А.А. Безносюк (*г. Киев, Украина*)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕПРЕРЫВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Инновационные процессы при переходе науки из эмпирического уровня на тео- ...ческий резко ускоряют темпы ее развития. Теоретические построения освещают ... дальнейшим исследованиям, делают их осознанными, целенаправленными. Но ... всего переход на теоретический уровень ограничивается недостаточной ...ботанностью методов правильного вывода следствий из постулатов, положен... в основу создаваемой теории.

Как отмечают ученые, математика дает возможность не только количественно ...нять результат, который интуитивно предполагается, но и получать совсем ...жиданные выводы, прийти к которым даже на качественном уровне без ...матики практически невозможно. Использование математики – это своеобразное ...лючение к предыдущему опыту всего человечества.

Рассмотрим сначала частичную модель, которая описывает процессы накопле... и забывания знаний из определенного учебного предмета по технологии обуче..., которую назовем «традиционной». Пусть для простоты знания, умения и навыки некоторого учебного предмета (далее для сжатости изложения названные просто ...ниями) усваиваются студентом с постоянной скоростью V0. Пусть уже накоп...нные знания распадаются (забываются) со скоростью, пропорциональной их ...ему X. Коэффициент пропорциональности будем считать постоянным. Он, как и ...ость усвоения, зависит от индивидуальных особенностей студента и от ...цифики учебного материала. Его удобно выбрать в виде 1/τ, где τ – характерное ...мя забывания.

Тогда процесс изменения объема нагроможденных знаний описывается ...йным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dX}{dt} = V_0 - \frac{X}{\tau}. \qquad (1)$$

Теперь попробуем отразить в модели особенности, которые присущи иннова...нным технологиям обучения. Для этого введем величину Y– объем «инновационных» знаний студента, владение которыми повышает эффективность его ...боты. Будем считать, что скорость прироста знаний из определенного учебного ...дмета, получаемых самостоятельно, пропорциональна объему «инновационных» ...аний. Коэффициент пропорциональности f будем считать также постоянным, где f – ...тота усвоения «инновационных» знаний.

Пусть суммарная скорость формирования «традиционных» знаний и «иннова...нных» знаний остается такой, что равняется V0. Разнообразные технологии ...учения могут отличаться одна от одной соотношением усилий преподавателя и ...удента, которые требуются для формирования «инновационных» и «традиционных» ...аний. В нашей модели это соотношение описывается коэффициентом k таким ...разом, что скорость формирования «инновационных» знаний будет равняться k0, а «традиционных» знаний – (1– k)V0.

Как указано выше, интенсивность забывания «традиционных» знаний, получен...ных в процессе обучения, характеризуется коэффициентом 1/τ, забывание же «инновационных» знаний не происходит (например, в силу того, что студент ...стоянно пользуется ими как инструментом самообучения).

Совокупность описанных процессов изменения объемов нагроможденных «инно...ционных» знаний и «традиционных» знаний описывается дифференциальными ...авнениями:

$$\frac{dY}{dt} = kV_0,$$

$$\frac{dX}{dt} = (1-k)V_0 + fY - \frac{X}{\tau}.$$

Пусть начальные условия, для определенности, такие:

X(0) =0, Y(0) =0.

Если коэффициент *k,* что определяет частицу усилий препода… направленных на формирование «инновационных» знаний, не изменяет… времени, то система обычных дифференциальных уравнений (2) при нач… условиях (3) легко решается аналитически:

$$Y(t) = kV_0t, \quad X(t) = V_0\tau\left[kft + (kft - 1 + k)\left(e^{-ft} - 1\right)\right]. \qquad (4)$$

Графики зависимостей *X(t)* для разных *k* представлены на рисунке 1.

