Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь

Установа адукацыі
“Беларускі дзяржаўны педагагічны універсітэт імя Максіма Танка”

У. А. Шылінец

Ш Э Р А Г І

Вучэбны дапаможнік

Мінск 2004

УДК 517.5(075.8)

ББК 22.161я73

Ш11

Друкуецца па рашэнні рэдакцыйна–выдавецкага савета БДПУ

Рэкамендавана секцыяй фізіка-матэматычных і тэхнічных навук БДПУ (пратакол №

Рэцэнзенты:

Л.І.Майсеня, кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі БДУІР;

У. У. Шлыкаў, доктар педагагічных навук, прафесар

Шылінец У. А.

Ш11 Шэрагі: Вучэб. дапам.— Мн.: БДПУ , 2004. с.

ISBN

У дапаможніку выкладаецца тэарэтычны матэрыял раздзелу “Шэрагі” курса матэматычнага аналізу.

Адрасуецца студэнтам фізіка–матэматычных спецыяльнасцяў педагагічных ВНУ.

УДК 517.5(075.8)

ББК 22.161я73

ISBN

ПРАДМОВА

У аснову дадзенага вучэбнага дапаможніка пакладзены лекцыі па матэматычнаму аналізу, у прыватнасці па раздзелу гэтага курса “Шэрагі”, якія чыталіся аўтарам на фізічным факультэце БДПУ імя Максіма Танка на працягу шэрагу гадоў.

Змест вучэбнага дапаможніка адпавядае праграме курса матэматычнага аналізу для спецыяльнасцяў “фізіка і матэматыка”, “фізіка і інфарматыка”.

У дапаможніку выкладаюцца асновы тэорыі лікавых і функцыйных шэрагаў, у тым ліку ступеневых шэрагаў. Дастаткова строгае і поўнае выкладанне тэарэтычнага матэрыялу суправаджаецца вялікай колькасцю ілюстрацыйных прыкладаў.

Сістэматычная праца з выкарыстаннем дадзенага вучэбнага дапаможніка забяспечыць студэнту неабходны мінімум ведаў па раздзелу “Шэрагі” курса матэматычнага аналізу, будзе стымуляваць яго для далейшай, больш паглыбленай, самастойнай працы над прадметам, тым больш, што раздзел “Шэрагі” для многіх аказваецца складаным раздзелам матэматычнага аналізу.

Дадзены вучэбны дапаможнік будзе карысным як студэнтам фізіка-матэматычных спецыяльнасцяў педагагічных ВНУ, так і студэнтам інжынерна-тэхнічных спецыяльнасцяў ВНУ, у праграму па вышэйшай матэматыцы якіх уваходзіць раздзел “Шэрагі”.

Лікавыя шэрагі

1.1 Асноўныя паняцці

Няхай дадзена лікавая паслядоўнасць

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

З элементаў гэтай паслядоўнасці чыста фармальна складзем наступны выраз:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad . \tag{1}$$

Гэты выраз называецца лікавым шэрагам або проста шэрагам. Лікі $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называюцца складнікамі шэрагу.

$a_n \, (n = 1,2,3,\ldots)$ называецца агульным складнікам шэрагу. Шэраг (1) абазначаецца таксама натупным чынам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, . \tag{1'}$$

Вызначым цяпер паняцце сумы шэрагу. Спачатку разгледзім наступныя сумы:

$$S_1 = a_1 ,$$
$$S_2 = a_1 + a_2 ,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 ,$$
$$. \qquad . \qquad . \qquad .$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots ,$$
$$. \qquad . \qquad . \qquad .$$

Гэтыя сумы называюцца частковымі сумамі шэрагу (1). Яны ўтвараюць паслядоўнасць (S_n) частковых сум лікавага шэрагу (1).

Азначэнне: Калі паслядоўнаць частковых сум шэрагу збягаецца, то шэраг называецца збежным, а лік

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

называецца сумай дадзенага шэрагу. Пры гэтым запісваюць так:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{ або } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, .$$

Калі паслядоўнасць частковых сум шэрагу разбягаецца, то шэраг называецца разбежным.

Адзначым, што разбежнасць шэрагу можа быць двух тыпаў.

1. Паслядоўнасць (S_n) мае бясконцы ліміт.
2. Паслядоўнасць (S_n) не мае ні канечнага, ні бясконцага лімітаў.

Прыклад 1. Няхай дадзены лікавы шэраг

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots \qquad (a \neq 0) .$$

Разгледзім паслядоўнасць частковых сум дадзенага шэрагу:

$$S_n = na \quad (n = 1,2,3,\ldots) .$$

Паколькі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = na = \infty$, то дадзены шэраг разбягаецца.

Прыклад 2. Разгледзім лікавы шэраг

$$a+(-a)+a+(-a)+\ldots \qquad (a\neq 0).$$

Гэты шэраг запісваюць таксама так:

$$a-a+a-a+\ldots.$$

Разгледзім частковыя сумы гэтага шэрагу:

$$S_1=a\ ,\ S_2=a\ -a\ =0\,,\ S_3=a-a+a=a\,,\ S_4=a-a+a-a=0\,,\ \ldots.$$

Паслядоўнасць частковых сум дадзенага шэрагу не мае ні канечнага, ні бясконцага лімітаў. Паколькі гэтая паслядоўнасць разбягаецца, то і дадзены шэраг разбягаецца.

Прыклад 3. Разгледзім шэраг, складзены з элементаў геаметрычнай прагрэсіі:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \qquad (a\neq 0).$$

Гэты шэраг таксама называецца геаметрычнай прагрэсіяй.

Даследуем пытанне аб збежнаці гэтага шэрагу. Магчымы наступныя выпадкі:

1. Няхай $|q|<1$. Разгледзім паслядоўнасць частковых сум дадзенага шэрагу:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Паколькі ў дадзеным выпадку $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$, то дадзены шэраг збягаецца, і яго сума роўная $\dfrac{a}{1-q}$.

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\frac{a}{1-q}.$$

2. Няхай $|q|>1$. Разгледзім паслядоўнасць частковых сум дадзенага шэрагу:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

У дадзеным выпадку $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$. Такім чынам, у разглядаемым выпадку дадзены шэраг разбягаецца.

3. Няхай $|q|=1$. У гэтым выпадку дадзены шэраг мае наступны выгляд:

$$a+a+a+\ldots+a+\ldots \qquad (\text{пры } q=1),$$

$$a-a+a-a+\ldots \qquad (\text{пры } q=-1).$$

Такія лікавыя шэрагі, як мы ўжо ведаем, разбягаюцца.

Высновы. У выпадку $|q|\geq 1$ геаметрычная прагрэсія з'яўляецца разбежным шэрагам. У выпадку $|q|<1$ геаметрычная прагрэсія з'яўляецца збежным шэрагам, сума якога роўная $\dfrac{a}{1-q}$.

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\frac{a}{1-q}.$$

Прыклад 4. Няхай дадзены лікавы шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Разгледзім паслядоўнасць частковых сум дадзенага шэрагу:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Здзейснім некаторыя пераўтварэнні. Паколькі

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

то будзем мець

$$S_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}.$$

Дадзены шэраг збягаецца, бо

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1.$$

Сума шэрагу роўная 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

1.2 Асноўныя ўласцівасці шэрагаў

Тэарэма 1. Няхай c – рэчаісны лік. Калі шэраг

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

збягаецца і мае суму S, то шэраг

$$ca_1+ca_2+ca_3+\ldots+ca_n+\ldots \qquad (2)$$

таксама збягаецца і мае суму cS.

Шэраг (2) называецца здабыткам шэрагу (1) на лік c.

Доказ. Разгледзім n–ыя частковыя сумы шэрагаў (1) і (2). Абазначым іх адпаведна праз S_n і δ_n.

Заўважым, што

$$\delta_n = cS_n.$$

Паколькі паслядоўнасць (S_n) збягаецца, то, відавочна, і паслядоўнасць (δ_n) таксама збягаецца. Прычым

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=cS.$$

Гэтым даказана, што шэраг (2) збягаецца і мае суму cS.

Тэарэма 2. Калі шэрагі

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (3)$$

і

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots \qquad (4)$$

збягаюцца і маюць адпаведна сумы S і S^*, то шэраг

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\ldots+(a_n\pm b_n)+\ldots \qquad (5)$$

таксама збягаецца і мае суму $S\pm S^*$.

Шэраг (5) называецца сумай (рознасцю) шэрагаў (3) і (4).

Доказ тэарэмы 2 прапануецца здзейсніць самастойна.

Тэарэма 3 (неабходная прымета збежнасці шэрагу). Калі шэраг

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

збягаецца, то яго агульны складнік імкнецца да нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказ. Няхай S_n – n–ая частковая сума дадзенага шэрагу, а S – яго сума. Заўважым, што

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Таму

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Вынік. Калі агульны складнік шэрагу не імкнецца да нуля, то дадзены шэраг разбягаецца.

Доказ. Мяркуем працілеглае. Няхай дадзены шэраг збягаецца. Тады згодна з тэарэмай 3 атрымліваем, што $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, але гэта супярэчыць умове.

Прыклад 1. Разгледзім лікавы шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n+2}.$$

Паколькі

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+2} = 3 \neq 0,$$

то дадзены шэраг разбягаецца.

Заўвага. Імкненне да нуля агульнага складніка шэрагу з'яўляецца неабходнай прыметай, але не з'яўляецца дастатковай прыметай збежнасці шэрагу.

Прыклад 2. Разгледзім лікавы шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Гэты шэраг называецца гарманічным шэрагам. Агульны складнік дадзенага шэрагу імкнецца да нуля: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Аднак, як будзе паказана ніжэй, гарманічны шэраг з'яўляецца разбежным шэрагам.

Тэарэма 4. Адкідванне канечнага ліку пачатковых складнікаў шэрагу і дабаўленне да пачатку шэрагу канечнага ліку новых складнікаў не робяць уплыву на збежнасць або разбежнасць шэрагу.

Доказ. Разгледзім два шэрагі

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots, \qquad (6)$$

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}+\ldots. \tag{7}$$

Дакажам, што пры кожным фіксаваным n шэрагі (6) і (7) збягаюцца або разбягаюцца адначасова. Гэтым і будзе даказана тэарэма 4.

Заўважым, што частковую суму S_m^* шэрагу (7) можна запісаць у наступным выглядзе: частковая сума S_{n+m} шэрагу (6) мінус сталая велічыня S_n:

$$S_m^*=S_{n+m}-S_n. \tag{8}$$

З роўнасці (8) вынікае, што пры $m\to\infty$ (n–фіксаванае) сума S_m^* мае або не мае канечнага ліміту адначасова з сумай S_{n+m}. Гэта і сведчыць аб тым, што шэрагі (6) і (7) збягаюцца або разбягаюцца адначасова.

