Весці БДПУ. Серыя 3. 2016. № 4. С. 11–17

УДК 517.957

ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПАКТНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗРЕШЕНИЯ В МЕТОДЕ ДРОБНЫХ ШАГОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В. М. Волков,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования БГУ;
А. Н. Гуревский,
аспирант кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования БГУ

Поступила в редакцию 30.06.16.

UDC 517.957

OPTIMIZATION OF COMPACT FINITE DIFFERENCE SCHEMES WITH SPECTRAL-LIKE RESOLUTIONS IN THE SPLIT-STEP METHOD FOR THE NON-LINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

V. Volkov,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Web-Technologies and Computer Modeling, BSU;
A. Hureuski
Post-Graduate Student of the Department of Web-Technologies and Computer Modeling, BSU

Received on 30.06.16.

Используя представление схемы с весами для нестационарного уравнения Шредингера в виде пары рекурсивных цифровых фазовых фильтров первого или второго порядков, получены оптимальные значения параметров разностной схемы, обеспечивающие минимизацию погрешности приближенного решения в заданном спектральном диапазоне. Эффективность оптимизированной схемы продемонстрирована путем сравнений с методом Фурье в схеме дробных шагов при моделировании динамики двухсолитонных решений нелинейного уравнения Шредингера. Показано почти четырехкратное улучшение точности схемы дробных шагов при замене традиционно используемого метода Фурье на оптимизированную схему с весами. Показано также, что двухпараметрическая оптимизация не дает заметных преимуществ в дальнейшем повышении эффективности предложенной методики.

Ключевые слова: разностные схемы; нелинейное уравнение Шредингера; рекурсивные цифровые фильтры; спектральное разрешение.

Using representations of the θ-method for the non-stationary Schrödinger equation as a couple of the all-pass IIR-filters of the first or second orders, optimal parameter values of the θ-method minimizing its error in the predefined spectral range are found. Efficiency of the optimized schemes is demonstrated by comparing to Fourier methods in the split-step scheme at simulations of the two-soliton bound state of the non-linear Schrödinger equation. About four-fold improvement of the accuracy in the split-step scheme with the optimized θ-method instead of the Fourier method is shown. It is shown also that the multi-parameters optimization does not provide essential advantages in the efficiency improvement of the proposed technique.

Keywords: finite-difference schemes; non-linear Schrödinger equation; infinite impulse response filters; spectral-like resolution.

Введение. В классической теории разностных схем оценки точности приближенных решений основаны на понятиях порядка аппроксимации и скорости сходимости [1, с. 96]. Кроме того, широкое распространение получил анализ амлитудно- и фазово-частотных характеристик разностных схем, с помощью которого удается получить дополнительные количественные и качественные критерии согласованности дискретных моделей. В частности, анализ согласованности разностных схем в терминах спектрального разрешения является более тонким инструментом, который дает более подробную информацию о погрешности и открывает дополнительные возможности улучшения точности [2]. В этой связи естественным представляется использование результатов в области теории цифровой обработки сигналов для построения дискретных моделей с заданными спектральными свойствами.

Среди возможных приложений методов цифровой обработки сигналов для численного анализа дифференциальных

Репозиторий БГПУ

задач можно отметить перспективность применения цифровых фильтров в качестве альтернативы методу Фурье. Так, например, в работе [3] предложена модифицированная схема метода дробных шагов для решения нелинейных уравнений Шредингера (НУШ), в которой вместо традиционного метода Фурье [4] использован рекурсивный цифровой фильтр второго порядка. Вопросы оптимизации данной схемы с точки зрения минимизации ошибки функции группового запаздывания рассмотрены в работах [3; 5].

В работе [6] показано, что компактные разностные схемы для нестационарного уравнения Шредингера при определенных условиях допускают эквивалентное представление в виде пары сопряженных фильтров первого порядка. Использование эквивалентной однопараметрической схемы цифровой фильтрации [6] позволило найти оптимальные параметры дискретной модели, отвечающие минимальной фазовой погрешности в заданном спектральном диапазоне. Примечательно, что соотношение шагов сетки вида $\tau = O(h^2)$, возникающее в оптимизированной схеме цифровой фильтрации, является оптимальным с точки зрения минимизации вычислительных затрат для достижения заданной точности приближенного решения в разностной схеме с весами [7].

