Весці БДПУ. Серыя 3. 2018. № 2. С. 27–32.

УДК 512.5 (07)

ВОЗМОЖНОСТИ ВЗАИМОСВЯЗАННОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СПОСОБОМ НАГЛЯДНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

М. В. Ненартович,
магистр педагогических наук, аспирант кафедры информатики и методики преподавания информатики БГПУ

Поступила в редакцию 25.04.18.

UDC 512.5 (07)

THE POSSIBILITIES OF THE RELATED USE OF ALGEBRAIC AND GEOMETRIC APPROACHES TO THE SOLUTION OF ALGEBRAIC PROBLEMS OF THE OBSERVED MODELING METHODE

M. Nenartovich,
Master of Pedagogics, Post-Graduate Student of the Department of Informatics and Methods of Teaching Informatics, BSPU

Received on 25.04.18.

В данной статье рассматривается возможность взаимосвязанного использования алгебраического и геометрического подходов к решению задач алгебры способом наглядного моделирования. Приводятся примеры решения алгебраических заданий способом наглядного моделирования.

Ключевые слова: алгебра, геометрия, математика, наглядность, моделирование, наглядное моделирование, алгебраический способ.

In this paper, the author considers the possibility of the interrelated use of algebraic and geometric approaches to the solution of problems of algebra by the method of visual modelling. Examples of solving algebraic tasks by means of visual modelling are given.

Keywords: algebra, geometry, mathematics, visualization, modelling, visual modelling, algebraic method.

Важнейшая задача математического образования состоит в том, чтобы не только вооружить учащихся суммой конкретных знаний, но и научить делать самостоятельные выводы на базе этих знаний в ходе решения задач школьного курса. Одним из путей решения таких задач является использование наглядного моделирования при обучении математике.

Специфика наглядного моделирования в обучении математике состоит в возможности распознавания, рассмотрения и анализа учащимися структуры модели, свойств, закономерностей, отношений, взаимосвязей ее составляющих частей, формирования осознанного восприятия, что способствует в большей мере устойчивому запоминанию, развитию мышления и воображения при познании объектов окружающего мира [3; 4].

Решение задач различными способами свидетельствует о полноте математических знаний и качественной математической подготовке учащихся. При изучении математики выделяют такие способы решения задач, как алгебраический и геометрический. Анализ учебной литературы показывает, что алгебраический подход используется для решения задач из курса «Алгебры», а геометрический – для решения задач из курса «Геометрии». Мы считаем, что при решении задач данные два способа необходимо рассматривать в тесной взаимосвязи.

Как показывает опыт обучения учащихся математике, целесообразно использовать способ наглядного моделирования при изучении следующих тем: уравнения, системы уравнений, тригонометрические функции, решение неравенств, графическое изображение алгебраических и тригонометрических выражений, нахождение наибольшего и наименьшего значения выражения или функции. Возможность создания геометрического образа алгебраического понятия или выражения является критерием отбора тем школьного курса алгебры для использования наглядного моделирования [1].

Рассмотрим на примере использование наглядного моделирования при решении алгебраических систем уравнений курса алгебры в старших классах.

Пример 1. Из условий $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 + = z^2 = 9$, $y^2 = xz$ для положительных значений x, y, z, не вычисляя их значений, укажите значение выражения $xy + yz$.

Решение. Для нахождения значения выражения $xy + yz$ необходимо найти значение переменных x, y, z. Для этого рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y^2 + z^2 = 9, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

При решении алгебраическим методом учащийся должен владеть следующими знаниями из школьного курса алгебры: система уравнений, методы и способы решения системы уравнений (подстановка, сложение уравнений), формулы сокращенного умножения, выделение полного квадрата суммы либо разности.

При решении данного примера методом наглядного моделирования учащийся должен владеть следующими знаниями из школьного курса геометрии: теорема Пифагора, обратная теорема теореме Пифагора, среднее пропорциональное, площадь треугольника.

Способ наглядного моделирования. Рассмотрим фрагмент работы учителя и учащихся по решению данного примера на уроках алгебры с использованием наглядного моделирования.

Учитель: Если рассматривать уравнение $y^2 + z^2 = 9$ с геометрической точки зрения и с учетом того, что x, y, z принимают только положительные значения, то как его можно интерпретировать?

