МАТЭМАТЫКА

Весці БДПУ. Серыя 3. 2018. № 2. С. 5–9.

УДК 517.925

АБ РЭДУЦЫРАВАННІ АДНОЙ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ДА КАНАНІЧНАГА ВЫГЛЯДУ

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры інфармацыйных тэхналогій і вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі БДПУ

Паступіў у рэдакцыю 24.04.18.

UDC 517.925

ON THE REDUCTION OF A SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS TO A CANONICAL FORM

V. Shilinets,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Informational Technologies and Higher Mathematics, EE of Federation of Trade Unions of Belarus “International University “MITSO”;

I. Gulo,
PhD in Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, BSPU

Received on 24.04.18

Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных рэдуцыравана да кананічнага выгляду і атрымана агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных, эквівалентнага адпаведнай кананічнай сістэме.

Ключавыя словы: манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, фармальныя вытворныя, сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных, дыферэнцыяльнае раўнанне ў фармальных вытворных.

The system of partial differential equations is reduced to the canonical form and a general solution of the differential equation in formal derivatives equivalent to the corresponding canonical system is obtained.

Keywords: monogenic in the sense of V. S. Fedorov, formal derivatives, system of differential equations in the partial derivatives, differential equation in the formal derivatives.

Уводзіны. У шэрагу прац [1–6] выкарыстоўваліся спецыяльныя дыферэнцыяльныя аператары (фармальныя вытворныя) [7] для прывядзення да кананічнага выгляду сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных.

У дадзенай працы разглядаецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= B_1\frac{\partial v}{\partial x} + B_2\frac{\partial v}{\partial y} + M_1u + N_1v + F_1u^2 + E_1v^2 + C_1uv, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= B_3\frac{\partial v}{\partial x} + B_4\frac{\partial v}{\partial y} + M_2u + N_2v + F_2u^2 + E_2v^2 + C_2uv, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

дзе $B_k, M_i, N_i, F_i, E_i, C_i\,(u,v)$ – вядомыя (шуканыя) функцыі класа $A^*(G); k = 1,\ldots 4; i = 1,2$.

Праз $A^*(G)$ заўсёды абазначаем клас усіх аналітычных функцый (наогул камплексных) ад рэчаісных зменных x, y у некаторым адназвязным абсягу G, які змяшчае пачатак каардынат.

Ніжэй намі ўстаноўлена, што дадзеную сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1) таксама можна кананізаваць, выкарыстоўваючы фармальныя вытворныя.

Асноўная частка. Вырашаем наступную задачу: маючы сістэму выгляду (1), знайсці неабходную і дастатковую ўмовы, пры якіх існуюць такія функцыі $p(x,y), q(x,y) \in A^*(G)$, што сістэма (1) прыводзіцца да выгляду:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}=a_1 f+a_2 f^2+b_1\varphi+b_2\varphi^2+c_1 f\varphi,\\&\frac{\partial f}{\partial q}=a_3 f+a_4 f^2+b_3\varphi+b_4\varphi^2+c_2 f\varphi,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

дзе f, φ – лінейныя функцыі ад u, v з каэфіцыентамі класа $A^*(G)$; a_k, b_k, c_j (k = 1; ...φ; j = 1,2) – вядомыя функцыі таго ж класа, а $\frac{\partial f}{\partial p}$ і $\frac{\partial f}{\partial q}$ – дыферэнцыяльныя аператары (фармальныя вытворныя), якія вызначаюцца роўнасцямі

$$\frac{\partial f}{\partial p}\equiv\frac{1}{\delta}\left(f'_x q'_y-f'_y q'_x\right),\ \frac{\partial f}{\partial q}\equiv\frac{1}{\delta}\left(f'_y p'_x-f'_x p'_y\right),\qquad(3)$$

дзе $\delta\equiv\begin{vmatrix}p'_x & p'_y\\ q'_x & q'_y\end{vmatrix}\neq 0.$

Сістэма (2), згодна з (3), можа быць запісана, відавочна, у выглядзе

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}=A_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+A_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+T_1 f+\Theta_1\varphi+\Phi_1 f^2+Q_1\varphi^2+K_1 f\varphi,\\&\frac{\partial f}{\partial y}=A_3\frac{\partial f}{\partial x}+A_4\frac{\partial\varphi}{\partial y}+T_2 f+\Theta_2 f+\Phi_2 f^2+Q_2\varphi^2+K_2 f\varphi,\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

