Весці БДПУ. Серыя 3. 2016. № 4. С. 18–21

УДК 517.926

АБ РЭДУЦЫРАВАННІ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ ДА КАНАНІЧНАГА ВЫГЛЯДУ

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры інфармацыйных тэхналогій і вышэйшай матэматыкі УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”»;

І. М. Гуло,
кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры матэматыкі і методыкі выкладання матэматыкі БДПУ;

І. А. Ільючык,
студэнт II курса *УА ФПБ «Міжнародны ўніверсітэт “МІТСО”»*

Паступіў у рэдакцыю 13.10.16.

UDC 517.926

ABOUT REDUCTION SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS TO THE CANONICAL FORM

V. Shilinets,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Information Technology and Higher Mathematics of Higher Educational Establishment of the Federation of Trade Unions of Belarus «International University “MITSO”»;

I. Gulo,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, BSPU;

I. Ilyuchik,
Second-Year Student of Higher Educational Establishment of the Federation of Trade Unions of Belarus «International University “MITSO”»

Received on 13.10.16.

Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных рэдуцыравана да кананічнага выгляду і атрымана інтэгральнае раўнанне, эквівалентнае адпаведнай кананічнай сістэме.

Ключавыя словы: манагеннасць у сэнсе У. С. Фёдарава, фармальныя вытворныя, сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных, інтэгральнае раўнанне.

It has been shown in the article that one system of partial differential equations can be reduced to the canonical form. Using the class of F-monogenic bicomplex functions and bicomplex differential operators the integral representation for solutions of canonical system of differential equations has been obtained.

Keywords: monogenic in the sense of V.S. Fedorov, formal derivatives, system of partial differential equations, integral equations.

Уводзіны. У шэрагу прац [1–5] выкарыстоўваліся фармальныя вытворныя [6] для пераўтварэння да кананічнага выгляду лінейных сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных.

Прадметам даследавання ў дадзенай працы з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=A_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+A_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+T_1f+\theta_1\varphi+\Phi_1f^2+Q_1\varphi^2+K_1f\varphi,\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=A_3\frac{\partial\varphi}{\partial x}+A_4\frac{\partial\varphi}{\partial y}+T_2f+\theta_2\varphi+\Phi_2f^2+Q_2\varphi^2+K_2f\varphi,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

дзе A_k $(k=1,2,3,4)$ – камплексныя канстанты; T_k, θ_k, $E_k\in C^1(D)$ $(k=1,2)$; f, $\varphi\in C^2(D)$.

Заўсёды абазначаем праз $C^1(D)$ ($C^2(D)$) клас рэчаісных або камплексных функцый рэчаісных зменных x, y, якія непарыўна дыферэнцавальныя (двойчы непарыўна дыферэнцавальныя) у некаторым адназвязным абсягу D.

Як было паказана ў працы [7], сістэма (1), дзе шуканыя функцыі f, $\varphi\in C^2(D)$, а дадзеныя функцыі A_k, T_k, θ_k, $E_k\in C^1(D)$, эквівалентная сістэме выгляду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial q}&=a_1f+a_2f^2+b_1\varphi+b_2\varphi^2+c_1f\varphi,\\ \frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}&=a_3f+a_4f^2+b_3\varphi+b_4\varphi^2+c_2f\varphi,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Репозиторий БГПУ

(a_k, b_k, c_j $(k = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2)$ – вядомыя функцыі класа $C^1(D)$) пры наступных неабходнай і дастатковай умовах:

$$A_1 = -A_4, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1. \tag{3}$$

Тут

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \delta^{-1}\left(f'_x q'_y - f'_y q'_x\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial q} = \delta^{-1}\left(f'_y p'_x - f'_x p'_y\right); \tag{4}$$

$\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x \neq 0$ у абсягу D;

$q = q(x, y)$ – якое-небудзь частковае рашэнне раўнання

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_3 q'_x + A_4 q'_y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(A_1 q'_x + A_2 q'_y\right); \tag{5}$$

функцыя $p = p(x, y)$ вызначаецца з сістэмы

$$p'_x = A_1 q'_x + A_2 q'_y,$$
$$p'_y = A_3 q'_x + A_4 q'_y. \tag{6}$$

Мэтай дадзенай працы з'яўляецца рэдуцыраванне сістэмы (1) да кананічнага выгляду (2), калі каэфіцыенты сістэмы A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ – камплексныя пастаянныя, і атрыманне інтэгральнага раўнання, эквівалентнага сістэме (2).