В настоящей работе исследованы возможности дальнейшего улучшения спектральной согласованности дискретной модели нестационарного уравнения Шредингера на основе двухпараметрической схемы цифровой фильтрации. Представлены результаты численных экспериментов, показывающие преимущества схемы цифровой фильтрации по сравнению с аналогичной схемой расщепления, использующей метод Фурье на линейном шаге задачи.

Постановка задачи и численные методы. Рассмотрим задачу для уравнения Шредингера с кубической нелинейностью

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0,\ x \in (-L, L), \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями вида

$$u(0,x) = u_0(x),\ u(t,-L) = u(t,L) = 0\,. \qquad (2)$$

Важным свойством задачи (1), (2) является наличие интегральных законов сохранения, которые, согласно принципу консервативности [1, с. 143], полезно учитывать при построении численных методов. В частности, важным представляется наследование в рамках дискретной модели, по крайней мере, одного из серии интегральных инвариантов [9; 10]:

$$\frac{d}{dt}\int_{-L}^{L} |u(\mathrm{t,x})|^2\, dx = 0. \qquad (3)$$

Для численного решения задачи (1), (2) методом дробных шагов представим уравнение (1) в виде:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = L_d u + L_n u,\ L_d u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ L_n u = -2|u|^2 u.$$

На равномерной сетке

$$\omega_h = \{x_k = -L + hk,\ k = \overline{0,N},\ h = \frac{2L}{N},\ t_m = m\tau,\ m = 0,1,\ldots\}$$

симметричная схема метода дробных шагов [4] для рассматриваемой задачи сводится к последовательности следующих операций:

$$\begin{aligned} &\bar{U}(t+\tau,x) = U(t,x)\cdot \exp\left(i\tau\,|U(t,x)|^2\right),\\ &\bar{\bar{U}}(t+\tau,x) = F^{-1}\left[H(\omega,\tau)\cdot F\left[\bar{U}(t+\tau,x)\right]\right],\\ &U(t+\tau,x) = \bar{\bar{U}}(t,x)\cdot \exp\left(i\tau\,|\bar{\bar{U}}(t+\tau,x)|^2\right). \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь $F[U(t,x)]$, $F^{-1}[\psi(\omega)]$ – соответственно, прямое и обратное дискретное преобразование Фурье. Комплексно-значная функция

$$H(\omega,\tau) = \exp(-i\tau\omega^2),$$

$$\omega = \omega_k = \frac{\pi k}{L},\ k = \overline{-N/2, N/2-1}$$

может быть интерпретирована как передаточная функция дискретного фильтра, который точно описывает амплитудные и фазовые характеристики дифференциальной задачи в спектральном диапазоне, определяемом пространственной сеткой ω_h. Заметим, что

$$|H(\omega,\tau)| = 1, \quad \left|\exp\left(i\tau\,|U(t,x\,|)^2\right)\right| = 1,$$

Репозиторий БГПУ

откуда следует консервативность схемы (4):

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mathrm{h}\,|U(t_{m+1},x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \mathrm{h}\,|U(t_m,x_k)|^2,\ m=1,2,\ldots . \quad (5)$$

Как показано в работе [6], вместо метода Фурье для реализации линейного шага в схеме дробных шагов (4) может быть эффективно использована приближенная модель в виде двух сопряженных рекурсивных цифровых фильтров первого порядка:

$$\begin{aligned} &U(t_m+\tau/2,x_k) = \frac{ip(1-ip)}{1+ip}U(t_m,x_k) - \\ &-\frac{1-ip}{1+ip}U(t_m,x_{k-1}) + ipu(t_m+\tau/2,x_k), \\ &U(t_m+\tau,x_k) = \frac{ip(1-ip)}{1+ip}U(t_m+\tau/2,x_k) - \\ &-\frac{1-ip}{1+ip}u(t_m+\tau/2,x_{k+1}) + ipu(t_m+\tau,x_{k+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Передаточная функция, соответствующая последовательному применению фильтров (6), имеет вид

$$H_F(\omega_k h,p) = \frac{(1-ip)^2}{(1+ip)^2}\cdot\frac{1-p^2+2ip\cos(\omega_k h)}{1-p^2-2ip\cos(\omega_k h)}, \quad (7)$$

где $0<p<1$ – действительный параметр, величина которого определяется условием:

$$\|H_F(\omega,p)-H(\omega,\tau)\| \to \min . \quad (8)$$

Очевидно, что $|H_F(\omega,p)|=1$, следствием чего является консервативность схемы (6).