Азначэнне. Няхай шэраг (6) збягаецца. Тады збягаецца і шэраг (7). Сума шэрагу (7) называецца астачай шэрагу (6) пасля n–га складніка і абазначаецца R_n.

$$R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}+\ldots.$$

Вывучым цяпер пытанне пра сувязь паміж сумай S збежнага шэрагу, яго n–ай частковай сумай S_n і астачай R_n пасля n–ага складніка. З гэтай мэтай у роўнасці (8) пяройдзем да ліміту пры $m\to\infty$ (n – фіксаванае). Атрымаем

$$R_n=S-S_n, \tag{9}$$

адкуль

$$S=S_n+R_n. \tag{10}$$

Роўнасць (10) устанаўлівае шукаемую ўзаемасувязь.

Пяройдзем цяпер у роўнасці (9) да ліміту пры $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=\lim_{n\to\infty}S-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

Атрыманы вынік можна сфармуляваць у выглядзе наступнай тэарэмы.

Тэарэма 5. Астача збежнага шэрагу пасля n–ага складніка імкнецца да нуля пры $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0.$$

1.3. Дадатныя шэрагі

Азначэнне. Шэраг называецца дадатным, калі ўсе яго складнікі неадмоўныя. Калі ж усе яго складнікі дадатныя, то дадзены шэраг называецца строга дадатным.

Тэарэма 1 (неабходная і дастатковая прымета збежнасці дадатнага шэрагу).

Для таго каб дадатны шэраг збягаўся неабходна і дастаткова, каб паслядоўнаць яго частковых сум была абмежавана зверху.

Доказ. Неабходнасць. Паводле умовы тэрэмы дадатны шэраг збягаецца. Гэта азначае, што збягаецца яго паслядоўнасць частковых сум. Вядома, што любая збежная паслядоўнасць з'яўляецца абмежаванай, гэта значыць абмежаванай знізу і зверху.

Дастатковасць. Згодна з умовай тэарэмы дадзены шэраг з'яўляецца дадатным. Таму паслядоўнаць яго частковых сум будзе неспадальнай. Паводле ўмовы тэарэмы гэтая паслядоўнасць будзе абмежаванай зверху. Як вядома, любая неспадальная абмежаваная зверху паслядоўнасць мае канечны ліміт. Таму дадзены шэраг збягаецца.

Пры дапамозе тэарэмы 1 дакажам цяпер адну важную дастатковую прымету збежнасці шэрагу.

Тэарэма 2 (прымета параўнання)**.** Няхай дадзены два дадатныя шэрагі

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (A)$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (B)$$

Калі для ўсіх n выконваецца няроўнасць

$$a_n \le b_b\,, \qquad (1)$$

то збежнасць шэрагу (B) цягне за сабой збежнаць шэрагу (A), а разбежнасць шэрагу (A) цягне за сабой разбежнасць шэрагу (B).

Доказ. Абазначым n–ыя частковыя сумы шэрагаў (A) і (B) адпаведна праз A_n і B_n. Згодна з няроўнасцю (1) будзем мець

$$A_n \le B_n \qquad \forall n\,. \qquad (2)$$

1. Дакажам першую частку тэарэмы. Няхай шэраг (B) збягаецца. Тады паводле тэарэмы 1 паслядоўнасць частковых сум шэрагу (B) абмежаваная зверху:

$$\exists M, \forall n \Rightarrow B_n \le M\,. \qquad (3)$$

З няроўнасцяў (2) і (3) вынікае, што для любога n

$$A_n \le M\,.$$

Апошняя няроўнасць сведчыць аб тым, што паслядоўнасць частковых сум шэрагу (A) абмежавана зверху. Таму згодна з тэарэмай 1 шэраг (A) збягаецца.
Такім чынам, мы даказалі, што збежнасць шэрагу (B) цягне за сабой збежнасць шэрагу (A).

2. Другая частка тэарэмы даказваецца метадам ад працілеглага.

Заўвага 1. У фармулёўцы тэарэмы 2 можна патрабаваць, каб няроўнасць (1) выконвалася не для ўсіх *n*, а пачынаючы з некаторага нумара, гэта значыць для ўсіх дастаткова вялікіх *n*. Праўдзівасць гэтага вынікае з тэрэмы 4 параграфа 1.2.

Вынік (прымета параўнання ў лімітавай форме)**.** Няхай шэраг (A) дадатны, а шэраг (B) строга дадатны. Калі існуе канечны адрозны ад нуля ліміт

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \qquad (0 < k < +\infty)\,,$$

то шэрагі (A) і (B) збягаюцца і разбягаюцца адначасова.

Доказ. Паводле ўмовы тэарэмы для любога ліку $\varepsilon > 0$ існуе такі нумар N, што для ўсіх $n > N$ мае месца няроўнасць

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon\,,$$

г.зн. няроўнасць

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon\,. \qquad (4)$$

Возьмем такі лік $\varepsilon > 0$, каб было $k - \varepsilon > 0$.

1. Няхай збягаецца шэраг (A).Дакажам збежнасць шэрагу (B). Скарыстаем левую частку няроўнасці (4) і атрымаем, што

$$(k-\varepsilon)b_n < a_n \qquad \forall n > N\,.$$

З гэтай няроўнасці і са збежнасці шэрагу (A) паводле тэарэмы 2 вынікае збежнасць дадатнага шэрагу $\sum_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)b_n$.Калі складнікі гэтага шэрагу памножыць на лік $\frac{1}{k-\varepsilon}$,то атрымаем шэраг (B), які таксама збягаецца згодна з тэарэмай 1 параграфа 1.2.

Такім чынам, мы даказалі, што збежнасць шэрагу (A) цягне за сабой збежнасць шэрагу (B).

2. Няхай збягаецца шэраг (B). Дакажам збежнасць шэрагу (A). Скарыстаўшы правую частку няроўнасці (4), атрымаем, што

$$a_n < (k+\varepsilon)b_n \quad \forall n > \text{N}. \tag{5}$$

Паколькі шэраг (B) збягаецца, то згодна з тэарэмай 1 параграфа 1.2 будзе збягацца і шэраг $\sum_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)b_n$. Адсюль і з няроўнасці (5) паводле тэарэмы 2 атрымаем збежнасць шэрагу (A).

Такім чынам, мы даказалі,што са збежнасці шэрагу (B) вынікае збежнасць шэрагу (A).

Сцвярджэнне выніку пра адначасовую збежнасць шэрагаў (A) і (B) даказалі. Сцвярджэнне пра адначасовую разбежнасць шэрагаў (A) і (B) даказваецца метадам ад процілеглага.

Прыклад 1. Разгледзім лікавы шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}. \tag{6}$$

Даследуем збежнасць гэтага шэрагу. Будзем параўноўваць гэты шэраг з шэрагам

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}. \tag{7}$$

Паколькі

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n$$

і шэраг (7) збягаецца (шэраг (7) з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй з назоўнікам $q=\frac{1}{2}$), то паводле тэарэмы 2 збежным будзе і шэраг (6).

Збежнасць шэрагу (6) можна таксама даказаць пры дапамозе прыметы параўнання ў лімітавай форме.

Паколькі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n+1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^n} = 1,$$

і шэраг (7) збягаецца, то шэраг (6) таксама будзе збежным.

Вывучым яшчэ некалькі дастатковых прымет збежнасці дадатных шэрагаў.

Тэарэма 3(прымета Даламбера). Няхай дадзены строга дадатны шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, . \qquad (A)$$

Калі для ўсіх дастаткова вялікіх n выконваецца няроўнасць

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1, \qquad (8)$$

то шэраг (A) збягаецца.

Калі

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1, \qquad (9)$$

то шэраг (A) разбягаецца.

Доказ. Не абмяжоўваючы агульнасці доказу, можна лічыць, што няроўнасці (8) і (9) выконваюцца для ўсіх n (глядзі тэарэму 4 параграфа 1.2).

1. Разгледзім спачатку выпадак, калі для ўсіх n выконваецца няроўнасць (8). У гэтым выпадку будзем мець:

$$\frac{a_2}{a_1} \le q, \ \frac{a_3}{a_2} \le q, \dots, \ \frac{a_n}{a_{n-1}} \le q.$$

Калі перамножыць усе гэтыя няроўнасці, то атрымаем

$$\frac{a_n}{a_1} \le q^{n-1},$$

адкуль

$$a_n \le a_1 q^{n-1}. \qquad (10)$$

Няроўнасць (10) мае месца для ўсіх *n*.

Разгледзім цяпер шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}. \qquad (11)$$

Гэты шэраг з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй з назоўнікам q. Паколькі ў разглядаемым выпадку $0 < q < 1$, то шэраг (11) збягаецца. Адсюль і з няроўнасці (10) паводле тэарэмы 2 атрымліваем, што даследуемы шэраг (A) таксама збягаецца.

2.Разгледзім цяпер выпадак, калі для ўсіх n выконваецца няроўнасць (9). З гэтай няроўнасці вынікае, што паслядоўнасць, складзеная са складнікаў шэрагу (A) з'яўляецца неспадальнай паслядоўнасцю (бо $a_n \le a_{n+1}$) дадатных лікаў. А такая паслядоўнасць не імкнецца да нуля, іншымі словамі агульны складнік шэрагу (A) не імкнецца да нуля. Таму шэраг (A) разбягаецца (глядзі вынік з тэарэмы 3 параграфа 1.2).

Вынік (прымета Даламбера ў лімітавай форме)**.** Няхай дадзены строга дадатны шэраг (A). Калі існуе ліміт

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то пры $l < 1$ шэраг (A) збягаецца, пры $l > 1$ шэраг (A) разбягаецца, пры $l = 1$ пытанне аб збежнасці шэрагу застаецца адкрытым.

Доказ. Паводле ўмовы тэарэмы

$$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon,$$

г.зн.

$$l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon. \tag{12}$$

1. Разгледзім выпадак, калі $l<1$. У гэтым выпадку возьмем $\varepsilon>0$ такім чынам, каб было $l+\varepsilon<1$. Тады паводле (12) будзем мець:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon<1 \qquad \forall n>N.$$

Адсюль згодна з тэарэмай 3 атрымліваем, што ў разглядаемым выпадку даследуемы шэраг (A) збягаецца.

2. Разгледзім цяпер выпадак, калі $l>1$. У гэтым выпадку возьмем ε так, каб было $l-\varepsilon=1$. Тады паводле (12) будзем мець:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>l-\varepsilon=1.$$

Адсюль згодна з тэарэмай 3 атрымліваем, што ў разглядаемым выпадку шэраг (A) разбягаецца.

Прыклад 2. Даследуем на збежнасць лікавы шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$$

Будзем карыстацца прыметай Даламбера ў лімітавай форме.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n n!}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Дадзены лікавы шэраг разбягаецца.

Тэарэма 4 (прымета Кашы)**.** Няхай дадзены дадатны шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \tag{A}$$

Калі для ўсіх дастаткова вялікіх n мае месца няроўнасць

$$\sqrt[n]{a_n}\le q<1, \tag{13}$$

то шэраг (A) збягаецца.

Калі ж

$$\sqrt[n]{a_n}\ge 1, \tag{14}$$

то шэраг (A) разбягаецца.

Доказ. Неабмяжоўваючы агульнасці доказу можна лічыць, што няроўнасці (13) і (14) выконваюцца для ўсіх n (глядзі тэарэму 4 параграфа 1.2).