Асноўная частка. Знойдзем спачатку функцыі q і p з раўнання (5) і сістэмы (6). Будзем шукаць рашэнне раўнання (5) у выглядзе

$$q = ax^2 + by^2,$$

дзе $a = const$, $b = const$.

Калі функцыю q падставіць у раўнанне (5), то будзем мець

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_3 \cdot 2ax + A_4 \cdot 2by\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(A_1 \cdot 2ax + A_2 \cdot 2by\right),$$
$$2aA_3 = 2bA_2,$$
$$aA_3 = bA_2.$$

З апошняй роўнасці вынікае

$$b = \frac{aA_3}{A_2}. \tag{7}$$

Такім чынам, функцыя

$$q = ax^2 + \frac{aA_3}{A_2} y^2 \tag{8}$$

будзе рашэннем раўнання (5).

Функцыю $p = p(x, y)$ знойдзем з сістэмы (6), мяркуючы ў ёй $q = ax^2 + \frac{aA_3}{A_2} y^2$, дзе a – адвольная канстанта. Маем:

$$p'_x = A_1 \cdot 2ax + A_2 \cdot 2a\frac{A_3}{A_2} y,$$
$$p'_y = A_3 \cdot 2ax + A_4 \cdot 2a\frac{A_3}{A_2} y.$$

Лёгка пераканацца ў тым, што выраз

$$\left(2aA_1 x + 2aA_3 y\right)dx + \left(2aA_3 x + 2a\frac{A_4 A_3}{A_2} y\right)dy$$

ёсць поўны дыферэнцыял функцыі

$$p = p(x, y).$$

Адсюль знойдзем

$$p = aA_1 x^2 + 2aA_3 xy + a\frac{A_4 A_3}{A_2} y^2 =$$
$$= aA_1 x^2 + 2aA_3 xy - a\frac{A_1 A_3}{A_2} y^2. \tag{9}$$

Знойдзем умовы, пры якіх

$$\delta \equiv p'_x q'_y - p'_y q'_x = 0.$$

Маем:

$$\delta = \begin{vmatrix} p'_x & p'_y \\ q'_x & q'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2aA_1 x + 2aA_3 y & 2aA_3 x - 2a\frac{A_1 A_3}{A_2} y \\ 2ax & 2a\frac{A_3}{A_2} y \end{vmatrix} =$$

$$= 4a^2 \frac{A_1 A_3}{A_2} xy + 4a^2 \frac{A_3^2}{A_2} y^2 - 4a^2 A_3 x^2 + 4a^2 \frac{A_1 A_3}{A_2} xy = 0,$$

гэта значыць

$$4a^2 \frac{A_3^2}{A_2} y^2 - 4a^2 A_3 x^2 + 8a^2 \frac{A_1 A_3}{A_2} xy = 0.$$

Мяркуем $a \neq 0$. Тады $\delta = 0$, калі

$$2A_1 A_3 xy + A_3^2 y^2 - A_2 A_3 x^2 = 0. \tag{10}$$

Няхай

$$A_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad A_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad A_3 = \alpha_3 + i\beta_3,$$
$$i^2 = -1.$$

Тады ўмова (10) эквівалентная сістэме

$$\left.\begin{aligned} &\left(\alpha_3^2 - \beta_3^2\right) y^2 + 2\left(\alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3\right) xy + \\ &+ \left(\beta_2\beta_3 - \alpha_2\alpha_3\right) x^2 = 0, \\ &2\alpha_3\beta_3 y^2 + 2\left(\beta_1\alpha_3 + \alpha_1\beta_3\right) xy - \\ &- \left(\beta_2\alpha_3 + \alpha_2\beta_3\right) x^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Репозиторий БГПУ

З сістэмы (11) вынікае, што $\delta = 0$ толькі ў пунктах перасячэння крывых, якія вызначаюцца раўнаннямі сістэмы (11).

Такім чынам, даказалі тэарэму.