Для случая финитных решений задачи (1), (2) схема цифровой фильтрации (6) эквивалентна двухслойной разностной схеме с весами

$$\begin{aligned} &i\frac{U_k^{n+1}-U_k^n}{\tau} + \\ &+\sigma\frac{U_{k+1}^{n+1}-2_k^{n+1}+U_{k-1}^{n+1}}{h^2} + \\ &+(1-\sigma)\frac{U_{k+1}^n-2_k^n+U_{k-1}^n}{h^2}=0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$U_k^{n+1} = U(t_n+\tau,x_k),$$
$$U_{k\pm1}^n = U(t_m,x_k\pm \mathrm{h}),$$

при следующих значениях параметров [6]:

$$\sigma = \frac{1}{2}+\frac{ip}{1-p^2},$$
$$\tau=\tau_0(p)=2h^2p\frac{1-p^2}{(1+p^2)^2}. \quad (10)$$

Важным частным случаем схемы (9) является схема повышенного порядка точности [1, с. 297], для которой

$$\sigma=\sigma_0=\frac{1}{2}+\frac{ih^2}{12\tau}.$$

В рамках модели (6) случаю схемы повышенного порядка точности соответствует значение параметра $p=p_0=\sqrt{6}-\sqrt{5}$ [6]. В дальнейшем мы будем рассматривать схему на основе алгоритма цифровой фильтрации вида (6). Тем не менее все полученные результаты непосредственно обобщаются и на схему с весами (9), принимая во внимание условия эквивалентности (10).

Оптимизация схемы цифровой фильтрации. В качестве критерия оптимизации дискретной модели (6) рассмотрим условие (8), при этом норму погрешности определим в виде следующего функционала:

$$\|\delta(\Omega,p)\|^2 = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}\left|H(\bar\omega,\tau(p))-H_F(\bar\omega,p)\right|^2 d\bar\omega, \quad (11)$$

где $\bar\omega=\omega\cdot h$ – нормированная частота, $0<\Omega<\pi$ – относительный диапазон согласованности спектральных характеристик дискретной и дифференциальной моделей.

Аналогично рассмотрим двухпараметрическую схему в виде последовательности двух пар рекурсивных фильтров (6) с параметрами p_1 и p_2. Функция передачи такой модели определяется произведением функций передачи ее составляющих:

$$H_F(\omega,p_1,p_2)=H_F(\omega,p_1)\cdot H_F(\omega,p_2). \quad (12)$$

Оптимальные значения параметров p_1 и p_2 определим из условия минимума погрешности функции передачи в заданном спектральном диапазоне $0<\Omega<\pi$:

$$\|\delta(\Omega,p_1,p_2)\|^2 = $$
$$=\frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}\left|H(\bar\omega,\tau(p_{opt}))-\left(H_F(\bar\omega,p_1,p_2)\right)^{\theta}\right|^2 d\bar\omega \to \min. \quad (13)$$

Репозиторий БНТУ

Показатель степени

$$\theta=\tau(p_{opt})\left[\tau(p_1)+\tau(p_2)\right]^{-1}$$

в выражении (13) служит для приведения передаточной функции двухпараметрической модели к одинаковому временному интервалу с однопараметрической моделью (6), что позволит впоследствии сравнить их эффективность.

Оптимальные значения параметров, обеспечивающие минимальную погрешность передаточных функций в заданном спектральном диапазоне

$$\text{от } \Omega=\frac{\pi}{2} \text{ до } \Omega=\frac{\pi}{32},$$

представлены в таблице. В ней приведены также отношения минимальных погрешностей одно- и двухпараметрических моделей при оптимальных значениях параметров. Представленные результаты сравнения показывают, что двухпараметрическая модель обеспечивает снижение погрешности передаточной функции на 10−20 %, однако вместе с этим более чем на 25 % уменьшается эффективный шаг метода. Это позволяет сделать вывод, что оптимизация двухпараметрической модели (12), (13) не выявила ее преимуществ по сравнению с аналогичной однопараметрической схемой (6), (7).

