

## НЕВЫПУКЛОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ФЕРМА–ТОРИЧЕЛЛИ

А. Д. Стриленко,  
БГПУ (Минск)

Науч. рук. – к. ф.-м. н., доцент  
Н. В. Гриб

Пусть на плоскости даны три неколлинеарные точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Нужно найти точку этой плоскости, сумма расстояний от которой до данных точек минимальна.

Эта задача, сформулированная Пьером Ферма, не столь известна, как его Великая теорема. Однако она также внесла свой вклад в развитие математической науки, дав начало целому направлению, оформленвшемуся в прошлом веке в отдельную дисциплину – Facility location (расположение объектов).

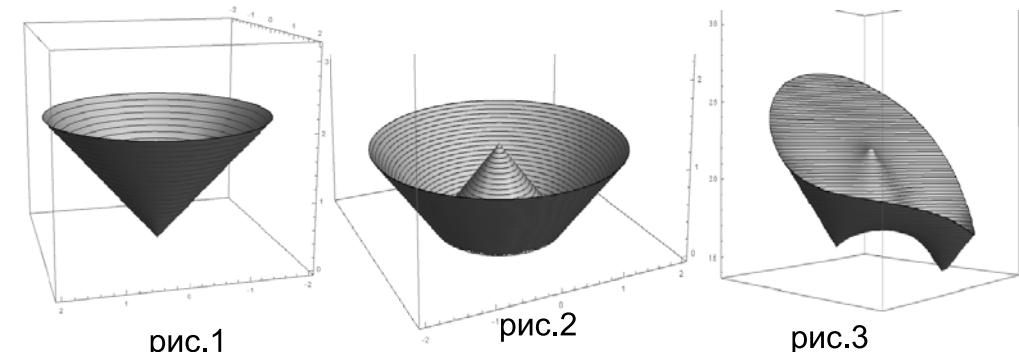
Первое решение задачи принадлежит Торричелли и относится к случаю, когда все углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ . Полное решение было сформулировано только в первой половине XIX века и звучит так: если все углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ , то для искомой точки  $T$   $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$ , если же один из углов треугольника больше либо равен  $120^\circ$ , то точка  $T$  совпадает с вершиной этого угла. Дальнейшее развитие проблемы Ферма–Торричелли происходило следующими путями: увеличение количества точек для минимизации суммы [1], наделение каждой точки весом, т.е. замена обычной суммы на взвешенную сумму [2], замена евклидового расстояния другими расстояниями, замена точек некоторыми множествами.

Одним из наиболее эффективных современных подходов к решению классической задачи Ферма–Торричелли и ее многочисленных обобщений является использование методов выпуклого анализа – раздела математики, занимающего промежуточное положение между анализом и геометрией, в котором изучаются выпуклые функции, выпуклые функционалы и выпуклые множества – и, в частности, субдифференциального исчисления. Дело в том, что такие задачи, как и многие другие задачи из самых различных областей математики, являются выпуклыми, т.е. сводятся к исследованию некоторой выпуклой (вниз) функции.

Рассмотрим следующее обобщение задачи Ферма–Торричелли, когда одна из точек заменяется окружностью.

**Задача\*.** Пусть на плоскости даны точки  $A$ ,  $B$  и окружность  $\omega$ . Найти точку плоскости, сумма расстояний от которой до данных объектов минимальна.

Рассмотрим функцию  $F(M) = f_1(M) + f_2(M) + f_3(M)$ , где  $f_1(M) = d(M, A)$  – евклидово расстояние между точками  $M$  и  $A$ ,  $f_2(M) = d(M, B)$ ,  $f_3(M) = \min_{N \in \omega} d(M, N)$ . Функции  $f_1(M)$  и  $f_2(M)$  определяют конусы с вершинами в точках  $A$  и  $B$  и, как легко видеть (рис.1), выпуклы вниз. Функция  $f_3(M)$  не является выпуклой на всей области определения, но выпукла вверх в области  $W$ , ограниченной  $\omega$  (рис.2), и может быть переопределена в  $W$ , чтобы стать выпуклой вниз на всей области определения. Если точки  $A$  и  $B$  лежат вне  $\omega$ , то и точка минимума  $T$  лежит вне  $W$  (кроме некоторых тривиальных случаев), поэтому может быть найдена стандартными средствами выпуклого анализа в силу выпуклости минимизируемой функции. Случай, когда одна точка находится внутри окружности, а одна – вне, также тривиален и не представляет интереса.



В самом интересном случае обе точки лежат внутри  $\omega$ . Функция  $F(M)$  в области  $W$  представляет собой сумму функций различных направлений выпуклости (рис.3) и сама выпуклой не является, поэтому для ее минимизации методы выпуклого анализа неприменимы.

Нами было получено решение задачи\* с использованием методов элементарной геометрии. В силу сложности и громоздкости решения ограничимся лишь его формулировкой при  $A \in W$ ,  $B \in W$ .

За  $\alpha$  и  $\beta$  обозначим  $\angle OAB$  и  $\angle OBA$  соответственно. Будем считать  $\alpha \leq \beta$ .