Тэарэма 1. Сістэма (1) пры ўмовах

$$A_1 = -A_4, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1$$

у абсягу D, дзе адсутнічаюць пункты перасячэння крывых, якія вызначаюцца раўнаннямі сістэмы (11), рэдуцыруецца да сістэмы (2), дзе $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$ вызначаюцца роўнасцямі (4), а функцыі $p = p(x,y)$, $q = q(x,y)$ вызначаюцца роўнасцямі (9) і (8) адпаведна.

Для пабудовы інтэгральнага раўнання, эквівалентнага сістэме (2), нам спатрэбяцца бікамплексныя функцыі [8].

Увядзем некаторыя азначэнні, неабходныя нам для далейшага.

Азначэнне 1. Бікамплекснай функцыяй, зададзенай у абсягу D, называецца функцыя выгляду $W = f(x,y) + j\varphi(x,y)$, дзе f, φ – рэчаісныя або камплексныя функцыі дзвюх рэчаісных зменных x, y, зададзеныя ў абсягу D, $j^2 = i^2 = -1$, $i \neq j$.

Азначэнне 2. Бікамплексная функцыя $W = f(x,y) + j\varphi(x,y)$ называецца непарыўнай у абсягу D, калі ў гэтым абсягу непарыўнымі з'яўляюцца функцыі f і φ.

Крывалінейны і двайны інтэгралы для бікамплекснай функцыі вызначаюцца па аналогіі з азначэннем інтэгралаў для камплексных функцый.

Азначэнне 3. Бікамплексная функцыя W называецца манагеннай у сэнсе У. С. Фёдарава па бікамплекснай функцыі $P = p + jq$ у абсягу D, калі знойдзецца такая функцыя зменных x, y, якую абазначым праз $W'[P]$, што ў адзначаным абсягу маем [8; 9]:

$$W'_x = W'[P]P'_x,$$
$$W'_y = W'[P]P'_y.$$

Поруч з функцыяй P разгледзім таксама функцыю $Q = p - jq$ і пабудуем бікамплексны аператар

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + j\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right\}. \quad (12)$$

З аператарнай роўнасці (12) вынікае непасрэдна тэарэма.

Тэарэма 2. Сістэма (2) раўназначная раўнанню выгляду

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \alpha f + \beta f^2 + \theta\varphi + \sigma\varphi^2 + \tau f\varphi, \quad (13)$$

дзе

$$W = f + j\varphi,$$
$$\alpha = \frac{1}{2}(a_1 + ja_3), \quad \beta = \frac{1}{2}(a_2 + ja_4),$$
$$\theta = \frac{1}{2}(b_1 + jb_3), \quad \sigma = \frac{1}{2}(b_2 + jb_4),$$
$$\tau = \frac{1}{2}(c_1 + jc_2).$$

У працы [10] атрымана інтэгральнае выяўленне Пампею–Фёдарава для гіперкамплексных функцый:

$$W(z_0) = \frac{1}{K}\left\{\int_C W(z)\frac{dP(z)}{P - P_0} + \iint_{D_c} \frac{\partial W}{\partial Q}\frac{J dxdy}{P - P_0}\right\}, \quad (14)$$

дзе D_c – абмежаваны контурам C абсяг,

$$J = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)} = -2j\delta,$$

$$P = P(z) = p(z) + jq(z),$$

$$Q = Q(z) = p(z) - jq(z),$$

$$P_0 = P(z_0) = p(z_0) + jq(z_0),$$

$$z_0 \in D_c, z = x + iy \in C,$$

$$K = \int_\gamma \frac{dP}{P - P_0}, \quad D_c \subset D,$$

γ – акружнасць дастаткова малога радыуса з цэнтрам у пункце z_0.

Скарыстаўшы інтэгральнае выяўленне (14) з (13) атрымліваем наступнае інтэгральнае раўнанне:

$$W(z_0) = \frac{1}{K}\left\{\int_C W(z)\frac{dP(z)}{P - P_0} + \right.$$
$$\left. + \iint_{D_c} \frac{\alpha f + \beta f^2 + \theta\varphi + \sigma\varphi^2 + \tau f\varphi}{P - P_0}(-2j\delta)\,dxdy\right\}. \quad (15)$$

Рэпозиторый БДПУ

Заключэнне. Такім чынам, сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1), дзе A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ – камплексныя канстанты, рэдуцыравана да сістэмы кананічнага выгляду (2) і атрымана інтэгральнае раўнанне (15), эквівалентнае сістэме (2).

