Весці БДПУ. Серыя 3. 2016. № 4. С. 22–26

УДК 514.765.7

ДАСЛЕДАВАННЕ Ў $l_p^{m\times m}$ МАТРЫЧНАГА ДЫСКРЭТНАГА ГІПЕРГЕАМЕТРЫЧНАГА РАЎНАННЯ Ў НЕЗВЫРОДНЫМ ВЫПАДКУ

Д. А. Навічкова,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі БДУ

Паступіў у рэдакцыю 07.09.16.

UDC 514.765.7

DISCOVERY IN $L_p^{m\times m}$ OF MATRIX DISCRETE HYPERGEOMETRIC EQUATION IN SINGULAR CASE

D. Navichkova,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, BSU

Received on 07.09.16.

Артыкул прысвечаны даследаванню ўмоў развязальнасці матрычнага рознаснага гіпергеаметрычнага раўнання ў модулі сумавальных матрычных паслядоўнасцей у незвыродным выпадку. Сцісла апісваецца структура банахава модуля матрычных сумавальных паслядоўнасцей, уводзіцца паняцце матрычнага сімвала Пахгамера і адпаведна матрычнай гіпергеаметрычнай паслядоўнасці. Апісваюцца ўмовы на ўласныя значэнні матрыц, што ўваходзяць у структуру матрычнай гіпергеаметрычнай паслядоўнасці, пры якіх дадзеная паслядоўнасць належыць да модуля сумавальных матрычных паслядоўнасцей. Аналагічныя вынікі прыводзяцца і для скалярнага выпадка.
Разглядаецца матрычны дыскрэтны аналаг гіпергеаметрычнага раўнання – рознаснае матрычнае гіпергеаметрычнае раўнанне, якое з дапамогай метада аперацыйнага злічэння прыводзіцца да алгебраічнага дыферэнцыяльнага раўнання. У артыкуле прыводзяцца ўмовы, пры якіх азначанае раўнанне развязальнае ў модулі сумавальных матрычных паслядоўнасцей, а ў якасці развязка выступае матрычная гіпергеаметрычная паслядоўнасць. Даследаванні праводзяцца ў незвыродным выпадку адрозных ад нуля ўласных значэнняў адной з матрыц, што ўваходзіць у склад каэфіцыентаў раўнання.

Ключавыя словы: гіпергеаметрычнае раўнанне, незвыродны выпадак, матрычныя паслядоўнасці.

The article is devoted to the conditioning of the matrix difference hypergeometric equation solvability in the module of summable matrix sequences in singular case. The structure of the module is considered. The concepts of matrix Pochhammer symbol and matrix hypergeometric sequences are introduced. The conditions on equal values of the matrix involved in structure of matrix hypergeometric sequences under which the sequences belong to the module are described. The similar results for scalar case are given.
The matrix discrete analogue of hypergeometric equation is considered. By means of the operational method it is transformed to the algebraic differential equation. The solvability conditions when a solution of the matrix difference hypergeometric equation belongs to the module are given. The solution of the equation are matrix hypergeometric sequences. The research is held for a non-singular case when an equation coefficient is a matrix with non-zero equal values.

Keywords: hypergeometric equation, singular case, matrix sequences.

Уводзіны. Рознасныя раўнанні з'яўляюцца матэматычнымі мадэлямі дыскрэтных дынамічных сістэм і знаходзяць шырокае дастасаванне ў тэорыі сігнала, тэорыі аўтаматычнага кіравання і г. д.