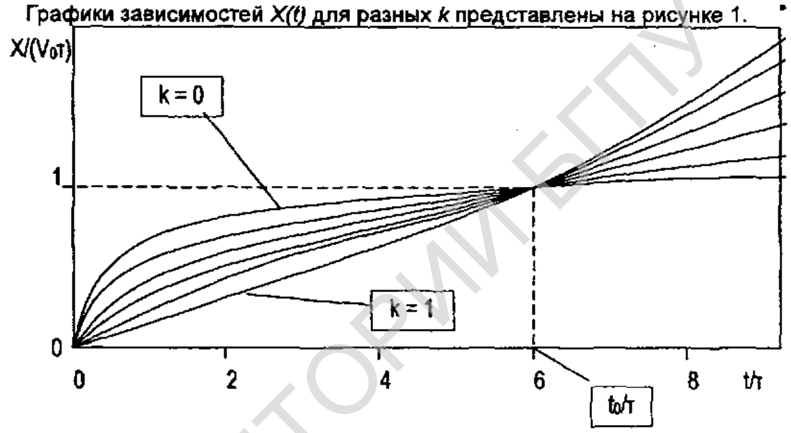

Рисунок 1 – Зависимость объема «традиционных» знаний от времени для технологий, которые различаются усилиями, направленными на формирование «инновационных» знаний

Модель традиционного обучения, в котором не учитывается влияние «инн… ционных» знаний, отвечает условию k=0. В этом случае $X(t)\big|_{k=0} = V_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Гра… такой зависимости направляется к горизонтальной асимптоте X(∞) = V0τ. Та… образом, объем знаний из определенного предмета при традиционной техноло… обучения, ориентированной на бездумное запоминание материала, выходи… насыщение: новые знания поступают, а старые с той же скоростью забываются.

В том случае, когда в процессе обучения происходит формирова… «инновационных» знаний (k>0), асимптота графика зависимости X(t) становится… не горизонтальной, а наклонной. В этом можно убедиться с помощью (4), если уче… что $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$ при $t \to \infty$, то выйдет выражение для линейной функции, график кото… и является преклонной асимптотой.

Интересно проследить судьбу студента после завершения формальн… образования. В нашей модели это отвечает исчезновению «подка… «традиционными» знаниями и «инновационных» знаний «извне», что выражает… том, что после некоторого момента времени tз, скорость V0 будет равняться ну… Тогда уравнения (2) приобретут вид:

$$\frac{dY}{dt} = 0, \quad \frac{dX}{dt} = fY - \frac{X}{\tau}.$$

Из графика (рисунок 2) видно, что после завершения образования объем знаний ...дит на горизонтальную асимптоту, однако постоянные значения $X(\infty)$ разные. ... больше при обучении частица усилия, которое идет на формирование ...новационных» знаний, тем больший предельный объем «традиционных» знаний. ...ли у выпускника «инновационные» знания отсутствуют вообще (k=0), то после ...чания обучения происходит неминуемое забывание нагроможденных ...диционных» знаний, которое приводит к практически полному их исчезновению. ...оборот, при достаточном объеме «инновационных» знаний знания выпускника ...е окончания официального обучения могут даже увеличиваться. *М. Лауе* ...чал: "Образование есть то, что остается после того, как все изученное забыто".

Сразу после окончания официального обучения скорость прироста ...диционных» знаний скачкообразно уменьшается на величину V0(1-k). И лишь при ...1 (формировались только „инновационные" знания) график будет без излома.

Итак, если возникает требование максимизировать объем знаний в отдаленной ...пективе после окончания обучения, то оптимальным значением k будет 1 (что ...чает формированию только «инновационных» знаний). Конечно, здесь ...дполагается, что студент заинтересован в знаниях из определенного предмета и ...учает их, пользуясь уже сформированными инновационными" знаниями.

Естественным является вопрос о том, как изменятся результаты задачи о ...симизации X(tk), если снять ограничения на постоянство во времени параметра k. ...угими словами, как выбрать функцию k(t), чтобы обеспечить максимальный объем ...аний на момент контроля?