Учащийся: Если рассмотреть треугольник с измерениями y, z, 3, то равенство $y^2 + z^2 = 9$ указывает на выполнение теоремы, обратной теореме Пифагора. Следовательно, речь идет о прямоугольном треугольнике с катетами y, z и гипотенузой 3.

Учитель: Что тогда можно сказать об уравнении $x^2 + y^2 = 16$?

Учащийся: Если рассмотреть треугольник с измерениями x, y, 4, то равенство $x^2 + y^2 = 16$ указывает на выполнение теоремы, обратной теореме Пифагора. Следовательно, речь идет о прямоугольном треугольнике с катетами y, x и гипотенузой 4.

Учитель: Как можно интерпретировать геометрически уравнение $y = xz$?

Учащийся: Третье уравнение системы позволяет утверждать, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z .

Учитель: Значит, если моделью данной системы уравнений будут являться прямоугольные треугольники, можно ли их построить так, чтобы у них была общая сторона?

Учащийся: Да, возможно построить два прямоугольных треугольника с общей стороной y.

Учитель: Давайте выполним построение чертежа по заданным выше условиям.

Выполняется построение наглядной модели по ранее проделанному анализу условия системы. Строятся два прямоугольных треугольника с общим катетом, длина которого равна y, а катеты z и x лежат на одной прямой, но по разные стороны от катета (рисунок 1).

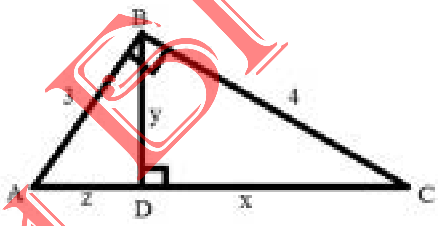

Рисунок 1

Учитель: Есть ли необходимость в нахождении значений переменных x, y, z для нахождения значения выражения $xy + yz$?

Учащийся: Нет, так как можно заметить следующую закономерность: $xy + yz = y(x+z) = 2S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 4 = 12$.

Примерное оформление решения задачи учащимися

1. Так как $x > 0, y > 0, z > 0$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, числа z, y, 3 являются длинами соответственно катетов и гипотенузы $\triangle ABD$.

2. Рассмотрев второе уравнение системы, можно сделать вывод, что y, x, 4 являются длинами соответственно катетов и гипотенузы $\triangle DBC$.

3. Третье уравнение системы позволяет утверждать, что число y есть среднее пропорциональное чисел x и z. Тогда по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, имеем рисунок 2.

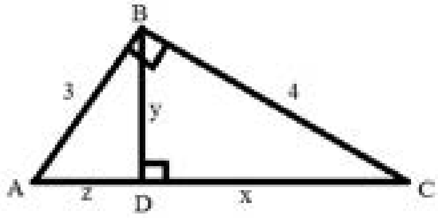

Рисунок 2

4. $xy + yz = y(x+z) = 2S_{\triangle ABC} = 3 \cdot 4 = 12$

Ответ: 12.

Алгебраический способ

1. Сложим 1-е и 2-е уравнения, получим: $x^2 + 2y^2 + z^2 = 25$.

2. Подставим y^2 из 3-го уравнения, получим следующее уравнение:

$x^2 + 2xz + z^2 = 25$.

3. $(x + z)^2 = 5$, $z = 5 - x$ (так как $x > 0$ и $z > 0$).

4. Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y^2 + (5 - x)^2 = 9, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

5. Из второго уравнения системы выразим y^2 и подставим в 1-е уравнение системы, откуда $x = 3{,}2$. Следовательно, $z = 1{,}8$; $y = 2{,}4$.

6. $xy + yz = 3{,}2 \cdot 2{,}4 + 1{,}8 = 12$.

Таким образом, решение данного задания методом наглядного моделирования происходит на 2 шага быстрее и позволяет осознать, установить соответствие и закономерности данных в условии задачи, используя построение наглядной модели.

Рассмотрим на примере использование наглядного моделирования при нахождении значений выражения с арксинусом, арккосинусом, арктангенсом, арккотангенсом.

