Весцi БДПУ. Серыя 3. 2018. № 2. С. 10–14.

УДК 511.2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ВОЗЛЕ ГЛАДКИХ КРИВЫХ

М. А. Жур,
аспирант отдела алгебры теории чисел института математики НАН Беларуси;

О. В. Рыкова,
кандидат физико-математических наук, БГАТУ

UDC 511.2

ALGEBRAIC NUMBERS NEAR THE SMOOTH CONTOURS

M. Zhur,
Post-Graduate Student of the Department of Algebra and Theory of Numbers, Institute of Mathematics, NAS of Belarus;

O. Rykova,
PhD in Physics and Mathematics, BSTU

Поступила в редакцию 24.04.18.

Received on 24.04.18.

В данной работе найдена оценка сверху для распределения комплексных алгебраических числел фиксированной степени и ограниченной высоты в некоторой полосе малой ширины возле гладкой кривой в пространстве $\mathbb{C}$. Основой доказательства является метрическая теорема о том, что целочисленные многочлены и их производные могут принимать малые значения только на множествах $K \subset \Omega$, мера которых не превосходит $\delta_0 \mu \Omega$ при любых $\delta_0 > 0$. Затем производится оценка количества алгебраических точек внутри полосы с помощью разбиения параллелепипедами малой меры.

Ключевые слова: комплексные алгебраические числа, гладкая кривая, алгебраические точки.

The article reveals the upper estimation for distribution of complex algebraic numbers of fixed degree and limited height in a certain strip of small width near a smooth contour in space $\mathbb{C}$. The base of the proof is the metric theorem about the fact that integral polynomials and their derivatives can take small $K \subset \Omega$ values only on the sets the measure $\delta_0 \mu \Omega$ of which does not exceed for any $\delta_0 > 0$. The paper gives an assessment of the number of algebraic points within the strip with the help of partition with small-measured parallelepipeds.

Keywords: complex algebraic numbers, smooth contour, algebraic points.

Пусть $Q > 1$ – натуральное число и

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$a_i \in \mathbb{Z}, \deg P = n, H(P) = \max_{0 \le i \le n} |a_i| < Q. \quad (1)$$

Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(x)$. Величина $H(P)$ называется высотой $P(x)$, а величина $H(\alpha_i)$ равна высоте минимального многочлена алгебраического числа α_i [1] (называется высотой алгебраического числа).

Определим множество, содержащее все многочлены вида (1):

$$P_n(Q) = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = n \ge 2, H(P) \le Q\}.$$

Пусть

$$2 < n_1 \le n.$$

Пусть $f : K \to \mathbb{C}$ – непрерывная дифференцируемая функция, заданная на области определения $K \subset \{z \in \mathbb{C} : z = x + yi,$ $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$.

Определим множество точек с координатами, являющимися комплексными сопряженными алгебраическими числами ограниченной степени и высоты:

$$\mathbb{A}_n^2(Q) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2 : \deg \alpha_1 = \deg \alpha_2 \le n,\ H(\alpha_1) = H(\alpha_2) = H(P) \le Q\}.$$

Рассмотрим множество:

$$M_f^n(Q, \gamma, K) = \{\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{A}_n^2(Q) : \alpha_1 \in K, |f(\alpha_1) - \alpha_2| < c_1 Q^{-\gamma}\}. \quad (2)$$

Покажем, что для любого $Q > Q_0(n, K, f)$ существует величина c_2 *(n, K, f)* > 0 такая, что выполняется оценка сверху:

$$\# M_f^n(Q, \gamma, K) \ge c_2 Q^{n+1-\gamma}, \quad (3)$$

при $0<\gamma<\dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим полосу около кривой *f*:

$$L_f(Q,\gamma,K)=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : z_1\in \\ \in K, |f(z_1)-z_2|<c_1Q^{-\gamma}\}. \qquad (4)$$