дзе

$$\left.\begin{aligned}&T_1=a_1p'_x+a_3q'_x,\ T_2=a_1p'_y+a_3q'_y,\\&\Theta_1=b_1p'_x+b_3q'_x,\ \Theta_2=b_1p'_y+b_3q'_y,\\&\Phi_1=a_2p'_x+a_4q'_x,\ \Phi_2=a_2p'_y+a_4q'_y,\\&Q_1=b_2p'_x+b_4q'_x,\ Q_2=b_2p'_y+b_4q'_y,\\&K_1=c_1p'_x+c_2q'_x,\ K_2=c_1p'_y+c_2q'_y,\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}&-A_1=\frac{p'_xp'_y}{\delta},\quad -A_1=A_4,\\&A_2=\frac{(p'_x)^2}{\delta},\quad -A_3=\frac{(p'_y)^2}{\delta}.\end{aligned}\right\}\qquad(5')$$

З (5′) атрымліваем:

$$\left.\begin{aligned}&p'_x=A_1q'_x+A_2q'_y,\\&p'_y=A_3q'_x+A_4q'_y,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}&A_1p'_x+A_2p'_y=0,\\&A_3p'_x+A_4p'_y=0.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Перапішам роўнасці (6) і (7) у выглядзе сістэмы

$$\left.\begin{aligned}&-p'_x+0\cdot p'_y+A_1q'_x+A_2q'_y=0,\\&0\cdot p'_x-p'_y+A_3q'_x+A_4q'_y=0,\\&A_1p'_x+A_2p'_y+0\cdot q'_x+0\cdot q'_y=0,\\&A_3p'_x+A_4p'_y+0\cdot q'_x+q'_y=0.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Для вырашальнасці сістэмы (8) адносна $p'_x,p'_y,q'_x,q'_y\,(\delta\neq 0)$ неабходна мець

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & A_1 & A_2\\ 0 & -1 & A_3 & A_4\\ A_1 & A_2 & 0 & 0\\ A_3 & A_4 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\qquad(9)$$

Пасля вылічэння дэтэрмінанта з улікам, што $A_1=-A_4$, атрымаем

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{vmatrix}=0.$$

Тэарэма 1. Неабходная ўмова прывядзення сістэмы (4) да сістэмы (2) з тымі ж невядомымі функцыямі заключаецца ў тым, што

$$A_1=-A_4,\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{vmatrix}=0.\qquad(10)$$

Няхай цяпер дадзена сістэма (4), у якой $A_k,T_j,\Theta_j,\Phi_j,Q_j,K_j\,(k=1,...4;j=1,2)$ такія функцыі класа $A^*(G)$, што выконваецца ў G умова (10). Даследуем магчымасць прывядзення такой сістэмы (4) да выгляду (2).

Для вырашэння гэтай задачы здзейснім наступнае.

Складзем сістэму (6) з невядомымі функцыямі p, q і знойдзем функцыю $q(x,y)\in A^*(G)$ як якое-небудзь частковае рашэнне раўнання

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_3q'_x+A_4q'_y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(A_1q'_x+A_2q'_y\right),\qquad(11)$$

якое ўзнікла як умова інтэгравальнасці сістэмы (6).

Разгледзім больш падрабязна раўнанне (11).

Каэфіцыенты раўнання задавальняюць умове (10).

Разгледзім некаторыя выпадкі, якія могуць сустрэцца пры рашэнні раўнання (11).

1°. $A_3\neq 0$. Тады раўнанне (11) прыводзіцца да выгляду

$$q''_{xx}=f\left(x,y,q'_x,q'_y,q''_{xy},q''_{yy}\right),\qquad(12)$$

у некаторым абсягу $G_0 \subset G$ (для пэўнасці лічым, што пункт $(0,0)\in G_0$; $f\left(x,y,q'_x,q'_y,q''_{xy},q''_{yy}\right)\in A^*\left(G_0\right)$).

Раўнанне (12) – гэта раўнанне Кашы – Кавалеўскай. Зададзім пачатковыя ўмовы

$$q|_{x=0}=\psi_1(y),\ q'_x|_{x=0}=\psi_2(y),$$

дзе $\psi_1(y),\psi_2(y)$ – аналітычныя функцыі ад y.

Разгледзім $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x$. Падставіўшы замест p'_x і p'_y правыя часткі раўнанняў сістэмы (6) і ўлічваючы ўмовы (10), атрымаем

$$\delta = 2A_1 q'_x q'_y + A_2\left(q'_y\right)^2 - A_3\left(q'_x\right)^2,$$

$$\delta^0 = 2A_1^0\left(q'_x\right)^0\left(q'_y\right)^0 + A_2^0\left(\left(q'_y\right)^0\right)^2 + A_3^0\left(\left(q'_x\right)^0\right)^2$$

(верхні індэкс 0 абазначае значэнне функцыі пры $x=y=0$). Таму можам лічыць (пры належным падборы $\left(q'_x\right)^0,\left(q'_y\right)^0,q^0$) $\delta^0\neq 0$, а таму знойдзецца такое наваколле пачатку каардынат, у якім $\delta^0 \neq 0$. Толькі гэтае наваколле і будзем у далейшым разглядаць як абсяг змянення зменных x, y.