1. Разгледзім выпадак, калі для ўсіх n выконваецца няроўнасць (13). Згодна з гэтай няроўнасцю будзем мець:

$$a_n \le q^n \qquad \forall n. \tag{15}$$

Разгледзім цяпер шэраг, агульным складнікам якога з'яўляецца правая частка няроўнасці (15), г. зн. шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n. \tag{16}$$

Гэты шэраг з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй з назоўнікам q. Паколькі ў разглядаемым выпадку $0 \le q < 1,$ то шэраг (16) збягаецца. Адсюль і з няроўнасці (15) паводле прыметы параўнання (тэарэма 2) атрымаем, што шэраг (A) у разглядаемым выпадку збягаецца.

2. Разгледзім цяпер выпадак, калі для ўсіх n выконваецца няроўнасць (14). Тады будзем мець:

$$a_n \ge 1 \qquad \forall n.$$

Адсюль вынікае, што агульны складнік шэрагу (A) не імкнецца да нуля, таму ў разглядаемым выпадку шэраг (A) разбягаецца.

Вынік (прымета Кашы ў лімітавай форме). Няхай дадзены дадатны шэраг (A). Калі існуе ліміт

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

то пры $l < 1$ шэраг (A) збягаецца, пры $l > 1$ шэраг разбягаецца, а пры $l = 1$ пытанне аб збежнасці шэрагу застаецца адкрытым.

Доказ. Паводле ўмовы тэарэмы

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N \Rightarrow \left|\sqrt[n]{a_n} - l\right| < \varepsilon,$$

г.зн.

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon. \tag{17}$$

1. Разгледзім выпадак, калі $l < 1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ такім чынам, каб было $l + \varepsilon < 1$. Тады паводле (17) будзем мець

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon < 1.$$

Адсюль згодна з тэарэмай 4 атрымліваем, што ў разглядаемым выпадку шэраг (A) збягаецца.

2. Няхай цяпер $l > 1$. У гэтым выпадку возьмем ε так, каб было $l\text{-}\varepsilon = 1$. Тады паводле (17) будзем мець:

$$\sqrt[n]{a_n} > l - \varepsilon = 1.$$

Адсюль згодна з тэарэмай 4 атрымліваем, што ў разглядаемым выпадку шэраг (A) разбягаецца.

Прыклад 3. Даследуем на збежнасць лікавы шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}.$$

Будзем карыстацца прыметай Кашы ў лімітавай форме.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{-n})^{-n})^{-1}=e^{-1}<1.$$

Робім высновы, што дадзены шэраг збягаецца.

Тэарэма 5 (інтэгральная прымета Кашы)**.** Няхай функцыя $f(x)$ непарыўная, дадатная і ненарастальная на прамежку $[1,+\infty)$. Тады шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{18}$$

збягаецца, калі збягаецца няўласны інтэграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx.$ Калі ж гэты няўласны інтэграл разбягаецца, то і шэраг (18) разбягаецца.

Доказ. Разгледзім адрэзак $[k,k+1]$, дзе k - адвольны натуральны лік. Паколькі функцыя $f(x)$ ненарастае на гэтым адрэзку, то будзем мець:

$$f(k+1)\le f(x)\le f(k) \quad \forall x\in[k,k+1].$$

Адсюль вынікае, што

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx\le\int_k^{k+1} f(x)dx\le\int_k^{k+1} f(k)dx,$$

г.зн.

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1} f(x)dx\le f(k). \tag{19}$$

Возьмем адвольны натуральны лік n і запішам няроўнасць (19) пры $k=1,2,3,...,n-1$:

$$f(2)\le\int_1^2 f(x)dx\le f(1),$$

$$f(3)\le\int_2^3 f(x)dx\le f(2),$$

. . . .

$$f(n)\le\int_{n-1}^{n} f(x)dx\le f(n-1).$$

Калі скласці ўсе гэтыя няроўнасці, то атрымаем

$$f(2)+f(3)+...+f(n)\le\int_1^n f(x)dx\le f(1)+f(2)+...+f(n-1),$$

г.зн.

$$S_n - f(1) \le \int\limits_1^n f(x)dx \le S_{n-1}, \qquad (20)$$

дзе S_n - *n*-ая частковая сума шэрагу (18). Няроўнасць (20) атрымана намі для любога натуральнага n.

1. Разгледзім выпадак, калі няўласны інтэграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ збягаецца, г. зн. калі існуе канечны ліміт

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Тады згодна з азначэннем ліміту функцыі па Гейнэ паслядоўнасць інтэгралаў $\int\limits_1^n f(x)dx$ імкнецца да $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$

Паколькі функцыя $f(x)$ дадатная на прамежку $[1,+\infty)$, то паслядоўнасць інтэгралаў $\int\limits_1^n f(x)dx$ будзе неспадальнай. Але, калі збежная паслядоўнасць з'яўляецца неспадальнай, то ўсе яе элементы не перавышаюць яе ліміт. Таму для ўсіх n будзем мець:

$$\int\limits_1^n f(x)dx \le \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Калі скарыстаць атрыманую няроўнасць і левую частку няроўнасці (20), то атрымаем

$$S_n - f(1) \le \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx,$$

адкуль

$$S_n \le \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx + f(1) \qquad \forall n.$$

Гэтая няроўнасць сведчыць аб тым, што паслядоўнасць частковых сум шэрагу (18) абмежаваная зверху. Таму згодна з тэарэмай 1 шэраг (18) збягаецца.

Першую частку тэарэмы 5 даказалі.

2. Разгледзім цяпер выпадак, калі няўласны інтэграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ разбягаецца.

Паколькі функцыя $f(x)$ з'яўляецца дадатнай на прамежку $[1,+\infty)$, то

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b f(x)dx = +\infty.$$

Улічваючы гэтае, калі скарыстаць азначэнне ліміту функцыі па Гейнэ, атрымліваем, што паслядоўнасць інтэгралаў $\int_1^n f(x)dx$ імкнецца да $+\infty$. Адсюль і правай часткі няроўнасці (20) вынікае, што паслядоўнасць частковых сум шэрагу (18) імкнецца да $+\infty$, г. зн. з'яўляецца разбежнай. Таму шэраг (18) разбягаецца.

Другую частку тэарэмы 5 даказалі.

Прыклад 4. Даследуем на збежнасць лікавы шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{21}$$

дзе α - рэчаісны лік.

Адзначым, што шэраг (21) называецца шэрагам Дырыхле або абагульненым гарманічным шэрагам.

Калі $\alpha \le 0$, то шэраг (21) разбягаецца, бо яго агульны складнік не імкнецца да нуля (глядзі вынік з тэарэмы 3 параграфа 1.2). Здзейснім даследаванне ў выпадку $\alpha > 0$.

Шэраг (21) можна ўявіць у выглядзе (18), калі ўзяць функцыю $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$. У выпадку $\alpha > 0$ гэтая функцыя з'яўляецца дадатнай, непарыўнай і ненарастальнай на прамежку $[1,+\infty)$, таму згодна з тэарэмай 5 шэраг (21) збягаецца або разбягаецца ў залежнасці ад таго, збягаецца або разбягаецца няўласны інтэграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx.$

Як вядома, такі няўласны інтэграл збягаецца пры $\alpha > 1$, а разбягаецца пры $0 < \alpha \le 1$.

Высновы: Шэраг (21) збягаецца пры $\alpha > 1$, а разбягаецца пры $\alpha \le 1$.

Заўвага 2. У тэарэме 5 замест шэрагу (18) можна разглядаць шэраг $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$. Тады замест няўласнага інтэграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ неабходна разглядаць няўласны інтэграл $\int_m^{+\infty} f(x)dx$. Функцыя $f(x)$ мяркуецца дадатнай, непарыўнай і ненарастальнай на прамежку $[m;+\infty]$.

Прыклад 5. Даследуем на збежнасць шэраг

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

Дадзены лікавы шэраг збягаецца або разбягаецца ў залежнасці ад таго, збягаецца ці разбягаецца няўласны інтэграл

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx\,.$$

Даследуем на збежнасць гэты інтэграл.

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln|\ln x|\Big|_2^b=l\lim_{b\to+\infty}im(\ln\ln b-\ln\ln 2)=+\infty.$$

Паколькі разглядаемы няўласны інтэграл разбягаецца, то і дадзены лікавы шэраг разбягаецца.

1.4 Знакачаргавальныя шэрагі

Азначэнне. Шэраг называецца знакачаргавальным, калі яго складнікі маюць па чарзе то дадатныя, то адмоўныя знакі.

Знакачаргавальны шэраг запісваюць у такім выглядзе, каб былі бачны знакі яго складнікаў:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \quad , \tag{1}$$

дзе $a_n > 0 \quad \forall n$.

Для знакачаргавальных шэрагаў мае месца наступная дастатковая прымета збежнасці.

Тэарэма (прымета Лейбніца)**.** Калі складнікі знакачаргавальнага шэрагу, узятыя па модулю, утвараюць спадальную бясконца малую паслядоўнасць, то гэты шэраг збягаецца.

Доказ. Разгледім знакачаргавальны шэраг (1), для якога выконваюцца ўмовы тэарэмы:

$$a_1 > a_2 > a_3 \cdots, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

Дакажам, што дадзены шэраг збягаецца.

1. Разгледзім паслядоўнасць (S_{2k}) частковых сум шэрагу (1) з цотнымі нумарамі.Маем:

$$S_2 = (a_1 - a_2),$$
$$S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4),$$
$$S_6 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6),$$
....

На падставе ўмовы (2) усе рознасці ў круглых скобках з'яўляюцца дадатнымі, таму будзем мець, што

$$0 < S_2 < S_4 < S_6 < \ldots \quad . \tag{4}$$

Гэта сведчыць аб тым, што паслядоўнасць (S_{2k}) з'яўляецца нарастальнай.

Далей заўважым, што

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2k-2} + a_{2k-1} - a_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$$

Адсюль і ўмовы (2) вынікае, што для любога $k \in N$

$$S_{2k} < a_1. \tag{5}$$

Гэта сведчыць аб тым, што паслядоўнасць (S_{2k}) з'яўляецца абмежаванай зверху.

Паколькі паслядоўнасць (S_{2k}) нарастае і абмежаваная зверху, то, як вядома, яна мае канечны ліміт. Абазначым яго праз S:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S. \tag{6}$$

Адзначым, што гэты ліміт S роўны верхняй мяжы мноства $\{S_{2k}\}$.

2. Разгледзім цяпер паслядоўнасць (S_{2k+1}) частковых сум дазенага шэрагу з няцотнымі нумарамі. Заўважым што

$$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}.$$

Адсюль і роўнасці (3) вынікае што

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0 = S.$$

Такім чынам, мы даказалі, што паслядоўнасць частковых сум дадзенага шэрагу з няцотнымі нумарамі таксама мае сваім лімітам лік S.