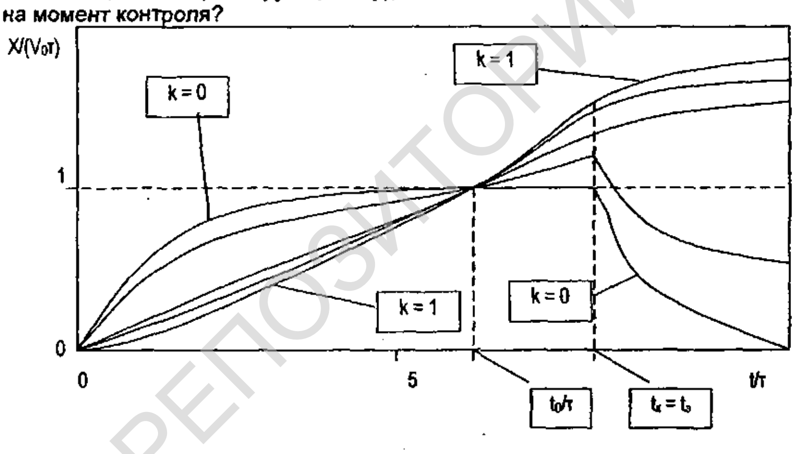

Рисунок 2 – Случай адекватного прогноза успеваемости профессиональной деятельности.

Эта задача представляется заметно более сложной и напоминает задачу вариационного исчисления. Первый вопрос, который напрашивается: вытекает ли из условия $0 \le k(t) \le 1$ вывод о том, что график *X(t)* будет всегда расположен между графиками, которые отвечают предельным значениям параметра *k*, то есть графиками $X(t)\big|_{k=0}$ и $X(t)\big|_{k=1}$. Интерес к этому вопросу связан с тем, что утвердительный ответ на него означал бы, что ответ в общей задаче относительно максимизации $X(t_k)$ был бы абсолютно таким же, как и в частном случае, когда параметр *k* не изменяется во время обучения. Но ответ на поставленный вопрос отрицательный. Мы в этом убедились, подставив разные *k(t)*, что удовлетворяют указанному условию, в компьютерную программу, которая вычисляет значение $X(t)$ и строит со[illegible] ствующие графики. Тем не менее, как потом выяснилось, осознать, что отве[illegible] цательный, можно было и с помощью довольно простых соображений. Так[illegible] разом, задача не сводится к предыдущей и требует отдельного решения. При[illegible] ние математических методов дает такую стратегию максимизации $X(t_к)$:

$$k(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le t_к-\Delta T,\\ 0, & t_к-\Delta T<t\le t_к,\end{cases}$$

где $\Delta T=\tau\cdot\ln\left(1+\frac{1}{f\tau}\right)$.

Конечно, предполагается, что $t_к$-$\Delta T>0$, в противоположном случае k=0.

Другими словами, если $t_к$-$\Delta T\le 0$, то побеждает традиционная технологи[illegible] качки» предметными знаниями (k=0). Если же к моменту контроля больш[illegible] мени, чем ΔT, то надо сначала формировать «инновационные» знания (k=1), а [illegible] к моменту контроля останется ΔT, следует переключиться на режим «тради[illegible] ного» обучения. Интересно, что величина ΔT не зависит от $t_к$. Для наглядност[illegible] фики $X(t)$ при оптимальных стратегиях для двух значений $t_к$ представлен[illegible] рисунке 3.

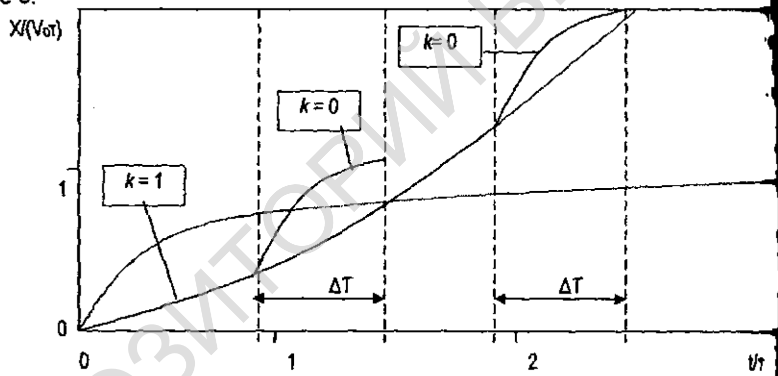

Рисунок 3 – Оптимальные стратегии достижения максимального объема знаний на моме[illegible] контроля при непрерывном образовании (для двух значений $t_к$).

Наши экспериментальные исследования свидетельствуют о том, что и[illegible] вационная технология может давать лучшие результаты по уровню знаний, [illegible] рый измеряется тестами, уже через два года. Еще через два года преимущ[illegible] инновационной технологии становятся целиком очевидными.