Задача складаецца ў адшуканні некаторай паслядоўнасці па рэкурэнтных суадносінах паміж яе элементамі пры зададзеных пачатковых умовах. У выпадку сталых скалярных каэфіцыентаў такія раўнанні вывучаліся многімі аўтарамі з дапамогай разнастайных метадаў. Падрабязны гістарычны агляд дадзенага пытання і даследаванне лінейных рознасных раўнанняў са сталымі каэфіцыентамі ў l_p з дапамогай метада эрмітавых форм, а таксама вывучэнне матрычных рознасных раўнанняў першага парадку ў $l_p^{m\times m}$ і $l_{\infty,\lambda}^{m\times m}$ адлюстравана ў [1]. Матрычныя раўнанні са зменнымі каэфіцыентамі вышэйшых парадкаў вывучаны ў меншай ступені. Рэкурэнтная форма запісу хоць і дазваляе падлічыць элементы паслядоўнасці, увогуле кажучы, не дае адказы на пытанні пра колькасць развязкаў, умовы развязальнасці, прыналежнасць развязка да дадзенага класу і г. д. Таму ўяўляе інтарэс адшуканне развязка ў яўным выглядзе, напрыклад, у тэрмінах некаторых вядомых аналітычных функцый. Рознасныя раўнанні са зменнымі каэфіцыентамі могуць быць зведзены да алгебраічных дыферэнцыяльных раўнанняў у некаторых алгебрах і модулях паслядоўнасцей. Некаторыя іх тыпы вывучаны ў работах [2–4].

У дадзеным артыкуле разглядаецца матрычны дыскрэтны аналаг гіпергеаметрычнага раўнання ў незвыродным выпадку. Даследуюцца ўмовы развязальнасці такога раўнання ў $\boldsymbol{l}_p^{m \times m}$.

1. Алгебры матрычных паслядоўнасцей і гіперпаслядоўнасцей. Няхай K – камутатыўная алгебра гіперпаслядоўнасцей [1] над $\mathbb{C}$ выгляду

$$x = \sum_{k=-r}^{\infty} x_k h^k = \{\ldots,0,\ldots,0,x_{-r},\ldots,\underline{x_0},x_1,\ldots\},$$

дзе $x_k \in \mathbb{C}$, r – любы натуральны лік (падкрэслены элемент стаіць на нулявым месцы). Множанне ў K задаецца з дапамогай дыскрэтнай згорткі Фур'е, якая азначаецца роўнасцю

$$(xy)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} y_k, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Тут толькі канечная колькасць адрозных ад нуля складнікаў. Няхай

$$h = \{\ldots,0,\ldots,\underline{0},1,0,\ldots,0,\ldots\},$$

$$s = \{\ldots,0,\ldots,0,1,\underline{0},\ldots,0,\ldots\},$$

тады $hs = sh = I = \{\ldots,0,\ldots,0,\underline{1},0,\ldots,0,\ldots\}$ – адзінка колца K, $s = h^{-1}$. Пры гэтым элементы K можна ўявіць у выглядзе фармальнага ступеневага шэрагу $x = \sum\limits_{k=-r}^{\infty} x_k h^k$. Падмноства K_0 элементаў выгляду $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k h^k$ утварае алгебру паслядоўнасцей з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Лапласа

$$(xy)_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k .$$

$K^{m\times m}$ – алгебра $(m\times m)$-матрыц з элементамі з K. Матрыцы з $K^{m\times m}$ уяўляюцца ў выглядзе фармальных ступеневых шэрагаў $X = \sum\limits_{k=-r}^{\infty} X_k h^k$, $X_k \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Заўважым, што тут маецца на ўвазе зручны спосаб запісу і пытанне збежнасці не паўстае. Аналагічна ўводзіцца алгебра $K_0^{m\times m}$.

У $K^{m\times m}$, $K_0^{m\times m}$ уводзіцца аперацыя алгебраічнага дыферэнцавання

$$DX = \sum_{k=-r}^{\infty} k X_k h^{k-1} .$$

З яе дапамогай у тэрмінах алгебры $K^{m\times m}$ выводзяцца наступныя ўяўленні паслядоўнасцей з $K_0^{m\times m}$ [1]:

$$\{X_n\}_{n=0}^{\infty} = X, \ \{X_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} = sX - sX_0,$$

$$\{nX_n\}_{n=0}^{\infty} = hDX, \ \{nX_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} = DX - sX + sX_0,$$

$$\{n^2 X_n\}_{n=0}^{\infty} = h^2 D^2 X + hDX,$$

$$\{n^2 X_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} = hD^2 X - DX + sX - sX_0 . \qquad (1)$$

Праз $l_p^{m\times m}$ пазначым падмноства матрычных паслядоўнасцей $X = \left[x^{ij}\right] \in K_0^{m\times m}$, $i,j = \overline{1,m}$, такіх, што $x^{ij} \in l_p$, $1 \le p \le +\infty$.