2°. $A_2 \neq 0$. Тады раўнанне (11) прыводзіцца да выгляду

$$q''_{yy} = f\left(x,y,q'_x,q'_y,q''_{xy},q''_{xx}\right)$$

у некаторым абсягу $G_0\subset G$.

У другім выпадку мы аналагічна знойдзем такую функцыю $q(x,y)$ і такі абсяг, у якім $\delta^0\neq 0$.

Знайшоўшы q, знойдзем p з (6). Такім чынам, знойдзены функцыі p і q, для якіх $\delta^0\neq 0$.

Зараз знаходзім a_k, b_k, c_j $(k=1,...,4;\ j=1,2)$ з (5). Сістэмы (5) вызначаныя, бо $\delta^0\neq 0$. Пакажам, што A_1, A_2, A_3 выражаюцца праз функцыі p і q па формулах (5´).

Сапраўды, маем:

$$\left(p'_x\right)^2 = (A_1 q'_x + A_2 q'_y)^2 = A_2(A_2(q'_y)^2 + 2A_1q'_xq'_y - A_3(q'_x)^2) = A_2\delta,$$

гэта значыць

$$A_2 = \frac{(p'_x)^2}{\delta};$$

$$\begin{aligned} p'_xp'_y &= (A_2q'_y + A_1q'_x)(A_4q'_y + A_3q'_x) = \\ &= A_2A_4(q'_y)^2 + A_2A_3q'_xq'_y + \\ &+ A_1A_4q'_xq'_y + A_1A_3(q'_x)^2 = \\ &= -A_1(A_2(q'_y)^2 + 2A_1q'_xq'_y - A_3(q'_x)^2) = -A_1\delta, \end{aligned}$$

гэта значыць

$$A_1 = -\frac{p'_xp'_y}{\delta};$$

$$\left(p'_y\right)^2 = (A_3q'_x + A_4q'_y)^2 = -A_3(A_2(q'_y)^2 + 2A_1q'_xq'_y - A_3(q'_x)^2) = -A_3\delta,$$

гэта значыць

$$A_3 = -\frac{(p'_y)^2}{\delta}.$$

Такім чынам, для каэфіцыентаў атрымалі выразы (5´).

Тэарэма 2. Сістэма (4) прыводзіцца да сістэмы (2) кожны раз, калі выконваецца ўмова (10).

Вылучым умовы пераўтварэння сістэмы (1) у сістэму (4).

Тэарэма 3. Сістэма (1) прыводзіцца да сістэмы (4) лінейнай падстаноўкай

$$u = f+\sigma\varphi,\ v=\varphi$$

кожны раз, калі $D=\sigma^2$, дзе $\sigma = \dfrac{B_1+B_4}{2}$, $D = \begin{vmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{vmatrix}$.

Доказ. Мяркуем у дадзенай сістэме (1) $u=f+\sigma\varphi, v=\varphi$. Тады сістэма (1) прыме наступны выгляд:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (B_1-\sigma)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ldots, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= B_3\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (B_4-\sigma)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ldots. \end{aligned}\right\}$$

Маем

$$\begin{vmatrix}B_1-\sigma & B_2\\ B_3 & B_4-\sigma\end{vmatrix} = \mathrm{D}-\sigma^2=0,$$

бо, згодна з умовай, $D=\sigma^2$.

Далей, $B_1-\sigma+B_4-\sigma=0$. Такім чынам, сістэма (1) прыводзіцца да сістэмы (4), дзе

$$A_1=-A_4,\ \begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{vmatrix}=0.$$

Разгледзім далей выкарыстанне дуальных функцый, манагенных у сэнсе У. С. Фёдарава (F-манагенных) [8], для пабудовы рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}=a_1 f+a_2 f^2+b_1\varphi+b_2 f^2+c_1 f\varphi,\\ &\frac{\partial f}{\partial q}=a_3 f+a_4 f^2+b_3 f+b_4\varphi^2+c_2 f\varphi,\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

дзе $a_k, b_k, c_i\ (k=1,...,4; i=1,2)(f,\varphi)$ − вядомыя (шуканыя) камплексныя функцыі ад x, y. Усе функцыі, якія разглядаюцца далей, мяркуюцца непарыўна дыферэнцавальнымі функцыямі рэчаісных зменных у некаторым адназвязным абсягу D. Усюды праз $p(x, y)$, $q(x, y)$ абазначаем дзве такія камплексныя функцыі, для якіх $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x \neq 0$ у разглядаемым абсягу. Аператары $\frac{\partial}{\partial q}$ і $\frac{\partial}{\partial p}$ вызначаюцца роўнасцямі (3).