3. Паколькі паслядоўнасць частковых сум шэрагу з цотнымі нумарамі, а таксама паслядоўнасць частковых сум з няцотнымі нумарамі маюць адзін і той жа ліміт S, то паслядоўнасць (S_n) усіх частковых сум дадзенага шэрагу таксама мае ліміт, роўны ліку S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Гэта сведчыць аб тым, што дадзены шэраг збягаецца, і яго сума роўная S.

Заўвага. Шэраг, для якога выконваюцца умовы даказанай тэарэмы, называецца шэрагам Лейбніца.

Як было вызначана вышэй, сума шэрагу Лейбніца роўная верхняй мяжы мноства $\{S_{2k}\}$. Паколькі лік a_1 абмяжоўвае гэтае мноства зверху, то на падставе азначэння верхняй мяжы лікавага мноства будзем мець, што $S \le a_1$.

Усе элементы мноства $\{S_{2k}\}$ з'яўляюцца дадатнымі, таму і верхняя мяжа гэтага мноства таксама будзе дадатнай, г.зн. $S > 0$.

Такім чынам, мы атрымалі наступную няроўнасць:

$$0 < S \le a_1.$$

Гэтую няроўнасць можна прачытаць наступным чынам: сума S шэрагу Лейбніца дадатная і не перавышае першага складніка гэтага шэрагу.

Атрыманы вынік можна скарыстаць для знаходжання астачы шэрагу Лейбніца. Разгледзім астачу шэрагу Лейбніца пасля n-ага складніка:

$$R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots.$$

Відавочна, што

$$R_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots).$$

Шэраг, які стаіць у круглых скобках, з'яўляецца шэрагам Лейбніца, таму можна выкарыстоўваць атрыманы вышэй вынік. Атрымаем, што сума шэрагу ў дужках з'яўляецца дадатнай і не перавышае a_{n+1}.

Адсюль вынікае, што астача шэрагу Лейбніца пасля n-ага складніка мае знак першага свайго складніка і па абсалютнай велічыні не перавышае яго:

$$|R_n| \le a_{n+1} \quad . \qquad . \qquad (7)$$

Калі заўважыць, што $R_n = S - S_n$, то атрыманыя высновы можна сфармуляваць гэтак: калі суму S шэрагу Лейбніца замяніць яго частковай сумай S_n, то мы атрымаем памылку (памылка – гэта рознасць $S - S_n$), якая мае той жа знак, што і першы адкідваемы складнік, і па модулю не перавышае яго.

Гэтыя высновы маюць вялікае значэнне ў набліжаных вылічэннях пры дапамозе шэрагаў.

Прыклад. Разгледзім лікавы шэраг

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \quad .$$

Гэты шэраг з′яўляецца шэрагам Лейбніца, таму ён збягаецца. Можна даказаць што яго сума роўная $ln2$:

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \quad .$$

Заменім суму гэтага шэрагу сумай яго першых дзевяці складнікаў. Атрымаем набліжаную роўнасць:

$$\ln 2 \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9} \quad .$$

Атрыманая пры гэтым памылка будзе адмоўнай і па модулю не перавышае $\frac{1}{10}$.

Такім чынам, мы можам вылічваць ln2 з любой ступенню дакладнасці.

1.5.Абсалютна і ўмоўна збежныя шэрагі

У дадзеным параграфе мы будзем вывучаць шэрагі, складнікі якіх маюць адвольныя знакі. Для такіх шэрагаў дакажам адну дастатковую прымету збежнасці.

Тэарэма 1. Няхай дадзены шэраг

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad . \tag{1}$$

Разгледзім шэраг

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots , \tag{2}$$

складзены з абсалютных велічынь складнікаў дадзенага шэрагу. Калі шэраг (2) збягаецца , то шэраг (1) таксама збягаецца.

Доказ. Скарыстаем шэраг (1) і пабудуем наступныя два дадатныя шэрагі:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots , \tag{3}$$

дзе

$$b_n = \begin{cases} a_n, & калі \ a_n > 0, \\ 0 \ , & калі \ a_n \le 0, \end{cases}$$

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots , \tag{4}$$

дзе

$$c_n = \begin{cases} |a_n| \ , & калі \ a_n < 0, \\ 0 \ , & калі \ a_n \ge 0. \end{cases}$$

Напрыклад , калі шэраг (1) мае выгляд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\dots,$$

то шэрагі (3) і (4) будуць адпаведна такімі:

$$1+0+\frac{1}{2^2}+0+\frac{1}{2^4}+0+\dots,$$

$$0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2^3}+\dots \quad .$$

Шэраг (3) дамовімся называць шэрагам, які складзены з дадатных складнікаў шэрагу (1). Шэраг (4) дамовімся называць шэрагам, які складзены з модуляў адмоўных складнікаў шэрагу (1).

Спачатку дакажам збежнасць шэрагаў (3) і (4). Заўважым, што для ўсіх n маюць месца няроўнасці:

$$b_n \le |a_n| \ ,$$

$$c_n \le |a_n| \ .$$

Адсюль, калі скарыстаць збежнасць шэрагу (2), на падставе прыметы параўнання атрымаем, што шэрагі (3) і (4) збягаюцца.

Сумы гэтых шэрагаў абазначым адпаведна праз B і C.

Цяпер ужо лёгка даказаць збежнасць дадзенага шэрагу (1). З гэтай мэтай разгледзім n-ую частковую суму шэрагу (1):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Нескладана заўважыць, што:

$$S_n = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) . \tag{5}$$

У круглых дужках мы маем n-ыя частковыя сумы шэрагаў (3) і (4). Пры $n \to \infty$ яны імкнуцца адпаведна да лікаў B і C. Адсюль вынікае, што правая частка, а значыць, і левая частка роўнасці (5) пры $n \to \infty$ імкнецца да ліку $A = B - C$. Гэта сведчыць аб тым, што шэраг (1) збягаецца , і яго сума роўная $A = B - C$.

Пыклад 1. Разгледзім лікавы шэраг

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots \quad . \tag{6}$$

Гэты шэраг збягаецца, бо збягаецца шэраг, які складзены з абсалютных велічынь яго складнікаў:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \quad .$$

Апошні шэраг збягаецца, паколькі ён з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй з назоўнікам $\frac{1}{2}$.

Заўважым, што ў збежнасці шэрагу (6) можна пераканацца і непасрэдна, бо ён з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй з назоўнікам – $\frac{1}{2}$.

Прыклад 2. Разгледзім лікавы шэраг

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots \quad . \tag{7}$$

Гэты шэраг збягаецца, бо збежным будзе шэраг, які складзены з абсалютных велічынь складнікаў шэрагу (7):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \quad .$$

Як было даказана вышэй, са збежнасці шэрагу (2) вынікае збежнасць шэрагу (1). Заўважым аднак, што са збежнасці шэрагу (1), наогул кажучы, не вынікае збежнасць шэрагу (2).

Прыклад 3. Разгледім шэраг

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \quad . \tag{8}$$

Гэты шэраг згодна з тэарэмай Лейбніца збягаецца. Але шераг

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.,$$

які складзены з абсалютных велічынь складнікаў шэрагу (8), разбягаецца. Ён уяўляе сабой гарманічны шэраг.

У сувязі з адзначаным вышэй натуральна ўвесці паняцці абсалютна і ўмоўна збежнага шэрагу.

Азначэнне 1. Шэраг (1) называецца абсалютна збежным шэрагам, калі збягаецца шэраг (2).

Калі ж шэраг (1) збягаецца, а шэраг (2) разбягаецца, то шэраг (1) называецца ўмоўна збежным шэрагам.

Разгледжаныя вышэй шэрагі (6) і (7) з′яўляюцца абсалютна збежнымі. Шэраг (8) збягаецца ўмоўна.

Калі скарыстаць паняцце абсалютнай збежнасці шэрагу,то даказаную вышэй тэарэму 1 можна сфармуляваць наступным чынам.

Тэарэма 1′. Калі шэраг збягаецца абсалютна, то ён збягаецца.

У працэсе доказу тэарэмы 1 мы атрымалі наступны вынік.

Тэарэма 2. Калі шэраг збягаецца абсалютна, то яго сума роўная рознасці паміж сумай шэрагу, складзенага з дадатных складнікаў дадзенага шэрагу, і сумай шэрагу, складзенага з модуляў адмоўных складнікаў дадзенага шэрагу:

$$A=B-C.$$

Прыклад 4. Разгледзім лікавы шэраг

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots \quad . \tag{6}$$

Гэты шэраг збягаецца абсалютна, таму яго сума *A*, роўная рознасці паміж сумамі шэрагаў

$$1+0+\frac{1}{2^2}+0+\frac{1}{2^4}+\ldots \quad ,$$

$$0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2^3}+\ldots.$$

Сума B першага з гэтых шэрагаў роўная $\frac{4}{3}$:

$$B=\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{4}{3} \quad .$$

Сума C другога з гэтых шэрагаў роўная $\frac{2}{3}$:

$$C = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Паводле тэарэмы 2 маем:

$$A = B - C = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Адзначым, што суму А шэрагу (6) можна знайсці і непасрэдна.

$$A = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

Пры даследаванні абсалютнай збежнасці шэрагу (1) мы можам да шэрагу (2) выкарыстоўваць вядомыя прыметы збежнасці дадатных шэрагаў. Аднак прыметы разбежнасці неабходна выкарыстоўваць вельмі асцярожна. Справа ў тым, што калі шэраг (2) нават будзе разбежным, то шэраг (1) можа ўсё-такі збягацца. Але адзначым, што прыметы разбежнасці Даламбера і Кашы мы можам смела выкарыстоўваць. Справа ў тым, што пры іх выканані $|a_n|$, г.зн. агульны складнік шэрагу (2) , не імкнецца да нуля, а тады да нуля не імкнецца і a_n, г. зн. агульны складнік зыходнага шэрагу (1).Таму шэраг (1) разбягаецца (гл. вынік з тэарэмы 3 параграфа 1.2).

Сфармулюем прыметы Даламбера і Кашы.

Тэарэма 3. Калі існуе ліміт

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

то пры $l < 1$ шэраг (1) збягаецца абсалютна, а пры $l > 1$ шэраг (1) разбягаецца.

Тэарэма 4. Калі існуе ліміт

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

то пры $l < 1$ шэраг (1) збягаецца абсалютна, а пры $l > 1$ шэраг (1) разбежны.

Прыклад 5. Разгледзім лікавы шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

Паколькі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

то дадзены шэраг збягаецца абсалютна.

Даследуем цяпер пытанне аб перастаноўцы складнікаў шэрагу.

Тэарэма 5 (тэарэма Дырыхле)**.** Калі шэраг збягаецца абсалютна, то пры любой перастаноўцы яго складнікаў мы атрымаем таксама абсалютна збежны шэраг, які мае тую ж суму, што і зыходны шэраг.

Гэту тэарэму прымаем без доказу.

Такім чынам, абсалютна збежныя шэрагі валодаюць перамяшчальнай уласцівасцю. Узнікае пытанне: ці валодаюць гэтай уласцівасцю ўмоўна збежныя шэрагі? Адказ на гэтае пытанне дае наступная тэарэма , якую прымаем без доказу.