Азначэнне 1. Няхай $X = \left[x^{ij}\right] \in K_0^{m\times m}$, дзе

$$x^{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{ij} h^n, \ \tilde{m}_n(X) := \max_{1\le i,j\le m} \left|x_n^{ij}\right| .$$

Паслядоўнасць $\tilde{m}(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{m}_n(X) h^n$ назавем мажарантнай паслядоўнасцю для матрыцы X.

Лёгка праверыць, што з $\left(X \in l_p^{m\times m}\right)$ вынікае $\tilde{m}(X) \in l_p$.

Азначэнне 2. $\|X\|_{l_p^{m\times m}} = \|m^X\|_{l_p}$.

Для сталай матрыцы $T = \left[t^{ij}\right] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ прымем $\|T\| = \max\limits_{1\le i,j\le m} |t_{ij}|$. Адносна дадзенай нормы $l_p^{m\times m}$ з'яўляецца банахавай прасторай. Непасрэдным множаннем з выкарыстаннем азначэння 2 лёгка выводзіцца наступная тэарэма.

Тэарэма 1. Няхай

$$X \in l_p^{m\times m},\ 1 \le p \le +\infty,\ T \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Тады $TX,\ XT \in l_p^{m\times m}$ і

$$\|TX\|_{l_p^{m\times m}} \le m\|T\|\|X\|_{l_p^{m\times m}},$$

$$\|XT\|_{l_p^{m\times m}} \le m\|T\|\|X\|_{l_p^{m\times m}}.$$

2. Матрычная гіпергеаметрычная паслядоўнасць $_2F_1[A, B; C; h]$ і яе ўласцівасці. Няхай $A,B,C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – перастаўляльныя паміж сабой матрыцы, уласныя значэнні матрыцы C не роўныя $0,-1,-2,\ldots$.

Азначэнне 3. Матрычным сімвалам Пахгамера назавем

$$(A)_n = A(A+E)(A+2E)\cdots(A+(n-1)E),$$

калі $n \in \mathbb{N}$, і $(A)_0 = E$, дзе $E = \mathrm{diag}[I,\ldots,I]$ – адзінкавая $m\times m$-матрыца.

Напрыклад, $(E)_n = n!E$.

Азначэнне 4. Матрычнай гіпергеаметрычнай паслядоўнасцю назавем

$$_2f_1[A,B;C;h] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n[A,B;C]h^n =$$
$$= \left\{E, C^{-1}AB, \ldots, \frac{1}{n!}(C)_n^{-1}(A)_n(B)_n, \ldots\right\}, \quad (1)$$

дзе $f_n[A,B;C] = \dfrac{1}{n!}(C)_n^{-1}(A)_n(B)_n$.

Высветлім умовы прыналежнасці $_2f_1[A,B;C;h]$ да прасторы $l_p^{m\times m}$. У скалярным выпадку (m = 1) для сімвала Пахгамера праўдзіцца роўнасць $(a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$,

дзе , а таксама формула Стырлінга [5] пры $n \to \infty$

$$\Gamma(a+n) = \sqrt{2\pi}(n+a)^{n+a-1/2}e^{-n-a}(1+o(1/n)),$$
$$|\arg(n+a)| < \pi;$$
$$\Gamma(1+n) = n! = \sqrt{2\pi}(n+1)^{n+1/2}e^{-n-1}(1+o(1/n)).$$

Адсюль пры m = 1 і $a,b,c > 0$ атрымліваем

$$f_n[a,b;c] = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} =$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}n^{a+b-c-1}(1+o(1/n)). \quad (2)$$

Калі $a \in (-k;0)$, дзе k – натуральны, у (2) варта замест $\Gamma(a)$ узяць $\dfrac{\Gamma(a+k)}{(a)_k}$. Аналагічна варта зрабіць для b і c. Калі $a=-k$, то $(a)_n = (-k)_n = (-k)(-k+1)\cdots(-k+n+1) = 0$ пры $n \ge k+1$. Такім чынам, пры $n \ge k+1$ маем $f_n[-k,b;c] = f_n[a,-k;c] = 0$. З улікам вышэйсказанага ў скалярным выпадку (m = 1) робім выснову, што праўдзіцца тэарэма 2.