Пример 2. Вычислите $arctg\frac{3}{4} + arctg5$.

Решение.

Способ наглядного моделирования

Рассмотрим фрагмент работы учителя и учащихся по решению данного примера с использованием наглядного моделирования.

Учитель: Что вы понимаете под $arctg\frac{3}{4}$ и $arctg5$?

Учащийся: $arctg\frac{3}{4}$ – это угол α, тангенс которого равен $\frac{3}{4}$, значит, $tg\alpha\frac{3}{4}$; $arctg5$ – это угол β, тангенс которого равен 5, значит, $tg\beta = 5$.

Учитель: Какими должны быть катеты в прямоугольном треугольнике, чтобы $tg\alpha\frac{3}{4}$?

Учащийся: Прямоугольный треугольник, у которого катеты пропорциональны числам 3 и 4.

Учитель: Какими должны быть катеты в прямоугольном треугольнике, чтобы $tg\beta = 5$?

Учащийся: Прямоугольный треугольник, у которого катеты пропорциональны числам 1 и 5.

Учитель: Можно ли построить два прямоугольных треугольника с общей вершиной? Если можно, то выполните построение.

Учащийся: Выполняется построение прямоугольного треугольника AMC, так что $\angle MAC = \alpha$, а $tg\alpha\frac{3}{4}$. Затем достраивается прямоугольный треугольник CBN так, что $\angle CBN = \beta$, $tg\beta = 5$. При выполнении построения модели необходимо расположить два треугольника так, чтобы катеты MC и CN лежали на одной прямой по разные стороны от общей вершины C, а AM и BN не имели общих точек (рисунок 3).

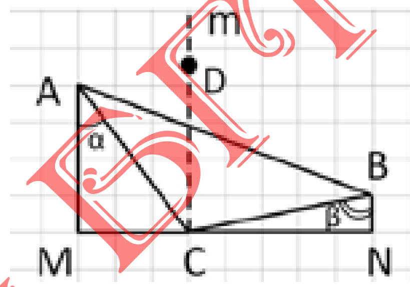

Рисунок 3

Построенная наглядная модель, соответствующая условию задачи, позволяет найти быстрый ответ.

Следовательно, $arctg\frac{3}{4} = \angle MAC$ $arctg5 = \angle CBN$.

Проведем прямую m, проходящую через вершину C треугольников $\triangle AMC$ и $\triangle BNC$ так, что $m \parallel AM, m \parallel BN$.

Рассмотрим $m \parallel AM$ и секущую AC, тогда $\angle MAC = \angle ACD$ по свойству внутренних накрест лежащих углов. Следовательно, $\angle ACD = arctg\frac{3}{4}$.

Рассмотрим $m \parallel BN$ и секущую CB, тогда $\angle CBN = \angle DCB$ по свойству внутренних накрест лежащих углов. Следовательно, $\angle DCB = arctg5$.

Учитель: Следовательно, задача сводится к нахождению $\angle ACB$, так как $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = arctg\frac{3}{4} + arctg5$. Что необходимо знать и как будем находить данный угол?

Учащийся: Так как $arctg\frac{3}{4} = \angle MAC,$ значит, из $\triangle AMC, MC = 3, AM = 4$, по теореме Пифагора $AC^2 = AM^2 + MC^2$, следовательно, $AC = 5$. Так как $arctg5 = \angle CBN$, значит, из $\triangle CBN, BN = 1, CN = 5$, по теореме Пифагора $BC^2 = CN^2 + BN^2$, следовательно, $BC = \sqrt{26}$.

Применив теорему косинусов к треугольнику $\Delta ACB, AB=\sqrt{73}$, получим, что сумма равна $-\frac{11\sqrt{26}}{130}$.

Примерное оформление решения задачи учащимися

1. $arctg\frac{3}{4}=\angle ACM=\angle ACD$, $arctg5=\angle CBN=$ $=\angle BCD$, следовательно, $\angle ABC$ искомый угол, равный $arctg\frac{3}{4}+arctg5$ (рисунок 4).