Тэарэма 6 (тэарэма Рымана)**.** Калі шэраг збягаецца ўмоўна, то пры належнай перастаноўцы яго складнікаў мы можам атрымаць шэраг з любой наперад зададзенай сумай, або нават разбежны шэраг.

Разгледзім цяпер пытанне пра множанне шэрагаў.

Азначэнне 2. Няхай дадзены лікавыя шэрагі

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \text{(A)}$$

і

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots . \qquad \text{(B)}$$

Здабыткам шэрагаў (A) і (B) называецца шэраг

$$c_1 + c_2 + c_3 + .. + c_n + \ldots , \qquad \text{(C)}$$

складнікі якога знаходзяцца па наступных формулах:

$$c_1 = a_1 \cdot b_1,$$
$$c_2 = a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Можна даказаць наступную тэарэму.

Тэарэма 7. Калі шэрагі (A) і (B) збягаюцца абсалютна, і іх сумы роўныя адпаведна A і B, то шэраг (C) таксама збягаецца абсалютна, і яго сума С роўная АВ.

$$C = A \cdot B.$$

Мае месца больш агульная тэарэма.

Тэарэма 8. Калі шэрагі (A) і (B) збягаюцца і прынамсі адзін з іх збягаецца абсалютна, то шэраг (C) таксама збягаецца, і яго сума $C = A \cdot B$.

Адзначым, што калі шэрагі(A) і (B) збягаюцца ўмоўна, то іх здабытак, шэраг (C), можа быць нават разбежным шэрагам.

Прыклад 6. Нахай абодва шэрагі (A) і (B) маюць выгляд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots .$$

Гэты шэраг, як лёгка заўважыць збягаецца ўмоўна. Дакажам што здабытак шэрагаў (A) і (B) з′яўляецца разбежным шэрагам.

Даследуем абсалютную велічыню агульнага складніка шэрагу (C):

$$|c_n| = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} =$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Такім чынам, $|c_n| \geq 1 \ \ \forall n$. Адсюль вынікае, што пры $n \to \infty$, а значыць і c_n, не імкнецца да нуля. Таму шэраг (C), г. зн. здабытак шэрагаў (A) і (B) з′яўляецца разбежным.

1.6. Крытэрый Кашы збежнасці лікавага шэрагу

Азначэнне 1. Лікавая паслядоўнасць (x_n) называецца фундаментальнай, калі для яе выконваецца наступная ўмова:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Гэтая ўмова называецца ўмовай Кашы. Лёгка заўважыць ,што ўмову Кашы можна сфармуляваць наступным чынам:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$$

і для ўсіх натуральных лікаў *p* выконваецца няроўнасць

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon .$$

Нагадаем крытэрый Кашы збежнасці лікавай паслядоўнасці.

Тэарэма 1 (крытэрый Кашы збежнасці лікавай паслядоўнасці)**.** Для таго, каб паслядоўнасць (x_n) збягалася, неабходна і дастаткова, каб яна была фундаментальнай, г. зн. каб яна здавальняла ўмове Кашы.

Няхай дадзены лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Збежнасць гэтага шэрагу азначае збежнасць паслядоўнасці яго частковых сум.

Калі скарыстаць сфармуляваны вышэй крытэрый Кашы збежнасці лікавай паслядоўнасці і ўлічыць, што

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k ,$$

то атрымаем наступную тэарэму.

Тэарэма 2 (крытэрый Кашы збежнасці лікавага шэрагу)**.** Для таго, каб шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збягаўся, неабходна і дастаткова, каб для яго выконвалася наступная ўмова

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall \text{ натуральнага } p \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon .$$

2.Функцыйныя паслядоўнасці і шэрагі

2.1. Асноўныя паняцці

I. Няхай X – некаторае лікавае мноства. Калі кожнаму натуральнаму ліку n пастаўлена ў адпаведнасць некаторая пэўная функцыя $S_n(x)$, вызначаная на мностве X, то гавораць, што на мностве X зададзена функцыйная паслядоўнасць

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots \quad . \tag{1}$$

Функцыйную паслядоўнасць (1) абазначаюць наступным чынам: $(S_n(x))$. Прыкладамі функцыйных паслядоўнасцяў з'яўляюцца наступныя паслядоўнасці:

$$sin\,x\ ,sin\,2x,\ sin\,3x,\ \dots,\ sin\,nx,\ \dots,$$

$$x,\ x^2,\ \dots,\ x^n,\ \dots .$$

Гэтыя паслядоўнасці зададзены на прамежку $(-\infty;+\infty)$.

Азначэнне 1. Функцыйная паслядоўнасць (1) называецца збежнай у пункце $x_0 \in X$ або пры $x = x_0$, калі збягаецца наступная лікавая паслядоўнасць $(S_n(x_0))$. Калі ж лікавая паслядоўнасць $(S_n(x_0))$ разбягаецца, то функцыйная паслядоўнасць (1) называецца разбежнай у пункце x_0.

Напрыклад, другая з разгледжаных вышэй функцыйных паслядоўнасцяў відавочна збягаецца ў пункце $\frac{1}{2}$, а разбягаецца ў пункце 2.

Азначэнне 2. Функцыйная паслядоўнасць (1) называецца збежнай на мностве X, калі яна збягаецца ў кожным пункце гэтага мноства. Функцыйная паслядоўнасць (1) называецца збежнай да функцыі $S(x)$ на мностве X, калі ў кожным фіксаваным пункце $x \in X$ выконваецца наступная ўмова:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Пры гэтым функцыя $S(x)$ называецца лімітавай функцыяй функцыйнай паслядоўнасці (1).

Напрыклад , функцыйная паслядоўнасць

$$x,\ x^2,\ \dots,\ x^n,\ \dots$$

збягаецца на прамежку $(-1;1]$. Паколькі

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & калі\ \ -1 < x < 1, \\ 1, & калі\ \ x = 1, \end{cases}$$

то лімітавай функцыяй гэтай паслядоўнасці з'яўляецца наступная функцыя

$$S(x) = \begin{cases} 0, & калі\ \ -1 < x < 1, \\ 1, & калі\ \ x = 1. \end{cases}$$

II. Няхай на мностве X зададзена функцыйная паслядоўнасць

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots .$$

Разгледзім выраз

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \ . \qquad (2)$$

Гэты выраз называецца функцыйным шэрагам. Функцыйны шэраг (2) абазначаюць таксама наступным чынам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\ .$$

Складзем наступныя сумы:

$$
\begin{aligned}
&S_1(x) = u_1(x),\\
&S_2(x) = u_1(x) + u_2(x),\\
&S_3(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Гэтыя сумы называюцца частковымі сумамі шэрагу (2). Частковыя сумы шэрагу (2) утвараюць функцыйную паслядоўнасць $(S_n(x))$.

Азначэнне 3. Функцыйны шэраг (2) называецца збежным у пункце $x_0 \in X$ ці пры $x = x_0$, калі збягаецца наступны лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, г. зн. калі ў разглядаемым пункце збягаецца паслядоўнасць $(S_n(x))$ частковых сум дадзенага шэрагу. Пры гэтым пункт x_0 называецца пунктам збежнасці шэрагу (2).

Функцыйны шэраг (2) называецца разбежным у пункце $x_0 \in X$ ці пры $x = x_0$, калі разбягаецца наступны лікавы шэраг $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, г.зн. калі ў разглядаемым пункце разбягаецца паслядоўнасць $(S_n(x))$ частковых сум дадзенага шэрагу. Пры гэтым пункт x_0 называецца пунктам разбежнасці шэрагу (2).

Азначэнне 4. Мноства ўсіх пунктаў збежнасці шэрагу (2) называецца абсягам збежнасці гэтага шэрагу. Мноства ўсіх пунктаў разбежнасці шэрагу (2) называецца абсягам разбежнасці гэтага шэрагу.

Азначэнне 5. Функцыйны шэраг (2) называецца збежным на мностве X, калі ён збягаецца ў кожным пункце гэтага мноства, г. зн. калі на гэтым мностве збягаецца яго паслядоўнасць частковых сум $(S_n(x))$. Пры гэтым лімітавая функцыя $S(x)$ паслядоўнасці $(S_n(x))$ называецца сумай функцыйнага шэрагу (2).

Калі $S(x)$ з'яўляецца сумай функцыйнага шэрагу (2), то гэты факт запісваюць так:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Аналагічна можна вызначыць абсалютную збежнасць функцыйнага шэрагу у пункце і на мностве.

Прыклад. Разгледзім функцыйны шэраг

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \ldots \qquad . \qquad (3)$$

Пры кожным значэнні *x* дадзены шэраг з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй з назоўнікам *x*. Вядома, што такі шэраг збягаецца, калі $|x| < 1$, і разбягаецца, калі $|x| \ge 1$.

Такім чынам, абсягам збежнасці шэрагу (3) з'яўляецца інтэрвал $(-1;1)$, а абсягам разбежнасці – $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

Сума шэрагу (3) роўная $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots.$$
$$(-1<x<1)$$

Зафіксуем яшчэ раз нашу ўвагу на функцыйным шэрагу (2). Для кожнага натуральнага *n* можна пабудаваць шэраг
$$u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots \quad . \tag{4}$$
Ён будзе збягацца ў кожным пункце збежнасці шэрагу (2). Суму шэрагу (4) абазначым праз $R_n(x)$:
$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$$
і назавём астачай шэрагу (2) пасля n-га складніка.

У кожным пункце збежнасці шэрагу (2) мае месца наступная роўнасць:
$$R_n(x)=S(x)-S_n(x),$$
г. зн
$$S(x)=S_n(x)+R_n(x). \tag{5}$$
Адсюль вынікае, што ў кожным пункце збежнасці шэрагу (2) мае месца роўнасць
$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0. \tag{6}$$

Заўвага. Калі дадзены функцыйны шэраг (2), то заўсёды можна пабудаваць паслядоўнасць яго частковых сум
$$S_1(x),S_2(x),\ldots,S_n(x),\ldots \tag{1}$$
І наадварот, калі дадзена якая-небудзь функцыйная паслядоўнасць (1), то заўсёды можна пабудаваць такі функцыйны шэраг, для якога гэтая паслядоўнасць з'яўляецца палядоўнасцю яго частковых сум. Складнікі гэтага шэрагу знаходзяцца па формулах:
$$u_1(x)=S_1(x),$$
$$u_2(x)=S_2(x)-S_1(x),$$
$$u_3(x)=S_3(x)-S_2(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Такі шэраг мае выгляд
$$S_1(x)+(S_2(x)-S_1(x))+(S_3(x)-S_2(x))+\ldots+(S_n(x)-S_{n-1}(x))+\ldots\ . \tag{2}$$
Такім чынам, ад функцыйнага шэрагу (2) мы заўсёды можам перайсці да функцыйнай паслядоўнасці (1) і наадварот, ад функцыйнай паслядоўнасці (1) можам перайсці да функцыйнага шэрагу (2).