Тэарэма 2. Пры $\mathrm{Re}(p(1+c-a-b)) \ge 0$, $_2f_1[a,b;c;h] \in l_\infty$. Пры $\mathrm{Re}(p(1+c-a-b)) > 1$, $_2f_1[a,b;c;h] \in l_p$, $1 \le p \le +\infty$.

Няхай $m > 1$ і матрыцы A, B, C маюць простую структуру. Тады [6] існуе сталая незвыродная матрыца $T \in \mathbb{C}^{m\times m}$, якая адначасова пераводзіць A, B, C да дыяганальнага выгляду, а менавіта:

$$A = T^{-1}\mathrm{diag}[\lambda_A^1,\ldots,\lambda_A^m]T,$$
$$B = T^{-1}\mathrm{diag}[\lambda_B^1,\ldots,\lambda_B^m]T,$$
$$C = T^{-1}\mathrm{diag}[\lambda_C^1,\ldots,\lambda_C^m]T,$$

дзе ўласныя значэнні не абавязкова розныя. З перастаўляльнасці матрыц A, B, C маем:

$$f_n[A,B;C] = \frac{1}{n!}(C)_n^{-1}(A)_n(B)_n =$$
$$= T^{-1}\mathrm{diag}\left[f_n[\lambda_A^1,\lambda_B^1;\lambda_C^1],\ldots,f_n[\lambda_A^m,\lambda_B^m;\lambda_C^m]\right]T.$$

Зыходзячы з тэарэм 1, 2 вынікае тэарэма 3.

Тэарэма 3. Няхай матрыцы A, B, C маюць простую структуру і для іх уласных значэнняў выконваюцца ўмовы:

$$\mathrm{Re}(p(1-\lambda_A^i-\lambda_B^i+\lambda_C^i)) \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Тады $_2f_1[A,B;C;h] \in l_\infty^{m\times m}$.

Калі $\mathrm{Re}(p(1-\lambda_A^i-\lambda_B^i+\lambda_C^i)) > 1$, $i=\overline{1,m}$, то $_2f_1[A,B;C;h] \in l_p^{m\times m}$, $1 \le p \le +\infty$.

Умовы тэарэмы 3 не атрымаецца распаўсюдзіць на агульны выпадак, бо згодна з тэарэмай У. У. Марозава [7] папарна перастаўляльныя матрыцы *A*, *B*, *C* агульнага выгляду прыводзяцца адным і тым жа пераўтварэннем, увогуле кажучы, не да жарданавай, а да трохвугольнай формы:

$$A=T^{-1}\Lambda_A T=T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_A^1 & \tilde a_{12} & \cdots & \tilde a_{1m}\\ 0 & \lambda_A^2 & \cdots & \tilde a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_A^m\end{bmatrix}T,$$

$$B=T^{-1}\Lambda_B T=T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_B^1 & \tilde b_{12} & \cdots & \tilde b_{1m}\\ 0 & \lambda_B^2 & \cdots & \tilde b_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_B^m\end{bmatrix}T,$$

$$C=T^{-1}\Lambda_C T=T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_C^1 & \tilde c_{12} & \cdots & \tilde c_{1m}\\ 0 & \lambda_C^2 & \cdots & \tilde c_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_C^m\end{bmatrix}T.$$

Тады

$$f_n[A,B;C]=\frac{1}{n!}(C)_n^{-1}(A)_n(B)_n=$$

$$=T^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda_A^1)_n(\lambda_B^1)_n}{n!(\lambda_C^1)_n} & q_n^{12} & \cdots & q_n^{1m}\\ 0 & \dfrac{(\lambda_A^2)_n(\lambda_B^2)_n}{n!(\lambda_C^2)_n} & \cdots & q_n^{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{(\lambda_A^m)_n(\lambda_B^m)_n}{n!(\lambda_C^m)_n}\end{bmatrix}T.$$