Для любой дуальнай непарыўна дыферэнцавальнай функцыі $F(x, y)$ уводзім наступныя дыферэнцыяльныя аператары:

$$\frac{\partial F}{\partial P}=\frac{\partial F}{\partial p},\ \frac{\partial F}{\partial Q}=\frac{\partial F}{\partial q}-\varepsilon\frac{\partial F}{\partial p}\qquad(14)$$

$$\left(P=p+\varepsilon q, Q=q, \varepsilon^2=0\right).$$

Лёгка даказаць, што для гэтых аператараў маюць месца звычайныя правілы дыферэнцавання сумы, здабытку і дзелі. Акрамя гэтага, маем:

$$\frac{\partial(f+\varepsilon\varphi)}{\partial Q}=\frac{\partial f}{\partial q}-\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right).\qquad(15)$$

Тэарэма 4. У выпадку

$$b_2=b_3=b_4=c_2=0,\qquad(16)$$

$$b_1=-a_3,\ a_4=-\frac{c_1}{2}\qquad(17)$$

сістэма (13) прыводзіцца да раўнання

$$\frac{\partial F}{\partial Q}=AF+BF^2,\qquad(18)$$

дзе

$$F=f+\varepsilon\varphi, A=a_3-\varepsilon a_1, B=a_4-\varepsilon a_2, \varepsilon^2=0.$$

Доказ. На падставе азначэння дыферэнцыяльных аператараў (14) і з (13) маем

$$\frac{\partial F}{\partial Q}=a_3 f+a_4 f^2-\varepsilon a_1 f-\varepsilon a_2 f^2-\varepsilon b_1\varphi-\varepsilon c_1 f\varphi.$$

Адсюль, улічваючы роўнасці (16) і (17), атрымліваем раўнанне (18).

Тэарэма даказаная.

Знойдзем агульнае рашэнне раўнання (18)

$$\frac{\partial F}{\partial Q}=AF+BF^2,$$

дзе F − невядомая дуальная функцыя, A, B − вядомыя дуальныя функцыі, прычым лічым, што A і B − манагенныя ў сэнсе У. С. Фёдарава функцыі па функцыі $Q = q$ у абсягу D.

Мяркуем

$$u=\int_{M_0}^{M}AdQ,\ F\exp(-u)=v.$$

Пры гэтым маем: u − манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава функцыя па функцыі Q:

$$\frac{du}{dQ}=\frac{\partial u}{\partial Q}=A,\qquad(19)$$

дзе $\frac{du}{dQ}$ − вытворная ў сэнсе У. С. Фёдарава; $F=\exp(u)v$.

Раўнанне (18) прыме выгляд

$$\frac{\partial F}{\partial Q}=\exp(u)\frac{\partial u}{\partial Q}v+\exp(u)\frac{\partial v}{\partial Q}=$$
$$=A\exp(u)v+B\exp(2u)v^2,$$

адкуль і з (19) атрымаем

$$\frac{\partial v}{\partial Q}=B\exp(u)v^2.\qquad(20)$$

Мяркуючы $\omega=-\frac{1}{v}$, маем $\frac{\partial\omega}{\partial Q}=\frac{\frac{\partial v}{\partial Q}}{v^2}$, $\frac{\partial v}{\partial Q}=v^2\frac{\partial\omega}{\partial Q}$. З роўнасці (20) атрымаем

$$\frac{\partial\omega}{\partial Q}=B\exp(\mathrm{u}).\qquad(21)$$

Згодна з азначэннем $f=\exp(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}$, адкуль

$$\Delta f=\exp\mathrm{u}(\exp\mathrm{u}\Delta u-1)=\exp\mathrm{u}\left(\Delta u+(\Delta u)^2+...\right)$$

$$\left(\Delta u=u(M')-u(M)\right)$$

З апошняй роўнасці вынікае: калі − манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава функцыя па функцыі Q, тады $\exp u$ − таксама манагенная функцыя па Q у абсягу D, прычым $\frac{\partial(\exp\mathrm{u})}{\partial Q}=\exp u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial Q}$.

Такім чынам, $B\exp u$ ёсць функцыя, манагенная ў сэнсе У. С. Фёдарава па функцыі Q у абсягу D.