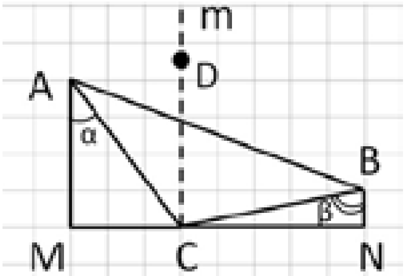

Рисунок 4

2. $arctg\frac{3}{4}=\angle MAC$, значит, из ΔAMC, M = 3, AM = 4, по теореме Пифагора $AC^2 = AM^2 + MC^2$, следовательно AC = 5.

$arctg5=\angle CBN$, значит, из ΔCBN, BN = 1, CN = 5 по теореме Пифагора $BC^2 = CN^2 + BN^2$, следовательно, $BC=\sqrt{26}$.

Применим теорему косинусов к треугольнику ΔACB:

$$AB^2=AC^2+CB^2-2\cdot AC\cdot CB\cdot cos\angle ACB$$

$$cos\angle ACB=-\frac{11\sqrt{26}}{130}$$

Ответ: $-\frac{11\sqrt{26}}{130}$.

Для решения данного типа заданий часто бывает достаточным сделать «правильный» чертеж: подобрать прямоугольные треугольники, в которых используются определения обратных тригонометрических функций, и грамотно их расположить на листе бумаге в клетку. Использование наглядных моделей в данных типах заданий позволит воспринимать условие не формально, а непосредственно на готовых наглядных моделях либо построенных самостоятельно учащимися.

Рассмотрим на примере использование наглядного моделирования при решении обратных тригонометрических уравнений.

Пример 3. Решить уравнение $arcsinx+arcsin2x=\frac{\pi}{2}$. В ответ записать значение выражения $5\cdot x$.

Решение.

Способ наглядного моделирования Рассмотрим фрагмент работы учителя и учащихся по решению данного примера с использованием наглядного моделирования.

Учитель: Рассмотрим по отдельности выражения, входящие в уравнение arcsin*x* и arcsin2*x*. Каким образом интерпретировать данные выражения?

Учащийся: arcsin*x* – это угол α, синус которого равен *x*, значит, sin α = *x*; а arcsin2*x* – это угол *β*, синус которого равен 2*x* , значит, sin *β* =2 *x*. Тогда $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

Учитель: Можем ли мы построить модели этих треугольников исходя из определения синуса острого угла прямоугольного треугольника и исходя из условия $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$?

Учащийся: Да, можем. Выполняют построение модели. Построим треугольник ΔACD так, что $\angle CAD=\beta$, а $sin\angle CAD=2x$. По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника противолежащий катет равен 2*x*, а гипотенуза 1. Достроим прямоугольный треугольник *ABC* к треугольнику *ADC* так, чтобы гипотенуза *AC* была общей, а катеты *AB* и *CD*, *BC* и *AD* – противолежащими друг к другу (рисунок 5).

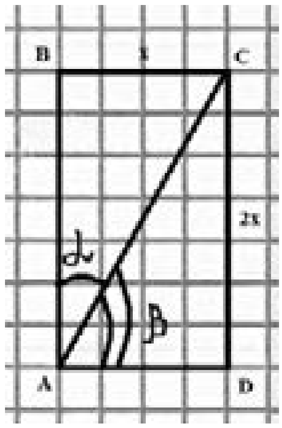

Рисунок 5

Учитель: Исходя из равенств sin α = *x*, sin *β* = 2*x* можно прийти к выводу, что общая гипотенуза *AC* = 1, *BC* = 1 · sin α = sin α = *x*, *CD* = 1 · sin *β* = sin *β* = 2*x*.

Как найти *x*?

Учащийся: По теореме Пифагора, из ΔACD:

$AB^2 + BC^2 + AC^2$,
$(2x)^2 + x^2 = 1$,
$5x^2 = 1$,
$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Учитель: Может ли $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$?

Учащийся: Нет, так как $\arcsin x < 0$, $\arcsin 2x < 0$ и их сумма отрицательна. Находим значение выражения: $5 \cdot x = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$.

Примерное оформление решения задачи учащимися

1. Пусть $\arcsin x = \alpha$, $\arcsin 2x = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Пусть $\sin \alpha = x$, $\sin \beta = 2x$. Следует заметить, что $x > 0$ (иначе $\arcsin x < 0$, $\arcsin 2x < 0$ и их сумма отрицательна) (рисунок 6).