У гэтым выпадку замест тэарэмы 3 атрымаецца даказаць больш слабое сцвярджэнне, а менавіта

Тэарэма 4. Няхай

$$M=\max\left\{\|\Lambda_A\|,\|\Lambda_B\|,\|\Lambda_C^{-1}\|\right\}.$$

Калі $\forall i=\overline{1,m}$, $\mathrm{Re}\left(p\left(1-\lambda_A^i-\lambda_B^i+\lambda_C^i\right)\right)\ge 0$ і $\mathrm{Re}\left(p\left(1-(m+1)M+\lambda_C^1+\cdots+\lambda_C^m\right)\right)>0$, то ${}_2f_1[A,B;C;h]\in l_\infty^{m\times m}$.

Калі $\forall i=\overline{1,m}$, $\mathrm{Re}\left(p\left(1-\lambda_A^i-\lambda_B^i+\lambda_C^i\right)\right)>1$ і $\mathrm{Re}\left(p\left(1-(m+1)M+\lambda_C^1+\cdots+\lambda_C^m\right)\right)>1$, то ${}_2f_1[A,B;C;h]\in l_p^{m\times m}$, $1\le p\le+\infty$.

Доказ. Умовы для дыяганальных элементаў матрыцы $f_n[A,B;C]$ такія ж самыя, як у тэарэме 3. Для недыяганальных элементаў з дапамогай элементарных, хаця і груваcткіх, пераўтварэнняў атрымаем няроўнасць

$$\left|q_n^{ij}\right|\le\frac{const\,(M)_n^{m+1}}{n!\left(\lambda_C^1\right)_n\cdots\left(\lambda_C^m\right)_n}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{1+M}+\cdots+\frac{1}{M+n-1}\right),$$

$1\le i<j\le m$.

Нескладана выводзіцца асімптатычная ацэнка

$$\frac{1}{M}+\frac{1}{1+M}+\cdots+\frac{1}{M+n-1}=const+\ln(M+n)+\varepsilon_n,$$

дзе $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$,

карыстаючыся якой і ўлічваючы формулу Стырлінга, і атрымаем сцвярджэнне тэарэмы 4.

3. Дыскрэтнае матрычнае гіпергеаметрычнае раўнанне. Разгледзім матрычнае дыскрэтнае раўнанне

$$\begin{aligned}&(nE+E)(nE+C)X_{n+1}-\\ &-(nE+A)(nE+B)X_n=\mathrm{O},\quad n=0,1,2,\ldots,\end{aligned}\qquad(3)$$

дзе $A,B,C\in\mathbb{C}^{m\times m}$ – зададзеныя матрыцы. Развязак X будзем шукаць у алгебры матрычных паслядоўнасцей $K_0^{m\times m}$. Карыстаючыся формуламі (1), запішам у форме алгебраічнага матрычнага гіпергеаметрычнага дыферэнцыяльнага раўнання ў алгебры $K^{m\times m}$

$$\begin{aligned}&h(E-hE)D^2X+\\ &+(C-(A+B+E)h)DX-ABX=\mathrm{O}.\end{aligned}\qquad(4)$$

Само раўнанне натуральна назваць матрычным дыскрэтным гіпергеаметрычным раўнаннем.

Няхай $A,B,C\in\mathbb{C}^{m\times m}$ – папарна перастаўляльныя, уласныя значэнні матрыцы C, не роўныя $0,-1,-2,\ldots$. З (3) атрымаем сістэму матрычных раўнанняў

$$\begin{cases}CX_1=ABX_0,\\ 2(C+E)X_2=(A+E)(B+E)X_1,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ n(C+(n-1)E)X_n=\\ =(A+(n-1)E)(B+(n-1)E)X_{n-1},\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\end{cases}$$

у якой X_0 варта выбіраць адвольным чынам, астатнія значэнні X_n адзіным чынам выражаюцца праз X_{n-1}. Адсюль знаходзім адзіны развязак раўнання з пачатковай умовай X_0 у выглядзе

$$X = {}_2f_1\left[A,B;C;h\right]X_0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\left[A,B;C\right]h^n X_0 . \quad (5)$$

Пры ўмовах тэарэм 3, 4 гэты развязак будзе належаць да $l_\infty^{m\times m}$ ці да $l_p^{m\times m}$, $1 \le p \le +\infty$, адпаведна.