З (21) атрымаем $\frac{\partial}{\partial Q}\left(\omega - \int_{M_0}^{M} B\exp(u)dQ\right) = 0$,

гэта значыць, што $\omega - \int_{M_0}^{M} B\exp(u)dQ = \Phi[P]$, дзе

Ф[P]− манагенная па P у абсягу D функцыя.

Такім чынам, $F = \exp(u)\cdot v$, дзе $u = \int_{M_0}^{M} AdQ, v = -\frac{1}{\omega}, \omega = \int_{M_0}^{M} B\exp(u)dQ + \Phi[P]$, Ф[P] – манагенная ў абсягу D па функцыі P функцыя.

Заўвага. Няхай у раўнанні (18) A і B – некаторыя пастаянныя. Тады мяркуем $u = AQ, F\cdot\exp(-u) = v$. Раўнанне (18) прыме выгляд

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = B\exp(AQ)v^2. \qquad (22)$$

Мяркуем $\omega = -\frac{1}{v}$, тады $\frac{\partial\omega}{\partial Q} = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial Q}}{v^2}, \frac{\partial v}{\partial Q} = v^2\frac{\partial\omega}{\partial Q}$.

З (22) маем $\frac{\partial\omega}{\partial Q} = B\exp(AQ)$,

адкуль $\omega = \frac{B}{A}\exp(AQ) + \Phi[P]$.

Заключэнне. Такім чынам, сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1) рэдуцыравана да сістэмы кананічнага выгляду (2) і атрымана агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных (18), эквівалентнага сістэме (2).

Літаратура

1. *Стельмашук, Н. Т.* О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – Т. 5.– № 1.– С. 166–173.
2. *Векуа, И. Н.* Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 628 с.
3. *Стельмашук, Н. Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008.– № 2. – С. 61–65.
4. *Стэльмашук, М. Т.* Выкарыстанне фармальных вытворных і бікамплексных функцый пры пераўтварэнні сістэмы лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Г. В. Хадкевіч // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2005.– № 4. – С. 25–27.
5. *Стэльмашук, М. Т.* Рэдуцыраванне адной сістэмы раўнанняў у частковых вытворных да кананічнага выгляду пры дапамозе двайных функцый / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2005. – № 1. – С. 21–23.
6. *Шылінец, У. А.* Аб рэдуцыраванні сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў да кананічнага выгляду / У. А. Шылінец, І. М. Гуло, І. А. Ільючык // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2016. – № 4. – С. 18–21.
7. *Гусев, В. А.* Об одном обобщении ареолярных производных / В. А. Гусев // Bul. Stiint. si tehnical inst. Pol. Timisoara. – 1962. – V. 7.– Fasc. 2. – P. 223–238.
8. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958.– № 6.– С. 257–265.

References

1. *Stelmashuk, N. T.* O nekotorykh lineynykh differentsialnykh sistemakh v chastnykh proizvodnykh / N. T. Stelmashuk // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. – 1964. – T 5.– № 1.– S. 166–173.
2. *Vekua, I. N.* Obobshchyonnyye analiticheskiye funktsii / I. N. Vekua. – M. : GIFML, 1959. – 628 s.
3. *Stelmashuk, N. T.* O preobrazovanii k kanonicheskomu vidu sistemy lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s pomoshchyu dvoynykh differentsialnykh operatorov / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Vestsi NAN BElarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008.– № 2. – S. 61–65.
4. *Stelmashuk, M. T.* Vykarystanne farmalnykh vytvornykh i bikampleksnykh funktsyy pry perautvarenni sistemy lineynykh dyferentsyyalnykh raunannyau u chastkovykh vytvornykh / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets, G. V. Khadkevich // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2005. – № 4. – S. 25–27.
5. *Stelmashuk, M. T.* Redutsyravanne adnoy sistemy raunannyau u chastkovykh vytvornykh da kananichnaga vyglyadu pry dapamoze dvaynykh funktsyy / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2005.– № 1. – S. 21–23.
6. *Shylinets, U. A.* Ab redutsyravanni sistemy dyferentsyyalnykh raunannyau da kananichnaga vyglyadu / U. A. Shylinets, I. M. Gulo, I. A. Ilyuchyk // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2016.– № 4. – S. 18–21.
7. *Gusev, V. A.* Ob odnom obobshchenii areolyarnykh proizvodnykh / V. A. Gusev // Bul. Stiint. si tehnical inst. Pol. Timisoara. – 1962. – V. 7.– Fasc. 2. – P. 223–238.
8. *Fyodorov, V. S.* Osnovnyye svoystva obobshchyonnykh monogennykh funktsiy / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958.– № 6.– S. 257–265