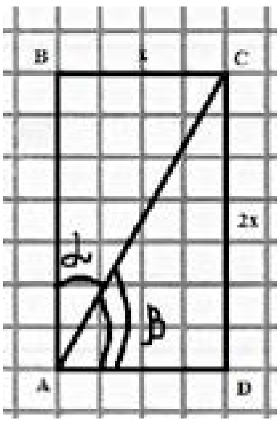

Рисунок 6

2. Пусть $AC = 1$, $ABCD$ – прямоугольник, тогда $BC = 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha = x$, $CD = 1 \cdot \sin \beta = \sin \beta = 2x$.

3. По теореме Пифагора из треугольника ΔABC получим:
$AB^2 + BC^2 + AC^2$,
$(2x)^2 + x^2 = 1$,
$5x^2 = 1$,
$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ – не подходит по условию задачи.

4. Находим значение выражения: $5 \cdot x = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

Ответ: $\sqrt{5}$.

Таким образом, при выполнении данного типа заданий способом наглядного моделирования учащиеся воспринимают учебный материал осознанно, находят закономерности и взаимосвязь данных в условии задачи.

Использование геометрического компонента в рамках реализации наглядного моделирования на уроках алгебры способствует наглядному представлению аналитической записи через построение моделей, которые отражают законы геометрии и свойства геометрических фигур [2].

Считаем целесообразным сопоставить задачи школьного курса алгебры с возможностью представления решения через геометрический компонент:

- решение алгебраических систем уравнений (свойство высоты прямоугольного треугольника; теорема Пифагора; теорема, обратная теореме Пифагора);
- нахождение значения выражений с арксинусом, арккосинусом, арктангенсом, арккотангенсом (определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника; определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса; теорема Пифагора; теорема, обратная теореме Пифагора);
- решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции (определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника; определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса; теорема Пифагора; теорема, обратная теореме Пифагора).

Таким образом, следует отметить, что реализация наглядного моделирования при решении алгебраических задач геометрическим способом содействует углублению знаний школьного курса алгебры и геометрии, создает возможность вариативного подхода к решению задач, реализует межпредметные связи (алгебры и геометрии), ориентирует учащихся на анализ условия задачи, поиск ее эффективного решения и развивает их графическую культуру.

Литература

1. *Блинков, А. Д.* Геометрия в негеометрических задачах / А. Д. Блинков. – М. : МЦНМО, 2016. – 160 с.
2. *Генкин, Г. З.* Геометрическое решение негеометрических задач [Текст]: Библиотека учителям / Г. З. Генкин. – М. : «Просвещение», 2007. – 80 с.
3. *Ненартович, М. В.* О теоретико-методологических основаниях проблемы использования наглядного моделирования при обучении учащихся курсу алгебры / М. В. Ненартович, И. А. Новик // Матэматыка. – № 4. – 2017. – С. 21–31.
4. *Ненартович, М. В.* Уровни осознанности математических знаний учащихся при обучении методом наглядного моделирования / М. В. Ненартович // Матэматыка. – 2016. – № 5. – С. 17–23.

References

1. *Blinkov, A. D.* Geometriya v negeometricheskikh zadachakh / A. D. Blinkov. – M. : MTsNMO, 2016. – 160 s.
2. *Genkin, G. Z.* Geometricheskoye resheniye negeometricheskikh zadach [Tekst]: Biblioteka uchitelyam / G. Z. Genkin. – M. : “Prosveshcheniye”, 2007. – 80 s.
3. *Nenartovich, M. V.* O teoretiko-metodologicheskikh osnovaniyakh problemy ispolzovaniya naglyadnogo modelirovaniya pri obuchenii uchashchikhsya kursu algebry / M. V. Nenartovich, I. A. Novik // Matematyka. – № 4. – 2017. – S. 21–31.
4. Nenartovich, M. V. Urovni osoznannosti matematicheskikh znaniy uchashchikhsya pri obuchenii metodom naglyadnogo modelirovaniya / M. V. Nenartovich // Matematyka. – 2016. – № 5. – S. 17–23.