Заўвага. Калі матрыцы *A*, *B*, *C* не перастаўляльныя, то развязак раўнання не выяўляецца праз матрычную гіпергеаметрычную паслядоўнасць. У гэтым выпадку непасрэдна з (3) можна атрымаць развязак у выглядзе

$$X_n = \frac{1}{n!}\left(C+(n-1)E\right)^{-1}\left(A+(n-1)E\right)\times$$
$$\times\left(B+(n-1)E\right)\cdots C^{-1}ABX_0,$$

які не дазваляе, знайсці дастаткова простыя ўмовы прыналежнасці да $l_p^{m\times m}$.

Звыродны выпадак, калі $\forall i=\overline{1,m}$ для ўласных значэнняў матрыцы С выконваецца ўмова $\lambda_C^i \in \{0,-1,-2,\ldots\}$, не ўваходзіць у межы дадзенага артыкула і з'яўляецца прадметам наступных даследаванняў.

Вынікі. У дадзенай рабоце ўведзена матрычная гіпергеаметрычная паслядоўнасць, даследавана пытанне яе прыналежнасці да $l_p^{m\times m}$, уведзена паняцце дыскрэтнага матрычнага гіпергеаметрычнага раўнання, знойдзены ўмовы развязальнасці дадзенага раўнання ў модулі матрычных паслядоўнасцей $l_p^{m\times m}$.

Літаратура

1. *Навічкова, Д. А.* Матрычныя рознасныя раўнанні ў некаторых алгебрах і модулях паслядоўнасцей : дыс. … канд. фіз.-мат. навук / Д. А. Навічкова. – Мінск, 2015. – 112 с.
2. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики / В. И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – Т. 3. – 672 с.
3. *Бейтмен*, Г. Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 297с.
4. *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. : ГОСИЗДАТ Технико-теоретической литературы, 1950. – 436 с.
5. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001. – Т. 2. – 810 с.
6. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 548 с.
7. *Морозов, В. В.* О коммутативных матрицах / В. В. Морозов // Сборник работ Научно-исследовательского института математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, Учен. зап. Казан. гос. ун-та. – Казань : Казанский гос. ун-т., 1952. Т. 112. Вып. 9. – С. 17–20.

References

1. *Navichkova, D. A.* Matrychnyya roznasnyya raunanni u nekatorykh algebrakh i modulyakh paslyadounastsey : dys. … kand. fiz.-mat. navuk / D. A. Navichkova. – Minsk, 2015. – 112 s.
2. *Smirnov, V. I.* Kurs vysshey matematiki / V. I. Smirnov. – M. : Nauka, 1974. – T. 3. – 672 s.
3. *Beytmen, G.* Vysshiye transtsedentnyye funktsii: Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsiya Lezhandra / G. Beytmen, A. Erdeyi. – M. : Nauka, 1973. – T. 1. – 297 s.
4. *Golubev, V. V.* Lektsii po analiticheskoy teorii differentsialnykh uravneniy / V. V. Golubev. – M. : GOSIZDAT Tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. – 436 s.
5. *Fikhtengolts, G. M.* Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya : v 3 t. / G. M. Fikhtengolts. – M. : Fizmatlit, 2001. – T. 2. – 810 s.
6. *Gantmakher, F. R.* Teoriya matrits / F. R. Gantmakher. – M. : Nauka, 1988. – 548 s.
7. *Morozov, V. V.* O kommutativnykh matritsakh / V. V. Morozov // Sbornik rabot Nauchno-issledovatelskogo instituta matematiki i mekhaniki im. N. G. Chebotareva, Uchyon. zap. Kazan. gos. un-ta. T. 112. Vyp. 9. – Kazan : Kazanskiy gos. un-t, 1952. – S. 17–20.