Отметим, что при уменьшении диапазона спектральной согласованности оптимальное значение параметра p, обеспечивающее минимум погрешности фазово-частотных характеристик, стремится к значению p_0, соответствующему схеме четвертого порядка точности. Это говорит о том, что схема четвертого порядка точности оптимальна при расчете решений с бесконечно узким спектром в окрестности нулевой частоты. Поскольку на практике приходится иметь дело с решениями, имеющими конечную ширину спектра, то выбор параметра p следует осуществлять с учетом требуемого спектрального разрешения и шага сетки.

Результаты численного эксперимента. Оценим эффективность одно- и двухпараметрических схем цифровой фильтрации в сравнении с методом Фурье на примере моделирования двухсолитонных решений НУШ методом дробных шагов. Двухсолитонное решение НУШ имеет вид финитной, периодической по времени, бесконечно дифференцируемой функции [8, с. 115]:

$$u(t,x)=4\frac{\cosh(3x)+3\exp(8it)\cosh(x)}{\cosh(4x)+4\cosh(2x)+3\cos(8t)}e^{it}. \quad (14)$$

В случае двухпараметрической модели фильтрации симметричная схема дробных шагов может быть представлена в виде:

$$\overline{U}(t+\tau_1,x)= =U(t,x)\cdot\exp\left(i\tau_1\left|U(t,x)\right|^2\right), \quad (15)$$

$$\overline{\overline{U}}(t+\tau_1,x)= =F^{-1}\left[H_F(\omega,p_1)\cdot F\left(\overline{U}(t+\tau_1,x)\right)\right], \quad (16)$$

Таблица – Оптимальные значения параметров и соотношения характеристик одно- и двухпараметрической схемы цифровой фильтрации для различных спектральных диапазонов

Ω	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{32}$
p_1	0.1144	0.0953	0.0907	0.0899	0.0884
p_2	0.3069	0.2638	0.2542	0.2520	0.2512
p_{opt}	0.2625	0.2249	0.2162	0.2142	0.2136
$\frac{2\tau(p_{opt})}{\tau(p_1)+\tau(p_2)}$	1.2504	1.2592	1.2611	1.2605	1.2658
$\frac{\left\Vert\delta(\Omega,p_{opt})\right\Vert}{\left\Vert\delta(\Omega,p_1,p_2)\right\Vert}$	1.0750	1.1654	1.1885	1.2180	1.2161

Репозиторий БГПУ

$$\bar{U}(t+\tau_1+\tau_2,x)=$$
$$=\bar{\bar{U}}(t+\tau_1,x)\cdot\exp\left(i\,(\tau_1+\tau_2)\left|\bar{\bar{U}}(t+\tau_1,x)\right|^2\right),\quad(17)$$

$$\bar{\bar{U}}(t+\tau_1+\tau_2,x)=$$
$$=F^{-1}\left[H_F(\omega,p_2)\cdot F\left(\bar{U}(t+\tau_1+\tau_2,x)\right)\right],\quad(18)$$

$$U(t+\tau_1+\tau_2,x)=$$
$$=\bar{\bar{U}}(t+\tau_1+\tau_2,x)\cdot\exp\left(i\tau_2\left|\bar{\bar{U}}(t+\tau_1+\tau_2,x)\right|^2\right).\quad(19)$$

Здесь $\tau_1=\tau(p_1)$, $\tau_2=\tau(p_2)$. Аналогично (15–19), однопараметрическая схема имеет вид (4), где следует заменить $H(\omega,\tau)$ на $H_F(\omega,p_{opt})$, $\tau=\tau(p_{opt})$, что эквивалентно использованию на линейном шаге алгоритма цифровой фильтрации (6). Очевидно, что двухпараметрическая схема (15–19) фактически включает в себя два цикла однопараметрической схемы (4) и отличается от нее только чередованием шагов сетки $\tau_1=\tau(p_1)$ и $\tau_2=\tau(p_2)$.