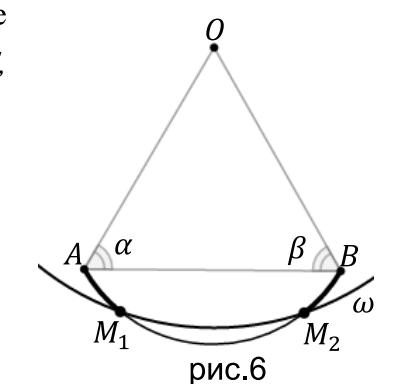
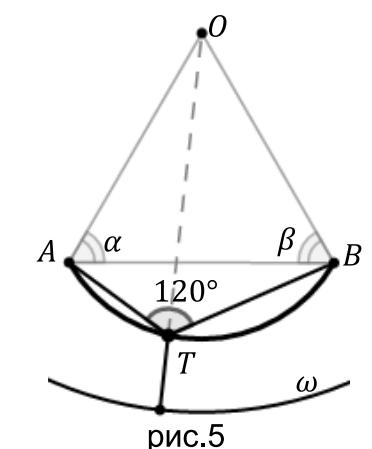
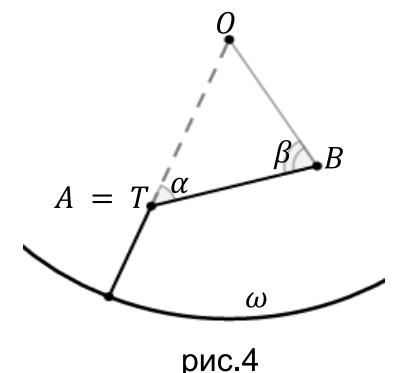
1. Если  $\alpha < 60^\circ$  и  $\beta > 60^\circ$ , или  $\alpha \leq 60^\circ$  и  $\beta \leq 60^\circ$ , но не равны одновременно  $60^\circ$ , то искомая точка  $T$  совпадает с  $A$  (рис.4).

2. Если  $\alpha = \beta = 60^\circ$  и дуга  $AB = 120^\circ$  не пересекает  $\omega$ , то искомая точка – любая точка  $T$  дуги  $\omega AB$ , включая концы (рис.5).

3. Если  $\alpha = \beta = 60^\circ$  и дуга  $\omega AB = 120^\circ$  пересекает  $\omega$  в точках  $M_1$  и  $M_2$ , то искомая точка – любая точка дуг  $AM_1$  и  $M_2B$ , включая концы (рис.6).

Для рассмотрения последующих случаев воспользуемся дополнительным построением. Достроим отрезок  $AB$  до равностороннего треугольника  $ABC$  (рис.7), проведем дугу  $AB$  описанной около него окружности. Обозначим  $AB \cap OC = M$ .

4. Если  $M$  находится внутри  $\omega$ ,  $\alpha \geq 60^\circ$  и  $\beta \geq 60^\circ$ , но не равны одновременно  $60^\circ$ , то искомая точка  $T$  такая, что лучи  $AT$ ,  $BT$  и  $OT$  образуют углы в  $120^\circ$ , т.е.  $T = M$  (рис.8).



5. Если  $M$  находится вне или на  $\omega$ ,  $\alpha \geq 60^\circ$  и  $\beta \geq 60^\circ$ , но не равны одновременно  $60^\circ$ ,

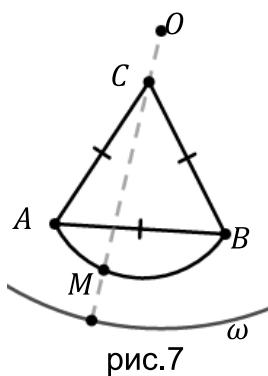


рис.7

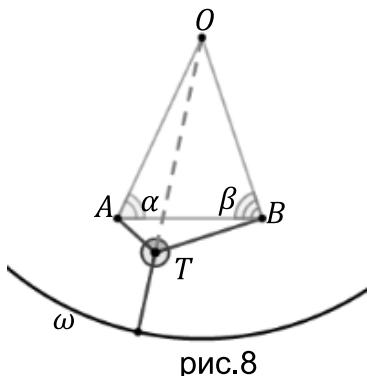


рис.8

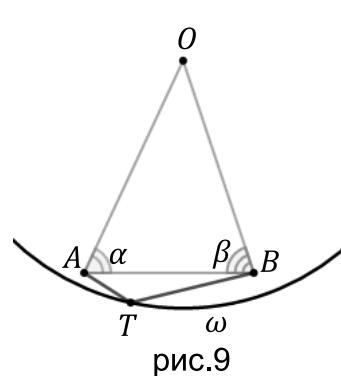


рис.9

то искомая точка  $T$  находится на  $\omega$  (рис.9).

Легко заметить, что решение задачи напоминает решение классической задачи Ферма-Торричелли: точка минимума  $T$  либо такова, что лучи  $AT$ ,  $BT$  и  $OT$  образуют углы в  $120^\circ$  (случаи 2–4), либо лежит на одном (совпадает с одним) из данных объектов (случаи 1, 5).

В случаях 1–4 точку  $T$  легко построить с помощью циркуля и линейки. В случае 5 точка  $T$  построена быть не может, так как алгебраическое решение сводится к уравнению, неразрешимому в квадратных радикалах.

Как было уже отмечено, найденное решение технически довольно сложно, хотя и элементарно. Как нам видится, его позволит упростить некоторая модификация методов выпуклого анализа, позволяющая описывать дифференциальные свойства функций с различными направлениями выпуклости.



## Литература

1. Weiszfeld, E. Sur le point pour lequel la somme des distances de  $n$  points donnés est minimum / E. Weiszfeld // TohokuMath. J. Sendai. – 1937. – Vol.43. No2. – P. 355–368.
2. Launhardt, W. Kommercielle Tracirung der Verkehrswege / W. Launhardt // Zeitschrift f. Architekten u. Ingenieur-Vereinis im Königreich Hannover. – 1872. – V.18. – S. 516–534.