Очевидно, что $M_f^n(Q,\gamma,K)\subset L_f(Q,\gamma,K)$. Проведем разбиение множества $L_f(Q,\gamma,K)$ на параллелепипеды

$$\Pi_j\cap\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : z_1\in K_j, \\ |f(z_1)-z_2|<c_3Q^{-\gamma}\},\ j\in\{1,t\}, \qquad (5)$$

где Π_j – параллелепипеды со стороной $c_3Q^{-\gamma}$, $c_3=\dfrac{1}{2}c_2$, вписанные в полосу $L_f(Q,\gamma,K)$, а также выполняется условие:

$$\Pi_j\cap\{|z_1-z_2|\le\delta, \\ |z_1-\bar{z}_2| J\delta, |\bar{z}_1-\bar{z}_2|\le\delta\}=\varnothing \qquad (6)$$

Пусть множество $K_n(\Pi_j,Q)$ – это множество точек $(\alpha_i,\alpha_j)\in\mathbb{C}^2$, которые являются корнями $P\in P_n(Q)$ и $(\alpha_i,\alpha_j)\in\Pi_j$.

Теорема 1. *Пусть* $0<\mu_i<\dfrac{1}{2}, \mu_i=\gamma, i=1,2$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\#K_n(\Pi_j,Q)\gg Q^{n+1-\mu_1-\mu_2}. \qquad (7)$$

С помощью принципа Дирихле можно получить оценку Дирихле для любой точки $(z_1,z_2)\in\Pi_j$ существует $P(z)\in P_n(Q)$ такое, что

$$\begin{cases} |P(z_1)|<c_4Q^{-v_1}, \\ |P(z_2)|<c_4Q^{-v_2}, \\ v_1+v_2=\dfrac{n-3}{2}, \end{cases}$$

при подходящем c_4, зависящем только от *n* [4]. Пусть $\mathfrak{L}_n(Q)$ – множество $(z_1,z_2)\in\Pi_j, |x|>\delta$, для которого справедлива система неравенств

$$\begin{cases} |P(z_1)|<c_1Q^{-v_1}, \\ |P(z_2)|<c_1Q^{-v_2}, \\ v_1+v_2=\dfrac{n-3}{2}, \\ \min(|P'(z_1)|, P'(z_2)|)\le\delta_0Q,\ \delta_0>0. \end{cases} \qquad (8)$$

Также ввиду условия разделенности (6) выполняется условие:

$$|P(z_i)|>Q^{\frac{5}{8}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{L}_n(Q)$ *– множество, для которого система неравенств (8) имеет решение* $P(z)\in P_n(Q)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\mu\mathfrak{L}_n(Q)<\frac{1}{2}\mu\Pi_j. \qquad (9)$$

Доказательство теоремы 2. Из условия разделенности точек (6) следует, что множество $\mathfrak{L}_n(Q)$ содержится в объединении параллелепипедов

$$\bigcup_{P\in P_n(Q)}\sigma_P(\alpha),$$

где

$$\sigma_P(\alpha)=\{z\in\Pi_j : \\ :|z_i-\alpha_{0i}|<c_5Q^{-v_i}|P'(\alpha_{0i})|^{-1},\ i\in\{1,2\}\}. \qquad (10)$$

Тогда для меры множества $\mathfrak{L}_n(Q)$ выполняется оценка

$$\mu\mathfrak{L}_n(Q)\le\mu\bigcup_{P\in P_n(Q)}\sigma_P(\alpha)\le\sum_{P\in P_n(Q)}\mu\sigma_P(\alpha).$$

Рассмотрим расширенные параллелепипеды

$$\sigma'_P(\alpha)=\{x\in\Pi_j :|x_i-\alpha_{1i}|<c_6Q^{-v`_i}|P'(\alpha_{1i})|^{-1}, \\ i\in\{1,2\}\}, v`_i=\frac{(n_1-1)}{n-1}v_i. \qquad (11)$$