Спектр двухсолитонного решения (14) на отрезке $-20\le x\le 20$ в момент максимального уширения ($t=\pi/8$) локализован преимущественно в области $-32 < k < 32$ (рисунок 1). Таким образом, удовлетворительное спектральное разрешение обеспечивает сетка с числом узлов $N \ge 64$ при $L=20$.

На рисунке 2 представлены среднеквадратичные нормы погрешностей приближенных решений для рассмотренных численных методов в зависимости от числа узлов сетки $N=2^k, k=\overline{8,11}$:

$$\|\delta\|=\frac{\|U(T,x)-u(T,x)\|}{\|u(T,x)\|},\ T=2.\quad(20)$$

При увеличении числа узлов сетки значение оптимальных параметров выбиралось в соответствии с таблицей. Таким образом, чтобы диапазон спектральной согласованности схем цифровой фильтрации покрывал область $-32 < k < 32$, где локализован спектр решения. На рисунке 1 границы области спектральной согласованности отмечены пунктирными вертикальными линиями.

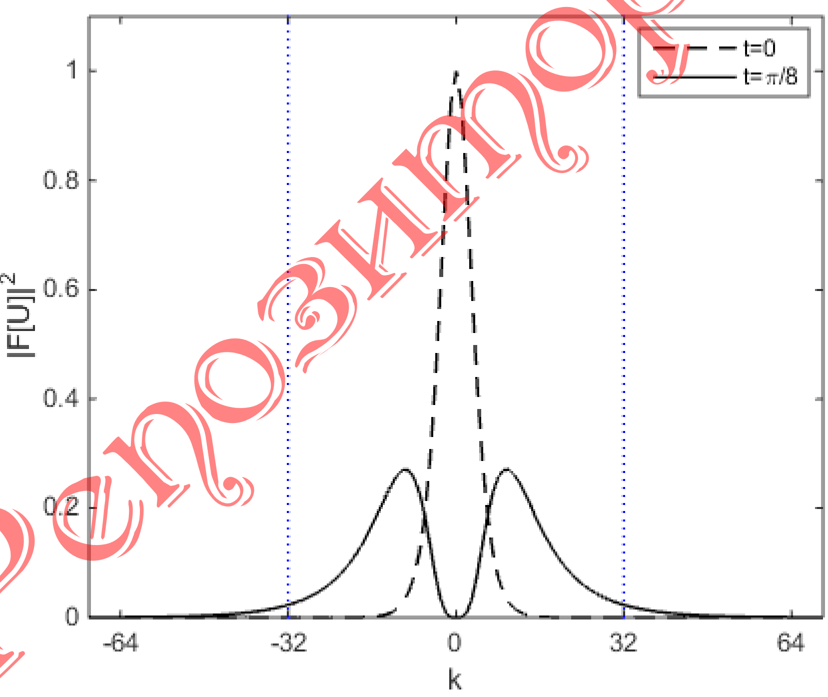

Рисунок 1 – Фурье-спектр двухсолитонного решения (11) при $t=0$ и в момент максимального уширения ($t=\pi/8$)