Магчымасць такога пераходу мае вялікае значэнне. Справа ў тым, што многія пытанні мы будзем вывучаць для функцыйных паслядоўнасцяў, а затым, скарыстаўшы пераход, мы будзем пераносіць атрыманыя вынікі на функцыйныя шэрагі. Іншыя пытанні мы будзем вывучаць для функцыйных шэрагаў, а затым, скарыстаўшы адназначны пераход, будзем пераносіць атрыманыя вынікі на функцыйныя паслядоўнасці.

2.2. Раўнамерная збежнасць функцыйнай паслядоўнасці і функцыйнага шэрагу

Няхай на мностве X зададзена функцыйная паслядоўнасць
$$S_1(x),S_2(x),\ldots,S_n(x),\ldots \quad . \tag{1}$$

У папярэднім параграфе было ўведзена паняцце збежнасці дадзенай паслядоўнасці да функцыі $S(x)$ на мностве X .

Азначэнне 1. Функцыйная паслядоўнасць (1) называецца збежнай да функцыі $S(x)$ на мностве X , калі ў кожным фіксаваным пункце $x \in X$ выконваецца ўмова

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

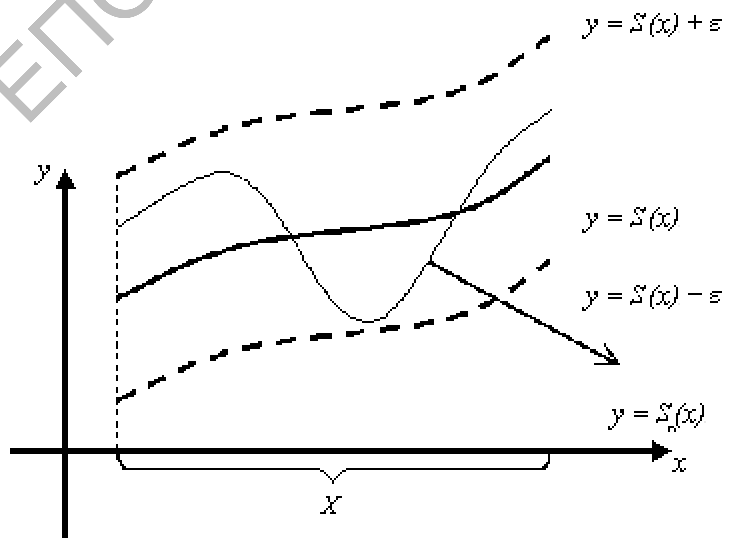
Гэтае азначэнне можна сфармуляваць і гэтак. Функцыйная паслядоўнасць (1) называецца збежнай да функцыі $S(x)$ на мностве X , калі для кожнага фіксаванага пункта $x \in X$ выконваецца наступная ўмова: для любога дадатнага ліку ε існуе такі нумар N (які злежыць ад ε і ад x), што для ўсіх $n > N$ выконваецца няроўнасць $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, дзе x – той пкункт, які быў зафіксаваны.

У гэтым азначэнні важным з'яўляецца тое, што N залежыць ад ε і, наогул кажучы, ад x .

Азначэнне 2. Няхай функцыйная паслядоўнасць (1) збягаеццца да функцыі $S(x)$ на мностве X . Дадзеная паслядоўнасць называецца раўнамерна збежнай да функцыі $S(x)$ на мностве X , калі для любога дадатнага ліку ε існуе такі нумар N (які залежыць ад ε, але не залежыць ад x), што для ўсіх $n > N$ і для ўсіх $x \in X$ выконваецца няроўнасць $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

У гэтым азначэнні важным з'яўляецца тое, што N залежыць ад ε , але не залежыць ад x .

Геаметрычны сэнс азначэння 2 заключаецца ў наступным: функцыйная паслядоўнасць (1) называецца раўнамерна збежнай да функцыі $S(x)$ на мностве X , калі якой бы ні была паласа, абмежаваная крывымі $y = S(x) + \varepsilon, y = S(x) - \varepsilon,$ заўсёды можна знайсці такі нумар N , што для ўсіх $n > N$ і $\forall x \in X$ графікі функцый $y = S_n(x)$ трапляюць у разглядаемую паласу (рыс. 1).



Рыс.1

Прыклад 1. Разгледзім функцыйную паслядоўнасць $(S_n(x) = x^n)$ на адрэзку $[0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & калі \quad 0 \le x < 1, \\ 1, & калі \quad x = 1. \end{cases}$$

Такім чынам, дадзеная функцыйная паслядоўнасць на адрэзку $[0,1]$ збягаецца да лімітавай функцыі

$$S(x) = \begin{cases} 0, & калі \quad 0 \le x < 1, \\ 1, & калі \quad x = 1. \end{cases}$$

Аднак гэтая збежнасць не з'яўляецца раўнамернай, у чым нескладана пераканацца пры дапамозе геаметрычных разважанняў.

Адзначым, што на паўінтэрвале $[0,1)$ збежнасць таксама не з'яўляецца раўнамернай. Аднак на адрэзку $\left[0, \frac{99}{100}\right]$ збежнасць будзе раўнамернай.

Азначэнне 3. Чабышоўскай адлегласцю паміж функцыямі $S_n(x)$ і $S(x)$ на мностве X называецца велічыня $\rho_n = \sup\limits_{x\in X} \left|S_n(x) - S(x)\right|$.

Адзначым, што калі $\left|S_n(x) - S(x)\right|$ дасягае на мностве X найбольшага значэння, то ρ_n будзе гэтым найбольшым значэннем.

Тэарэма 1. Для таго, каб функцыйная паслядоўнасць (1) раўнамерна збягалася да функцыі $S(x)$ на мностве X, неабходна і дастаткова, каб выконвалася ўмова

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0.$$

Доказ. Неабходнасць. Згодна з умовай тэарэмы паслядоўнасць (1) раўнамерна збягаецца да функцыі $S(x)$ на мностве X. Гэта азначае, што для любога дадатнага ліку ε існуе такі нумар $N(\varepsilon)$, што $\forall n > N$ і $\forall x \in X$ выконваецца няроўнасць $\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$.

Адсюль вынікае, што $\sup\limits_{x\in X} \left|S_n(x) - S(x)\right| \le \varepsilon$, г. зн. $\rho_n \le \varepsilon \quad \forall n > N$.

Такім чынам, мы даказалі, што $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$, што $\forall n > N$ выконваецца няроўнасць $\rho_n \le \varepsilon$. Гэтае і сведчыць аб тым, што $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Дастатковасць. Паводле тэарэмы $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Гэта значыць, што $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n > N \Rightarrow \rho_n < \varepsilon$, г. зн.

$$\sup_{x\in X} \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon.$$

Адсюль вынікае $\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in X$ і $\forall n > N$.

Такім чынам, мы даказалі, што

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n > N,\ \forall x \in X \Rightarrow \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon.$$

Гэта і сведчыць аб тым, што паслядоўнасць (1) раўнамерна збягаецца да $S(x)$ на мностве X.

Вернемся зноў да прыкладу 1. Маем

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,1]} \left|S_n(x) - S(x)\right| = 1 .$$

Паколькі $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1 \neq 0$, то разглядаемая функцыйная паслядоўнасць на адрэзку $[0,1]$ збягаецца да лімітавай функцыі нераўнамерна.

Маем

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,\frac{99}{100}]} \left|S_n(x) - S(x)\right| = (\frac{99}{100})^n .$$

Паколькі $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$, то разглядаемая функцыйная паслядоўнасць на адрэзку $[0,\frac{99}{100}]$ збягаецца да лімітавай функцыі раўнамерна.

Прыклад 2. Разгледзім паслядоўнасць функцый

$$(S_n(x) = \frac{1}{x+n}) ,$$

зададзеную на прамежку $[0,+\infty)$.

Маем

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0 \quad \forall x \in [0,+\infty) .$$

Такім чынам, разглядаемая паслядоўнасць на прамежку $[0,+\infty)$ збягаецца да лімітавай функцыі $S(x) = 0$.

Высветлім, ці будзе гэтая збежнасць раўнамернай.

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|S_n(x) - S(x)\right| = \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} .$$

Паколькі $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то дадзеная функцыйная паслядоўнасць на прамежку $[0,+\infty)$ збягаецца да лімітавай функцыі раўнамерна.

Азначэнне 4. Няхай функцыйны шэраг

$$u_1(x) + u_2(x) + \ \dots + u_n(x) + \ \dots \qquad (2)$$

збягаецца на мностве X, $S(x)$ – яго сума. Калі паслядоўнасць частковых сум шэрагу (2) раўнамерна збягаецца да $S(x)$ на мностве X, то функцыйны шэраг (2) называецца раўнамерна збежным на мностве X функцыйным шэрагам.

Зыходзячы з функцыйных паслядоўнасцяў, якія былі разгледжаны ў прыкладах 1 і 2, мы можам пабудаваць наступныя шэрагі:

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ \dots \quad ,$$

$$\frac{1}{x+1} + (\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}) + (\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2}) + \ \dots \quad .$$

Першы з гэтых функцыйных шэрагаў на адрэзку $[0,1]$ збягаецца нераўнамерна, а на адрэзку $[0,\frac{99}{100}]$ – раўнамерна. Другі функцыйны шэраг збягаецца раўнамерна на прамежку $[0,+\infty)$.

Тэарэма 2 (тэарэма Вейерштраса). Няхай дадзены функцыйны шэраг

$$u_1(x)+u_2(x)+\ \dots\ +u_n(x)+\ \dots \tag{2}$$

Калі існуе такі збежны дадатны лікавы шэраг

$$a_1+a_2+a_3+\ \dots\ +a_n+\ \dots, \tag{3}$$

што для ўсіх $x \in X$ выконваюцца няроўнасці

$$|u_n(x)| \le a_n \quad (\text{n=1,2, ...}), \tag{4}$$

то функцыйны шэраг (2) абсалютна і раўнамерна збягаецца на мностве X .

Калі выконваюцца няроўнасці (4), то шэраг (3) называецца мажарантным для шэрагу (2) на мностве X .

Доказ. У абсалютнай збежнасці шэрагу (2) на мностве X лёгка пераканацца пры дапамозе прыметы параўнання дадатных шэрагаў, калі пры гэтым скарыстаць няроўнасць (4) і збежнасць шэрагу (3).

Дакажам зараз раўнамерную збежнасць шэрагу (2) на мностве X .

Спачатку ацэнім астачу шэрагу (2) пасля n-га складніка

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ \dots\ .$$

На падставе (4) $\forall x \in X$ будзем мець:

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ \dots\ +u_{n+m}(x)| \le\\ &\le |u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\ \dots\ +|u_{n+m}(x)| \le\\ &\le a_{n+1}+a_{n+2}+\ \dots\ +a_{n+m}.\end{aligned}$$

Калі ў гэтай няроўнасці перайсці да ліміту пры $m \to \infty$, то атрымаем

$$|R_n(x)| \le r_n,$$

дзе $r_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\ \dots$ – астача шэрагу (3) пасля n-га складніка.

Апошнюю няроўнасць можна запісаць і гэтак:

$$|S(x)-S_n(x)| \le r_n,$$

дзе $S(x)$ – сума шэрагу (2), а $S_n(x)$ – яго n-ая частковая сума.