Очевидно, что меры параллелепипедов $\sigma_P(\alpha)$ и $\sigma'_P(\alpha)$ связаны неравенствами

$$\mu\sigma_P(\alpha)\le c_5^2c_6^{-2}Q^{\sum_{i=1}^{2}(v`_i-v_i)} \\ \mu\sigma'_P(\alpha)\le c_5^2c_6^{-2}Q^{n_1-n}\mu\sigma'_P(\alpha). \qquad (12)$$

Рассмотрим $n_1=3$. Зафиксируем вектор $\bar{b}=(a'_n,a'_{n-1},\dots,a'_{n_1+1})=(a'_n,a'_{n-1},\dots,a'_4)$ и рассмотрим класс многочленов с фиксированными коэффициентами $\bar{b}$

$$T_n(\bar{b})=\{P\in P_n(Q) : P=a'_nx^n+a'_4x^4+ \\ +a_3x^3+\dots+a_0\}.$$

Очевидно, что

$$\#\{\bar{b}\}\le c_7Q^{n-3} \qquad (13)$$

Далее будем рассматривать многочлены $P \in T_n(\bar{b})$. Пусть $P_1, P_2 \in T_n(\bar{b})$ и $P_1 \neq P_2$. Рассмотрим случай, когда для любого параллелепипеда $\sigma'_{P_2}(\alpha_2)$ выполняется неравенство

$$\mu(\sigma'_{P_1}(\alpha_1) \cap \sigma'_{P_2}(\alpha_2)) < \frac{1}{2}\mu\sigma'_{P_1}(\alpha_1). \quad (14)$$

Такие параллелепипеды $\sigma'_{P_1}(\alpha_1)$ называются существенным. Из неравенства (14) следует, что большая часть параллелепипеда $\sigma'_{P_1}(\alpha_1)$ свободна от точек, принадлежащих другим параллелепипедам. Поэтому справедлива оценка

$$\sum_{P \in T_n(\bar{b})} \mu\sigma'_P(\alpha) \le 2\mu\Pi_j. \quad (15)$$

Из неравенств (12), (13), (15) следует

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in T_n(\bar{b})} \mu\sigma_P(\alpha) \le \sum_{\bar{b}} c_5^2 c_6^{-2} Q^{3-n} \sum_{P \in T_n(\bar{b})} \mu\sigma'_P(\alpha) \le$$
$$\le \frac{1}{4}\mu\Pi_j. \quad (16)$$

Рассмотрим случай несущественных параллелепипедов. В случае если параллелепипед $\sigma'_{P_1}(\alpha_1)$ несущественный, то существует параллелепипед такой, что выполняется неравенство

$$\mu(\sigma'_{P_1}(\alpha_1) \cap \sigma'_{P_2}(\alpha_2)) > \frac{1}{2}\mu\sigma'_{P_1}(\alpha_1).$$

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора многочленов P_1 и P_2 на $\sigma'_{P_1,i}(\alpha_{1i}) \cap \sigma'_{P_2,i}(\alpha_{2i})$, $i \in \{1,2\}$

$$P_j(z_j) = P_j(\alpha_{ji}) + P'_j(\alpha_{ji})(z_i - \alpha_{ji}) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}P_j^{(n)}(\alpha_{ji})(z_i - \alpha_{ji})^n, \ j = \{1,2\}. \quad (17)$$

Из определения параллелепипеда (10) следует неравенство

$$|P'_j(\alpha_{ji})(z_i - \alpha_{ji}) \le c_5 Q^{-v`_i}. \quad (18)$$

Оценим $|P'(\alpha_i)|$

$$|P'(\alpha_i)| = |a_n| \prod_{1 < i \neq j \le n} |\alpha_i - \alpha_j| \ge c_7 Q^{-(n-1)} \ge$$
$$\ge c_7 Q^{-\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}} \ge c_7 Q^{-\frac{v`_i}{2}+\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Используя неравенство (19), получим оценку остальных слагаемых системы (17)

$$|\frac{1}{k!}P_j^{(k)}(x_i - \alpha_i)^k| \le C_n^k Q^{1-kv`_i} \cdot c_8^k Q^{k(\frac{v`_i}{2}-\frac{1}{2})} \le$$
$$\le C_n^k \cdot c_8^k Q^{-v`_i}. \quad (20)$$