Репозиторий БГТУ

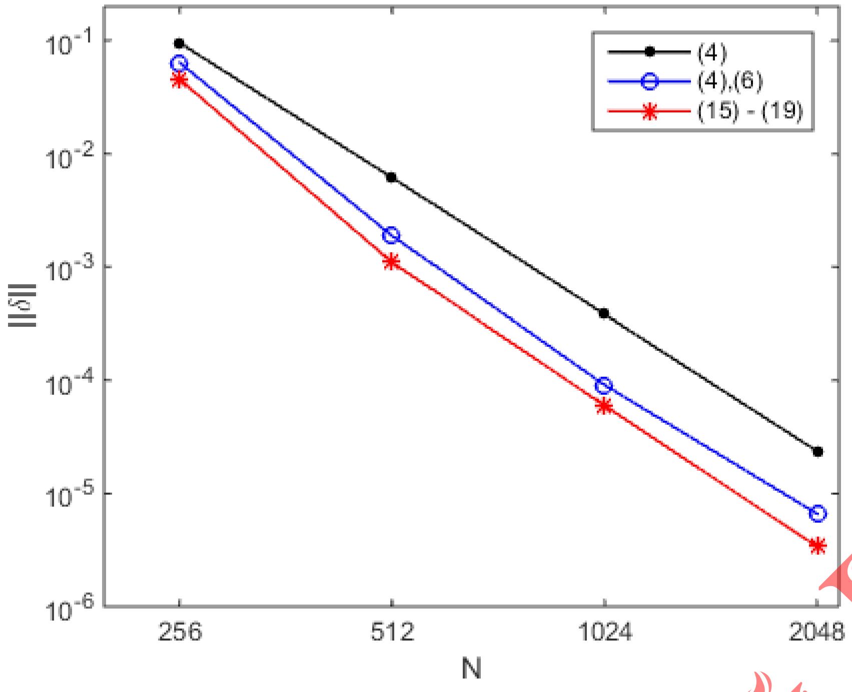

Рисунок 2 – Динамика погрешности приближенного решения задачи (1), (2), (14), полученного с использованием различных модификаций схемы дробных шагов:
(4) – на основе метода Фурье;
(4), (6) – с использованием оптимизированной схемы цифровой фильтрации;
(15–19) – двухпараметрической схемы цифровой фильтрации

Представленные на рисунке 2 результаты, во-первых, показывают четвертый порядок скорости сходимости всех рассмотренных методов. Во-вторых, точность схемы расщепления с использованием рекурсивных фильтров (6) на стадии решения линейной части задачи при одинаковой величине шагов сетки более чем в четыре раза превосходит классическую схему расщепления (4) с использованием метода Фурье. Двухпараметрическая схема (15–19) обеспечивает несколько лучшую точность, но из-за того, что

$$\tau(p_1)+\tau(p_2)<2\tau(p_{opt}),$$

количество шагов данной схемы более чем на 25 % превышает данный показатель для однопараметрической схемы. Данное обстоятельство не позволяет рассматривать двухпараметрическую оптимизацию схемы цифровой фильтрации в качестве радикального средства повышения ее эффективности, хотя некоторые аспекты данной модели представляют интерес, например, с точки зрения подавления искусственной синхронизации Фурье компонент решения при четырехволновом взаимодействии в средах с кубической нелинейностью [11].

Выводы. Предложенные схемы численного анализа нестационарного уравнения Шредингера на основе одно- и двухпараметрических рекурсивных цифровых фильтров, принимая во внимание условия эквивалентности данных методов и классической разностной схемы с весами, показывают возможность оптимизации параметров компактных разностных схем спектрального разрешения на основе критерия спектральной согласованности и методов цифровой обработки сигналов. Как показано ранее в работе [7], построенные алгоритмы с оптимальными параметрами превосходят в эффективности известные схемы повышенного порядка точности. Кроме того, использование данных алгоритмов в методе дробных шагов при решении линейной части задачи для НУШ позволяет при одинаковых размерах шагов сетки получить существенно меньшую погрешность по сравнению с методом Фурье. Показано, что двухпараметрическая оптимизация схемы цифровой фильтрации придает некоторую гибкость в выборе шага по времени, однако не обеспечивает фактического повышения эффективности метода.

Репозиторий БГПУ

Разработанная методика представляется перспективной в качестве альтернативы методу Фурье в тех случаях, когда требуется избежать эффектов, обусловленных условиями периодичности решения, а также в случае обработки больших массивов данных, когда использование алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье с вычислительной сложностью $O(N\log(N))$ становится более затратным по сравнению с разностным методом, имеющим оптимальную асимптотику вычислительной сложности $O(N)$.