Літаратура

1. *Стельмашук, Н. Т.* О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – Т. 5. – № 1. – С. 166–173.
2. *Векуа, И. Н.* Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 628 с.
3. *Стельмашук, Н. Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 61–65.
4. *Стэльмашук, М. Т.* Выкарыстанне фармальных вытворных і бікамплексных функцый пры пераўтварэнні сістэмы лінейных дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец, Г. В. Хадкевіч // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2005. – № 4.– С. 25–27.
5. *Стэльмашук, М. Т.* Рэдуцыраванне адной сістэмы раўнанняў у частковых вытворных да кананічнага выгляду пры дапамозе двайных функцый / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2005. – № 1. – С. 21–23
6. *Гусев, В. А.* Об одном обобщении ареолярных производных / В. А. Гусев // Bul. Stiint. si tehnical inst. Pol. Timisoara. – 1962. – V. 7. – Fasc. 2. – P. 223–238.
7. *Шилинец, В. А.* Методы F-моногенных функций в теории дифференциальных уравнений: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук / В. А. Шилинец. – 1985. – 11 с.
8. *Стельмашук, Н. Т.* О некоторых линейных дифференциальных уравнениях в частных производных в дуальной и бикомплексной алгебрах / Н. Т. Стельмашук // Известия вузов. Математика. – 1964. – № 3. – С. 136–142.
9. *Федоров, В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В. С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
10. *Стэльмашук, М. Т.* Аб інтэгральным выяўленні тыпу Пампею–Фёдарава рашэнняў некаторых дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных / М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1998. – № 3. – С. 113–117.

References

1. *Stelmashuk, N. T.* O nekotorykh lineynykh differentsialnykh sistemakh v chastnykh proizvodnykh / N. T. Stelmashuk // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. –1964. – T. 5.– № 1.– S. 166–173.
2. *Vekua, I. N.* Obobshchyonnyye analiticheskiye funktsii / I. N. Vekua. – M. : GIFML, 1959. – 628 s.
3. *Stelmashuk, N. T.* O preobrazovanii k kanonicheskomu vidu sistemy lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s pomoshchyu dvoynykh differentsialnykh operatorov / N. T. Stelmashuk, V. A. Shilinets // Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008.– № 2.– S. 61–65.
4. *Stelmashuk, M. T.* Vykarystannye farmalnykh vytvornykh i bikampleksnykh funktsiy pry perautvarenni sistemy lineynykh dyferentsyyalnykh raunannyau u chastkovykh vytvornykh / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets, G. V. Khadkevich // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2005.– № 4.– S. 25–27.
5. *Stelmashuk, M. T.* Redutsyravannye adnoy sistemy raunannyau u chastkovykh vytvornykh da kananichnaga vyglyadu pry dapamoze dvaynykh funktsyy / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets // Vestsi BDPU. Seryya 3. – 2005.– № 1.– S. 21–23.
6. *Gusev, V. A.* Ob odnom obobshchenii areolyarnykh proizvodnykh / V. A. Gusev // Bul. Stiint. si tehnical inst. Pol. Timisoara.– 1962.– V.7.– Fasc. 2. – P. 223–238.
7. *Shilinets, V. A.* Metody F-monogennykh funktsiy v teorii differentsialnykh uravneniy: avtoref. dis. … kand. fiz.-mat. nauk / V. A. Shilinets. – 1985. – 11 s.
8. *Stelmashuk, N. T.* O nekotorykh lineynykh differentsialnykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh v dualnoy i bikompleksnoy algebrakh / N. T. Stelmashuk // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1964.– №3.– S. 136–142.
9. *Fyodorov, V. S.* Osnovnyye svoystva obobshchyonnykh monogennykh funktsiy / V. S. Fyodorov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1958.– №6.– S. 257–265.
10. *Stelmashuk, M. T.* Ab integralnym vyyaulenni typu Pampeyu-Fyodarava rashennyau nekatorykh dyferentsyyalnykh raunannyau u chastkovykh vytvornykh / M. T. Stelmashuk, U. A. Shylinets // Vestsi BDPU. – 1998. – № 3.– S. 113–117.

Рэпазіторый БДПУ