Из неравенств (18) и (20) имеем

$$|P_j(z_i)| \le c_9 Q^{-v`_i}. \quad (21)$$

Из неравенства (21) следует система неравенств [3]

$$\max(|z_1 - \alpha_{j1}|, |z_2 - \alpha_{j2}|) < c_5 Q^{-v`_j} <$$
$$< 2^{n-1} c_9 Q^{-v`_j}, \ j = \{1,2\}. \quad (22)$$

Произвольную точку $(z_1, z_2) \in \Pi_j$ можно представить в виде

$$\begin{cases} z_1 = u_1 + \theta_1 Q^{-v`_1} \\ z_2 = u_2 + \theta_2 Q^{-v`_2} \end{cases}, |\theta_i| \le 1. \quad (23)$$

Используя систему равенств (23), получим

$$|P_j(u_i)| = |a_n(z_i - \theta_i Q^{-v`_i})^n + a_{n-1}(z_i - \theta_i Q^{-v`_i})^{n-1} + \cdots$$
$$+ a_0|.$$

Раскрывая скобки и группируя члены, имеем оценку

$$|P_j(u_i)| < |P_j(z_i)| + |a_n \sum_{k=1}^{n} z_i^{n-k}(\theta_i Q^{-v`_i})^k| + |a_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} z_i^{n-1-k}(\theta_i Q^{-v`_i})^k| + |$$
$$| + |a_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} z_i^{n-1-k}(\theta_i Q^{-v`_i})^k| + \cdots + |a_1 \theta_i Q_{-v`_i}|.$$

Не ограничивая общности [3, с. 19], можносчитать $\max\limits_{0 \le i \le n} |a_i| = a_n > 0, max(v`_1, v`_2) = v_1$

Тогда из неравенства (21) следует оценка

$$max(|P_j(u_1)|, |P_j(u_2)|) < c_{10}(Q^{-v`_1} + a_n Q^{-v`_1}). \quad (24)$$

Если $a_n > Q^{v`_1}$, то оценку (24) можно записать в виде

$$max(|P_j(u_1)|, |P_j(u_2)|) < c_{11} a_n Q^{-v`_1}. \quad (25)$$

Рассмотрим многочлен $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$, $degR(x) \le n_1 = 3$. Из условия (25) следует, что для него выполняется следующая система неравенств

$$|R(u_i)| < |(a_{23} - a_{13})u_i^3 + \ldots + (a_{20} - a_{10})| <$$
$$< 2c_{12} a_3 Q^{-v`_1}, \ i \in \{1,2\}. \quad (26)$$

Обозначим $s_j = (a_{2j} - a_{1j})$, $j \in \{0,...,3\}$. Очевидно равенство $|R(\bar{z})| = |R(z)|$, $z \in \mathbb{C}$, в котором $\bar{z}$ комплексно сопряжено с z. В таком случае систему неравенств (26) можно записать в виде

$$\begin{cases} |R(u_1)| < |s_{n_1}u_1^3 + ... + s_0| < 2c_{12}a_{n_1}Q^{-v`_1}, \\ |R(u_2)| < |s_{n_1}u_2^3 + ... + s_0| < 2c_{12}a_{n_1}Q^{-v`_1}, \\ |R(\bar{u}_1)| < |s_{n_1}u_1^3 + ... + s_0| < 2c_{12}a_{n_1}Q^{-v`_1}, \\ |R(\bar{u}_2)| < |s_{n_1}u_1^3 + ... + s_0| < 2c_{12}a_{n_1}Q^{-v`_1}. \end{cases} \quad (27)$$

Обозначим через $|V(u_1, u_2)|$ – определитель матрицы системы (27).