Гэтая няроўнасць мае месца для ўсіх $x \in X$, таму з яе вынікае, што

$$\sup_{x\in X}|S(x)-S_n(x)| \le r_n,$$

г.зн.

$$0 \le \rho_n \le r_n. \tag{5}$$

Паколькі шэраг (3) збягаецца, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Адсюль і няроўнасці (5) на падставе тэарэмы пра ліміт прамежкавай паслядоўнасці атрымліваем, што $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = 0$. Гэта і сведчыць аб тым, што шэраг (2) раўнамерна збягаецца на мностве X (гл. тэарэму 1).

Прыклад 3. Разгледзім функцыйны шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\ nx}{n^2}.$$

Паколькі $\left|\dfrac{\cos\ nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $(n = 1, 2,\ \ldots)$, і шэраг $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ збягаецца, то дадзены функцыйны шэраг збягаецца абсалютна і раўнамерна на прамежку $(-\infty; +\infty)$.

Вернемся яшчэ раз да паслядоўнасці функцый з прыкладу 1, г. зн. да паслядоўнасці $(S_n(x) = x^n)$. Кожны элемент паслядоўнасці – непарыўная на адрэзку $[0,1]$ функцыя. На гэтым адрэзку дадзеная паслядоўнасць збягаецца да лімітавай функцыі $S(x) = \begin{cases} 0, & калі\ \ 0 \le x < 1, \\ 1, & калі\ \ x = 1. \end{cases}$ нераўнамерна. Лімітавая функцыя не з’яўляецца непарыўнай на адрэзку $[0,1]$ (яна мае разрыў у пункце1).

Узнікае пытанне: пры якіх умовах паслядоўнасць непарыўных функцый збягаецца да непарыўнай функцыі?

Тэарэма 3. Калі паслядоўнасць функцый

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots\ ,$$

непарыўных на прамежку X, раўнамерна збягаецца да функцыі $S(x)$ на гэтым прамежку, то лімітавая функцыя $S(x)$ непарыўная на прамежку X.

Доказ. Трэба даказаць, што лімітавая функцыя $S(x)$ з’яўляецца непарыўнай у кожным пункце прамежку X. Возьмем адвольны пункт $x_0 \in X$ і дакажам, што функцыя $S(x)$ непарыўная ў гэтым пункце.

Возьмем адвольны лік $\varepsilon > 0$. Паслядоўнасць (1) раўнамерна збягаецца да функцыі $S(x)$ на прамежку X, таму для ліку $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$ існуе такі нумар N, што $\forall n > N$ і $\forall x \in X$ выконваецца няроўнасць

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ . \tag{6}$$

Зафіксуем цяпер які-небудзь нумар $n > N$ і разгледзім функцыю $S_n(x)$ з гэтым нумарам. Паколькі згодна з умовай тэарэмы функцыя $S_n(x)$ непарыўная ў пункце x_0, то для ліку $\dfrac{\varepsilon}{3} > 0$

$$\exists \delta > 0,\ \forall x,\ \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|S_n(x) - S_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ . \tag{7}$$

Скарыстаем няроўнасць

$$\left|S(x) - S(x_0)\right| \le \left|S(x) - S_n(x)\right| + \left|S_n(x) - S_n(x_0)\right| + \left|S_n(x_0) - S(x_0)\right|.$$

Паводле (6) першы і трэці складнікі меншыя $\dfrac{\varepsilon}{3}$. Паводле (7) другі складнік таксама меншы $\dfrac{\varepsilon}{3}$ для ўсіх x, якія задавальняюць умове $\left|x - x_0\right| < \delta$. Адсюль вынікае, што

$$\left|S(x) - S(x_0)\right| < \varepsilon$$

для ўсіх x, якія задавальняюць умове $\left|x - x_0\right| < \delta$.

Такім чынам, мы даказалі, што

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta\Rightarrow|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon.$$

Гэта і сведчыць аб тым, што функцыя $S(x)$ непарыўная ў пункце x_0.

З даказанай тэарэмы 3 вынікае тэарэма 3'.

Тэарэма 3'. Калі ўсе складнікі функцыйнага шэрагу

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

непарыўныя на прамежку X, і дадзены шэраг раўнамерна збягаецца на гэтым прамежку, то яго сума $S(x)$ будзе непарыўнай на прамежку X.

Вывучым цяпер пытанне пра лімітавы пераход пад знакам інтэграла, а таксама пра пакладовае інтэграванне і дыферэнцаванне шэрагу.

Тэарэма 4. Калі паслядоўнасць функцый (1), непарыўных на адрэзку $[a,b]$, раўнамерна збягаецца да функцыі $S(x)$ на гэтым адрэзку, то мае месца наступная роўнасць:

$$\int_a^b S(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx, \tag{8}$$

г.зн.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\int_a^b(\lim_{n\to\infty}S_n(x))dx.$$

Гавораць, што магчымы лімітавы пераход пад знакам інтэграла.

Доказ. Заўважым, што кожны з разглядаемых інтэгралаў існуе, бо падынтэгральныя функцыі непарыўныя на адрэзку $[a,b]$.

Дакажам цяпер роўнасць (8). Трэба даказаць, што лік $\int_a^b S(x)dx$ з'яўляецца лімітам лікавай паслядоўнасці $(\int_a^b S_n(x)dx)$.

Возьмем адвольны лік $\varepsilon>0$. Згодна з умовай тэарэмы функцыйная паслядоўнасць (1) раўнамерна збягаецца да $S(x)$ на адрэзку $[a,b]$, таму для ліку $\frac{\varepsilon}{b-a}>0$ існуе такі нумар N, што

$$\forall n>N,\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Улічваючы гэта, для $\forall n>N$ будзем мець:

$$\left|\int_a^b S_n(x)dx-\int_a^b S(x)dx\right|=\left|\int_a^b(S_n(x)-S(x))dx\right|\le$$

$$\le\int_a^b|S_n(x)-S(x)|dx<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon.$$

Такім чынам, мы даказалі, што

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N\Rightarrow\left|\int_a^b S_n(x)dx-\int_a^b S(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Гэта і сведчыць аб тым, што лік $\int_a^b S(x)dx$ з'яўляецца лімітам лікавай паслядоўнасці $(\int_a^b S_n(x)dx)$. Роўнасць (8) даказалі.

Заўвага. Калі паслядоўнасць (1) збягаецца на адрэзку $[a,b]$ да функцыі $S(x)$ нераўнамерна, то роўнасць (8) можа і не мець месца.

З тэарэмы 4 вынікае

Тэарэма 4'. Калі ўсе складнікі функцыйнага шэрагу (2)

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

непарыўныя на адрэзку $[a,b]$, і дадзены шэраг раўнамерна збягаецца на гэтым адрэзку, то мае месца наступная роўнасць:

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx,$$

г.зн.

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx, \qquad (9)$$

дзе $S(x)$ - сума шэрагу (2).

Пры гэтым гавораць, што на адрэзку $[a,b]$ магчыма паскладовае інтэграванне шэрагу (2).

Доказ. На падставе тэарэмы 4 мае месца роўнасць (8):

$$\int_a^b S(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx,$$

дзе $S(x)$ - сума шэрагу 2, $S_n(x)$ - яго n-ая частковая сума. Пераўтворым правую частку гэтай роўнасці.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b (\sum_{k=1}^{n} u_k(x))dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

З роўнасці (8) і атрыманай вышэй роўнасці і вынікае роўнасць (9).

Тэарэма 5. Няхай функцыйны шэраг (2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збягаецца на адрэзку $[a,b]$ і $S(x)$ – яго сума. Калі складнікі дадзенага шэрагу маюць на адрэзку $[a,b]$ непарыўныя вытворныя, і шэраг

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \qquad (10)$$

раўнамерна збягаецца на гэтым адрэзку, то функцыя $S(x)$ з'яўляецца дыферэнцавальнай у кожным пункце $[a,b]$, і ўсюды на гэтым адрэзку мае месца роўнасць

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x),$$

г.зн.

$$(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x). \qquad (11)$$

Пры гэтым гавораць, што ў кожным пункце адрэзку $[a,b]$ магчыма паскладовае дыферэнцаванне шэрагу (2).

Доказ. Суму шэрагу (10) абазначым праз $\sigma(x)$:

$$\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{'}(x).$$

Адзначым, што функцыя σ (x) непарыўная на адрэзку $[a,b]$, што лёгка даказаць пры дапамозе тэарэмы 3'.

Няхай x – адвольны пункт адрэзку $[a,b]$. Скарыстаем тэарэму 4' пра паскладовае інтэграванне функцыйнага шэрагу і атрымаем

$$\int_a^x \sigma(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n^{'}(x)dx. \qquad (12)$$

Паколькі паводле формулы Ньютана-Лейбніца $\int_a^x u_n^{'}(x)dx=u_n(x)-u_n(a)$, то роўнасць (12) можа быць запісана ў наступным выглядзе:

$$\int_a^x \sigma(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n(x)-u_n(a)),$$

г.зн.

$$\int_a^x \sigma(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a),$$

г.зн.

$$\int_a^x \sigma(x)dx=S(x)-S(a),$$

адкуль

$$S(x)=\int_a^x \sigma(x)dx+S(a). \qquad (13)$$

Паколькі функцыя σ (x) непарыўная на адрэзку $[a,b]$, то функцыя $\int_a^x \sigma(x)dx$ будзе дыферэнцавальнай у кожным пункце адрэзка $[a,b]$, прычым усюды на гэтым адрэзку

$$(\int_a^x \sigma(x)dx)'=\sigma(x).$$

Адсюль і з роўнасці (13) вынікае, што функцыя $S(x)$ будзе дыферэнцавалнай у кожным пункце адрэзку $[a,b]$, прычым усюды на гэтым адрэзку

$$S'(x)=(\int_a^x \sigma(x)dx)'+(S(a))'=\sigma(x)+0=\sigma(x).$$

Апошнюю роўнасць можна запісаць у наступным выглядзе:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

2.3 Ступеневыя шэрагі

Азначэнне 1. Ступеневым шэрагам называецца функцыйны шэраг выгляду

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

або больш агульнага выгляду

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (2)$$

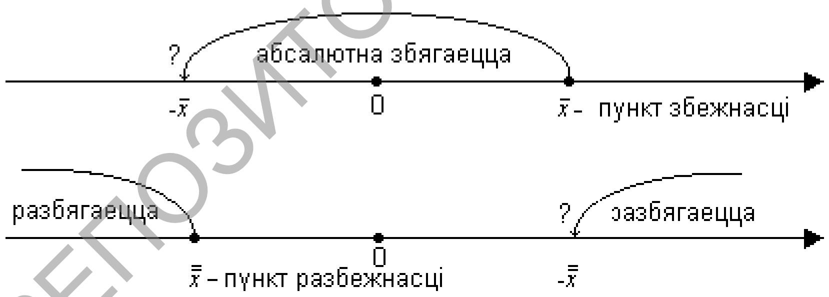
дзе a, c_0, c_1, c_2, …– рэчаісныя лікі.

Лікі c_0, c_1, c_2, … называюцца каэфіцыентамі ступеневага шэрагу.