Литература

1. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский – М. : Наука, 1983. – 616 с.
2. *Lele, S. K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution / S. K. Lele // J. Comp. Phys. – 1992. – V. 103, № 1. – P. 16–42. – Англ.
3. A time-domain optical transmission system simulation package accounting for nonlinear and polarization-related effects in fiber / A. Carena at al. // IEEE J. selected areas in communications. – 1997. – V. 15, № 4. – P. 751–765. – Англ.
4. *Fleck, J. A.* Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere / J. A. Fleck, J. R. Morris, M. D. Feit // Applied Phys. – 1976. – V. 10, № 2. – P. 129 – 160. – Англ.
5. Improved split-step method for efficient fiber simulations / M. Plura [et al.] // Electronics Letters. – 2001. – Vol. 37, № 5. – P. 286–287. – Англ.
6. *Волков, В. М.* Метод дробных шагов с использованием рекурсивных цифровых фильтров для решения нелинейных уравнений Шредингера / В. М. Волков, А. С. Циунчик // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 22–25.
7. *Волков, В. М.* Оптимизация компактных разностных схем спектрального разрешения для нестационарного уравнения Шредингера на основе методов цифровой обработки сигналов / В. М. Волков, А. Н. Гуревский, И. В. Жукова // Вестник БГУ. – 2015. – № 3. – С. 84–89.
8. *Агравал, Г.* Нелинейная волоконная оптика / Г. Агравал. – М. : Мир, 1996. – 323 с.
9. *Карамзин, Ю. Н.* Математическое моделирование в нелинейной оптике / Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, В. А. Трофимов. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 154 с.
10. *Волков, В. М.* О консервативности, точности и асимптотических свойствах численных методов для нелинейных уравнений шредингеровского типа / В. М. Волков, Н. П. Мацука // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36 – № 7. С. 930–938.
11. *Bosco, G.* Suppression of spurious tones induced by the split-step method in fiber systems simulation / G. Bosco [et al.] // IEEE Photonics Technology Letters. – 2000. – V. 12, №. 5. – P. 489–491. – Англ.

References

1. *Samarskiy, A. A.* Teoriya raznostnykh skhem / A. A. Samarskiy. – M. : Nauka, 1983. – 616 s.
2. *Lele, S. K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution / S. K. Lele // J. Comp. Phys. – 1992. – V. 103, №1. – P. 16–42.
3. A time-domain optical transmission system simulation package accounting for nonlinear and polarization-related effects in fiber / A. Carena at al. // IEEE J. selected areas in communications. – 1997. – V. 15, № 4. – P. 751–765.
4. *Fleck, J. A.* Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere / J. A. Fleck, J. R. Morris, M. D. Feit // Applied Phys. – 1976. – V. 10, № 2. – P. 129 – 160.
5. Improved split-step method for efficient fiber simulations / M. Plura [et al.] // Electronics Letters. – 2001. – Vol. 37, № 5. – P. 286–287.
6. *Volkov, V. M.* Metod drobnykh shagov s ispolzovaniyem rekursivnykh tsifrovykh filtrov dlya resheniya nelineynykh uravneniy Shryodingera / V. M. Volkov, A. S. Tsiunchik // Dokl. NAN Belarusi. – 2009. – T. 53, № 5. – S. 22–25.
7. *Volkov, V. M.* Optimizatsiya kompaktnykh raznostnykh skhem spektralnogo razresheniya dlya nestatsionarnogo uravneniya Shryodingera na osnove metodov tsifrovoy obrabotki signalov / V. M. Volkov, A. N. Gurevskiy, I. V. Zhukova // Vestnik BGU. – 2015. – № 3. – S. 84–89.
8. Agraval, G. Nelineynaya volokonnaya optika / G. Agraval. – M. : Mir, 1996. – 323 s.
9. *Karamzin, Yu. N.* Matematicheskoye modelirovaniye v nelineynoy optike / Yu. N. Karamzin, A. P. Sukhorukov, V. A. Trofimov. M. : Izd-vo MGU, 1989. – 154 s.
10. *Volkov, V. M.* O konservativnosti, tochnosti i asimptoticheskikh svoystvakh chislennykh metodov dlya nelineynykh uravneniy shryodingerovskogo tipa // V. M. Volkov, N. P. Matsuka // Differents. uravneniya. – 2000. – T. 36 – № 7. S. 930 – 938.
11. Bosco, G. Suppression of spurious tones induced by the split-step method in fiber systems simulation / G. Bosco [et al.] I // IEEE Photonics Technology Letters. – 2000. – V. 12, №. 5. – P. 489–491.

Репозиторий БГТУ