Определитель $|V(u_1, u_2)|$ является определителем Вандермонда матрицы размера n_1. Следовательно, учитывая условие (5), имеем

$$|V(u_1, u_2, ..., u_{s+l})| > \delta_1^{3(3-1)}. \quad (28)$$

Из системы (27) с помощью формулы Крамера получим оценки

$$|s_i| = \frac{|\Delta_i|}{|V(u_1, u_2)|} < c_{13}a_3Q^{-v`_1}. \quad (29)$$

Из оценки (29) следует, что количество векторов $\bar{s} = (s_3, s_2, s_1, s_0)$ не превосходит $2c_9a_3Q^{-3v`_1}$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{\bar{s}} \mu\mathfrak{L}_3(Q) < c_{14}Q^{-1-3v`_1}. \quad (30)$$

Из неравенства (30) можно посчитать сумму мер по Π

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in T_n(\bar{b})} \mu\sigma_P(\alpha) \le$$

$$\le \sum_{\Pi} \sum_{\bar{s}} \mu\mathfrak{L}_3(Q) < c_{15}Q^{-1-(v`_1+...+v`_1)} < \frac{1}{4}\mu\Pi_j. \quad (31)$$

Очевидно включение

$$\mathfrak{L}_n(Q) \subset \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad (32)$$

где σ_1, σ_2, – объединения всех существенных и не существенных областей $\sigma'_{P_1}(\alpha_1)$. Следовательно, из неравенств (16) и (32) следует оценка

$$\mu\mathfrak{L}_n(Q) \le \frac{1}{4}\mu\Pi_j + \frac{1}{4}\mu\Pi_j = \frac{1}{2}\mu\Pi_j, \quad (33)$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим множество $\mathfrak{L}'_n(Q) = \Pi_j / \mathfrak{L}'_n(Q)$. Из теоремы 1 следует оценка

$$\mu\mathfrak{L}'_n(Q) > \frac{3}{4}\mu\Pi_j. \quad (34)$$

На множестве $\mathfrak{L}'_n(Q)$ выполняется условие

$$\min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|) > \delta_0 Q, \ \delta_0 > 0.$$

С помощью принципа Дирихле можно показать, что для любой точки $x \in \mathfrak{L}'_n(Q)$ существует многочлен $P \in P_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1)| < c_{16}Q^{-v_1}, \\ |P(x_2)| < c_{16}Q^{-v_2}, \\ v_1 + v_2 = \dfrac{n-3}{2}, \\ \min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|) > \delta_0 Q, \delta_0 > 0. \end{cases} \quad (35)$$

Рассмотрим систему алгебраических точек $\alpha_1 ... \alpha_2$. Каждой из этих точек с помощью системы неравенств (35) поставим в соответствие параллелепипеды

$$\sigma(\alpha_j) = \{x \in \Pi_j : |x_i - \alpha_{ji}| <$$

$$< 2^{n-1}c_{16}\delta_0 Q^{-1+\frac{\mu_i}{2}-v_i}, i \in \{1,2\}\}. \quad (36)$$

Очевидно, выполняется условие

$$\mathfrak{L}'_n(Q) \subset \bigcup_{j=1}^{t} \sigma(\alpha_j). \quad (37)$$

Тогда из оценок (34), (36), (37) следуют неравенства

$$\frac{3}{4}\mu\Pi_j < \mu\mathfrak{L}'_n(Q) \le \sum_{j=1}^{t} \sigma(\alpha_j) \le$$

$$\le tc_{17}Q^{-2+\mu_1+\mu_2-2v_1-2v_2} \le tc_{17}Q^{-1-n+\mu_1+\mu_2}, \quad (38)$$

