \delta_{[kl]B})\delta_{kA} \\ (\partial_l \delta_{kB} - \partial_k \delta_{lB} + \varkappa_2 \delta_{[kl]B})\frac{1}{2}\delta_{[kl]A} \end{bmatrix} \varphi_B(\mathrm{x}) \equiv$$
$$\equiv \left[\partial_k \left(\varepsilon^{0k} + \varepsilon^{l[lk]} + \frac{1}{2}\varepsilon^{[lk]l} - \frac{1}{2}\varepsilon^{[kl]l} + \varepsilon^{k0} \right) + \right.$$
$$\left. + \varkappa_1 \varepsilon^{kk} + \varkappa_2(\varepsilon^{00} + \frac{1}{2}\varepsilon^{[kl][kl]}) \right]_{AB} \varphi_B(x) \equiv \quad (14)$$
$$\equiv \left(\gamma_k \partial_k + \varkappa_1 \mathrm{P}_1 + \varkappa_2 \mathrm{P}_2\right)\varphi(\mathrm{x}) = 0$$

Выше были введены представление волновой функции $\varphi(\mathrm{x}) = \{\varphi_A(x)\}$, где $A = \{0, k, [kl]\} \equiv \{0, 1, 2[12]\}$, и элементы обобщенной матричной алгебры:

$$\gamma_1 = \varepsilon^{01} + \varepsilon^{10} - \varepsilon^{2[12]} - \varepsilon^{[12]2};$$
$$\mathrm{P}_1 = \varepsilon^{22} + \varepsilon^{11};$$
$$\gamma_2 = \varepsilon^{02} + \varepsilon^{20} + \varepsilon^{1[12]} + \varepsilon^{[12]1};$$
$$\mathrm{P}_2 = \varepsilon^{[12][12]} + \varepsilon^{00};$$

или

$$(\varepsilon^{A,B})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD}; \quad \varepsilon^{A,B}\varepsilon^{C,D} = \delta_{BC}\varepsilon^{A,D};$$
$$\varepsilon_{lk} = -\varepsilon_{kl}; \quad \gamma_k = \varepsilon^{0k} + \varepsilon^{l[lk]} + \varepsilon^{[lk]l} + \varepsilon^{k0};$$
$$\gamma_k^2 = 1; \quad \mathrm{P}_1 = \varepsilon^{kk}; \quad \mathrm{P}_1^2 = \mathrm{P}_1;$$

$$P_2 = \varepsilon^{00} + \frac{1}{2}\varepsilon^{[kl][kl]};\quad P_2^2 = P_2;\ P_1 + P_2 = 1.$$

Запишем уравнение (14) в шредингероподобном виде. Перенося влево временную компоненту

$$-\gamma_1\partial_1\varphi(x) = (\gamma_2\partial_2 + \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2)\varphi(x)$$

и умножая данное уравнение соответственно на γ_1, получим:

$$-\gamma_1^2\partial_1\varphi(x) \equiv -\partial_1\varphi(x) =$$

$$\equiv \gamma_1(\gamma_2\partial_2 + \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2)\varphi(x) \equiv$$

$$\equiv (\varepsilon^{01} + \varepsilon^{10} - \varepsilon^{2[12]} - \varepsilon^{[12]2})\times$$

$$\times\{(\varepsilon^{02} + \varepsilon^{20} + \varepsilon^{1[12]} + \varepsilon^{[12]1})\partial_2 + \varkappa_1(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22}) +$$

$$+\varkappa_2(\varepsilon^{00} + \varepsilon^{[12][12]}\}\varphi(x) \equiv$$

$$\equiv \{(\varepsilon^{12} - \varepsilon^{21} + \varepsilon^{0[12]} - \varepsilon^{[12]0})\partial_2 + \varkappa_1(\varepsilon^{01} - \varepsilon^{[12]2}) +$$

$$+\varkappa_2(\varepsilon^{10} - \varepsilon^{2[12]}\}\varphi(x).$$

Таким образом, имеем следующее уравнение в шредингероподобном виде:

$$\partial_1\varphi(x) = \mathbf{H}\varphi(x) \equiv$$

$$\equiv \left\{\begin{array}{c}(\varepsilon^{21} - \varepsilon^{12} + \varepsilon^{[12]0} - \varepsilon^{0[12]})\partial_2 + \\ +\varkappa_1(\varepsilon^{[12]2} - \varepsilon^{01}) + \varkappa_2(\varepsilon^{2[12]} - \varepsilon^{10})\end{array}\right\}\varphi(x) \qquad (15)$$

Обратим внимание на структуру матриц γ_k, которые можно рассматривать как определенную сумму матриц нулевого и единичного спинов: $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$

Заключение. В данной работе дано в унифицированном виде описание одномерных моделей с двумя массовыми состояниями для спинов 0, 1/2, 1 и для мультиспина 0,1 в рамках уравнений первого порядка при помощи обобщенной матричной алгебры. В его рамках получены шредингероподобные выражения для гамильтониана свободных частиц (формулы (5), (8), (11), (12), (15)) с исключением нединамической компоненты, что позволяет перейти в последующих публикациях к рассмотрению задач поведения частиц во внешнем поле или их взаимодействия. Отметим, что анализ вышеуказанных одномерных моделей из исходных принципов и уравнений позволил существенно уменьшить размерность матриц в полученных уравнениях по сравнению со случаем простого зануления лишних координат в обычно анализируемых размерностях пространства. Это, в свою очередь, позволяет методически легко обозревать и получать необходимые результаты.

Литература

1. Pont, Federico M. Exact wave functions and entropies of the one dimensional Regularized Calogero model / Federico M. Pont, Omar Osenda, Pablo Serra; [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2017. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1709.06374.pdf. – Date of access: 20.09.2018.
2. Hartmann, R. R. Pair states in one-dimensional Dirac systems / R. R. Hartmann, M. E. Portnoi; [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2017. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1706.04886.pdf. – Date of access: 20.09.2018.
3. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

References

1. Pont, Federico M. Exact wave functions and entropies of the one dimensional Regularized Calogero model / Federico M. Pont, Omar Osenda, Pablo Serra [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2017. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1709.06374.pdf. – Date of access: 20.09.2018.
2. Hartmann, R. R. Pair states in one-dimensional Dirac systems / R. R. Hartmann, M. E. Portnoi; [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL), 2017. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1706.04886.pdf. – Date of access: 20.09.2018.
3. Fyodorov, F. I. Gruppa Lorentsa / F. I. Fyodorov. – M. : Nauka, 1979. – 384 s.