из которых получаем оценку

$$t \geq c_{18} Q^{n+1-\mu_1-\mu_2} \mu \Pi_j .$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Существует по меньшей мере* $c_2 Q^{n+1-\gamma}$ *алгебраических точек* $(\alpha_1, \alpha_2) \in L_f(Q, \gamma, K)$.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим параллелепипеды Π_j из определения (5), покрывающие область I. По теореме 1 в каждом из таких параллелепипедов содержится не менее $c_1 Q^{n+1-2\gamma} \mu \Pi_j$. Тогда справедлива оценка

$$\# M_f^n(Q, \gamma, I) = \# L_f(Q, \gamma, I) \cap \mathbb{A}_n^2(Q) > c_{19} Q^{n+1-\gamma}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гетце // Изв. РАН. Сер. матем. – Т. 79. Выпуск 1. – 2015. – С. 21–42.
2. *Гельфонд, А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М. : ГИТТЛ, 1952.
3. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической тории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967.
4. *Ламчановская, М. В.* О распределении комплексных алгебраических чисел в кругах малого радиуса на комплексной плоскости / М. В. Ламчановская, Н. И. Калоша // Тр. Ин-та матем. – 2015г. – Т. 23 – Выпуск 1. – С. 85.
5. *Фельдман, Н. И.* Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I. Аппроксимация логарифмов алгебраических чисел / Н. И. Фельдман // Изв. АН СССР. Сер. матем. – Т. 15. – Выпуск –1. 1951.
6. *Касселс, Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс . – М., ИЛ, 1961. – С. 10.
7. *Mahler, K.* Ueber das Mass der Menge aller S-Zahlen, Math. Ann., 1932, s. 106.
8. *Берник, В. И.* Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980, Т. 44. – Выпуск 1.
9. *Спринджук, В. Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. матем. – Т. 29. Выпуск 2 – 1965.
10. *Th. Schneider.* Einfuehrung in die Transzendenten Zahlen, Springer-Verlag, 1957, s. 139. Springer-Verlag, 1957, s. 139.

References

1. *Bernik, V. I.* Raspredeleniye deystvitelnykh algebraicheskikh chisel proizvolnoy stepeni v korotkikh intervalakh / V. I. Bernik, F. Getts // Izv. RAN. Ser. matem., tom. 79, vypusk 1, 2015 g., s. 21–42.
2. *Gelfond, A. O.* Transtsendentnyye i algebraicheskiye chisla, M., GITTL, 1952 g.
3. *Sprindzhuk, V. G.* Problema Malera v metricheskoy teorii chisel / V. G. Sprindzhuk. – Minsk : Nauka i tekhnika, 1967.
4. *Lamchanovskaya, M. V.* O raspredelenii kompleksnykh algebraicheskikh chisel v krugakh malogo radiusa na kompleksnoy ploskosti / M. V. Lamchanovskaya, N. I. Kalosha // Tr. In-ta matem. – 2015. – T. 23. Vypusk 1. – S. 85.
5. *Feldman, N. I.* Approksimatsiya nekotorykh transtsendentnykh chisel. I. Approksimatsiya logarifmov algebraicheskikh algebraicheskikh chisel / N. I. Feldman // Izv. AN SSSR. Ser. matem., tom 15, vypusk 1, 1951 g.
6. *Kassels, Dzh. V. S.* Vvedeniye v teoriyu diofantovykh priblizheniy / Dzh. V. S. Kassels M., IL, 1961 g., s. 10.
7. *Mahler, K.* Uber das Mass der Menge aller S-Zahlen, Math. Ann., 1932, S. 106.
8. *Bernik, V. I.* Metricheskaya teorema o sovmestnom priblizhenii nulya znacheniyami tselochislennykh mnogochlenov / V. I. Bernik // Izv. AN SSSR. Ser. matem., 1980, tom 44, vypusk 1.
9. *Sprindzhuk, V. G.* Dokazatelstvo gipotezy Malera o mere mnozhestva S-chisel / V. G. Sprindzhuk// Izv. AN SSSR. Ser. matem., tom 29, vypusk 2, 1965.
10. Th. Schneider. Einfuehrung in die transzendenten Zahlen, Springer-Verlag, 1957, S. 139.