Адзначым, што ступеневы шэраг (2) можна звесці да выгляду (1) пры дапамозе падстаноўкі $(x-a) = X$. Таму вывучэнне ступеневых шэрагаў (2) зводзіцца да вывучэння ступеневых шэрагаў выгляду (1).

У дадзеным параграфе вывучым структуру абсягу збежнасці ступеневага шэрагу (1). Папярэдне дакажам наступную тэарэму.

Тэарэма 1 (тэарэма Абеля)**.** Калі ступеневы шэраг (1) збягаецца пры значэнні $x = \overline{x} \neq 0$, то ён абсалютна збягаецца пры ўсіх значэннях x, якія задавальняюць умове $|x| < |\overline{x}|$. Калі ступеневы шэраг (1) разбягаецца пры значэнні $x = \overline{\overline{x}}$, то ён разбягаецца таксама пры ўсіх значэннях x, якія задавальняюць умове $|x| > |\overline{\overline{x}}|$.



Рыс. 2

Доказ. I. Няхай ступеневы шэраг (1) збягаецца пры значэнні $x = \overline{x} \neq 0$, г.зн. збягаецца наступны лікавы шэраг *x*

$$c_0 + c_1\overline{x} + c_2\overline{x}^2 + \ldots + c_n\overline{x}^n + \ldots.$$

Адсюль вынікае, што

$$\lim_{n\to\infty} c_n \overline{x}^n = 0.$$

Паколькі паслядоўнасць ($c_n\overline{x}^n$) збягаецца, то яна будзе абмежаванай. Гэта азначае, што

$$\exists M > 0, \forall n \Rightarrow \left|c_n \overline{x}^n\right| \leq M. \qquad (3)$$

Разгледзім адвольнае значэнне x, якое задавальняе ўмове

$$|x| < |\overline{x}|, \qquad (4)$$

і дакажам, што пры гэтым значэнні x ступеневы шэраг (1) абсалютна збягаецца, г.зн. збягаецца шэраг

$$|c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \ldots + |c_n x^n| + \ldots . \tag{5}$$

З гэтай мэтай разгледзім агульны складнік шэрагу (5).

$$|c_n x^n| = \left| c_n \bar{x}^n \left(\frac{x}{\bar{x}} \right)^n \right| = |c_n \bar{x}^n| \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^n \le M \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|^n .$$

Такім чынам, мы даказалі, што для ўсіх n мае месца наступная няроўнасць:

$$|c_n x^n| \le M q^n , \tag{6}$$

дзе $q = \left| \frac{x}{\bar{x}} \right|$. Згодна з няроўнасцю (4) $0 \le q < 1$. Паколькі пры $0 \le q < 1$ шэраг $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ збягаецца (гэты шэраг з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй), то скарыстаўшы няроўнасць (6) і прымету параўнання, атрымліваем, што шэраг (5) таксама збягаецца. Гэта сведчыць аб тым, што пры разглядаемым значэнні x шэраг (1) абсалютна збягаецца.

II. Няхай ступеневы шэраг (1) разбягаецца пры $x = \bar{\bar{x}}$. Дакажам, што ён разбягаецца таксама пры любым значэнні x, якое задавальняе ўмове $|x| > |\bar{\bar{x}}|$.

Мяркуем працілеглае, няхай пры некаторым значэнні $x = x'$, якое задавальняе ўмове $|x'| > |\bar{\bar{x}}|$, ступеневы шэраг (1) збягаецца. Тады згодна з першай часткай тэарэмы мы атрымаем, што ступеневы шэраг будзе абсалютна збягацца пры значэнні $x = \bar{\bar{x}}$, што супярэчыць умове.

Пяройдзем цяпер да даследавання структуры абсягу збежнасці ступеневага шэрагу (1). Спачатку адзначым, што кожны шэраг выгляду (1) збягаецца ў пункце $x = 0$. Аднак існуюць такія ступеневыя шэрагі, якія збягаюцца толькі ў пункце $x = 0$, а ў астатніх пунктах лікавай восі разбягаюцца.

Прыклад 1. Разгледзім ступеневы шэраг

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n .$$

Гэты шэраг збягаецца ў пункце $x = 0$. Аднак у любым пункце $x \ne 0$ ён разбягаецца, у чым лёгка пераканацца пры дапамозе прыметы Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = +\infty .$$

Існуюць таксама такія ступеневыя шэрагі, якія абсалютна збягаюцца на ўсёй лікавай восі.

Прыклад 2. Разгледзім ступеневы шэраг

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Гэты шэраг абсалютна збягаецца на ўсёй лікавай восі, у чым лёгка пераканацца пры дапамозе прыметы Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 \qquad \forall x.$$

Поўную яснасць аб структуры абсягу збежнасці ступеневага шэрагу дае наступная тэарэма.

Тэарэма 2. Для любога ступеневага шэрагу (1) праўдзівым з'яўляецца адно з наступных трох сцвярджэнняў:

1. Шэраг разбягаецца ўсюды, акрамя пункта $x = 0$.
2. Шэраг абсалютна збягаецца на ўсёй лікавай восі.
3. Існуе такі лік $R > 0$, што пры $|x| < R$ шэраг збягаецца абсалютна, а пры $|x| > R$ шэраг разбягаецца.

Доказ. Ступеневы шэраг (1) можа збягацца толькі ў пункце $x = 0$, а можа збягацца і ў пунктах, якія адрозныя ад нуля. У першым выпадку мае месца першае сцвярджэнне. Дакажам, што ў другім выпадку мае месца адно з двух апошніх сцвярджэнняў тэарэмы.

Няхай сярод тых пунктаў $\bar{x}$, у якіх шэраг (1) збягаецца, маюцца адрозныя ад нуля пункты. Разгледзім мноства модуляў тых пунктаў $\bar{x}$, у якіх шэраг збягаецца: $\{|\bar{x}|\}$. Гэтае мноства можа быць ці абмежаваным зверху, ці неабмежаваным.

а) Разгледзім выпадак, калі мноства $\{|\bar{x}|\}$ будзе неабмежаваным зверху. Дакажам, што ў гэтым выпадку мае месца сцвярджэнне 2.

Няхай x – адвольны пункт лікавай восі. Паколькі мноства $\{|\bar{x}|\}$ з'яўляецца неабмежаваным зверху, то знойдзецца такі пункт $\bar{x}$, што $|x| < |\bar{x}|$. У пункце $\bar{x}$ шэраг збягаецца, таму згодна з тэарэмай Абеля атрымліваем, што ён абсалютна збягаецца і ў разглядаемым пункце x.

Такім чынам, мы даказалі, што ў разглядаемым выпадку ступеневы шэраг абсалютна збягаецца ў кожным пункце x лікавай восі, г.зн. мае месца сцвярджэнне 2.

б) Разгледзім цяпер выпадак, калі мноства $\{|\bar{x}|\}$ з'яўляецца абмежаваным зверху. Дакажам, што ў гэтым выпадку мае месца сцвярджэнне 3.

Паколькі мноства $\{|\bar{x}|\}$ з'яўляецца абмежаваным зверху, то яно мае канечную верхнюю мяжу. Абазначым яе праз $R = \sup\{|\bar{x}|\}$. Лёгка заўважыць, што $0 < R < +\infty$.

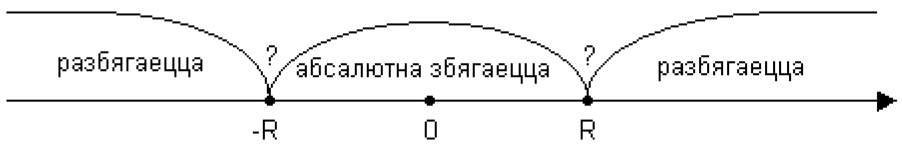
Разгледзім адвольны пункт x, які задавальняе ўмове $|x| > R$. Зразумела, што гэты пункт не змяшчаецца сярод пунктаў $\bar{x}$. Таму ў разглядаемым пункце x шэраг (1) разбягаецца.

Разгледзім цяпер адвольны пункт x, які задавальняе ўмове $|x| < R$. Тады згодна з азначэннем верхняй мяжы лікавага мноства абавязкова знойдзецца такі пункт $\bar{x}$, што $|x| < |\bar{x}| \le R$. У пункце $\bar{x}$ шэраг (1) збягаецца, таму паводле тэарэмы Абеля ен абсалютна збягаецца і ў разглядаемым пункце x.

Такім чынам, мы даказалі, што ў разглядаемым выпадку існуе такі лік $R > 0$, што $\forall x$, якія задавальняюць умове $|x| > R$, шэраг (1) разбягаецца, а для ўсіх x, якія задавальняюць умове $|x| < R$, шэраг (1) збягаецца абсалютна, г. зн. мае месца сцвярджэнне 3.

Азначэнне 2. Лік $R > 0$, пра які ідзе размова ў тэарэме 2, называецца радыусам збежнасці ступеневага шэрагу (1). Такім чынам, радыусам збежнасці ступеневага шэрагу (1) называецца такі лік $R>0$, які валодае той уласцівасцю, што пры $|x|<R$ дадзены шэраг абсалютна збягаецца, а пры $|x|>R$ ён разбягаецца.

Інтэрвал $(-R,R)$ называецца інтэрвалам збежнасці ступеневага шэрагу (1). Значыць ступеневы шэраг (1) абсалютна збягаецца ў інтэрвале $(-R,R)$, у пунктах $\pm R$ пытанне аб збежнаці шэрагу застаецца адкрытым, ён можа збягацца, а можа разбягацца. У астатніх пунктах лікавай восі ступеневы шэраг разбягаецца (рыс.3).



Рыс.3

Заўвага 1. У мэтах большай агульнасці ступеневым шэрагам, якія збягаюцца толькі ў пункце $x=0$, а таксама ступеневым шэрагам, якія абсалютна збягаюцца ўсюды, прыпісваюць радыус і інтэрвал збежнасці.

У першым выпадку гавораць, што радыус збежнасці $R=0$, а інтэрвал збежнасці складаецца з аднаго пункта $x=0$. У другім выпадку гавораць, што радыус збежнасці $R=+\infty$, а інтэрвал збежнасці – прамежак $(-\infty,+\infty)$.

Такім чынам, згодна з тэарэмай 2 і заўвагай 1 любы ступеневы шэраг (1) мае радыус і інтэрвал збежнасці.

Пытанне пра структуру абсягу збежнасці ступеневага шэрагу (1) даследавана цалкам. Абсяг збежнасці ступеневага шэрагу (1) складаецца з аднаго толькі пункта $x=0$ або з'яўляецца адным з наступных прамежкаў: $(-R,R)$, $[-R,R]$, $(-R,R]$, $[-R,R)$.

Разгледзім цяпер пытанне вылічэння радыуса збежнасці і інтэрвала збежнасці ступеневага шэрагу. Растлумачым гэта на наступным прыкладзе.

Прыклад 3. Знойдзем радыус збежнасці, інтэрвал збежнасці і абсяг збежнасці ступеневага шэрагу

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n}.$$

Будзем карыстацца прыметай Даламбера. Вылічым

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}n}{(n+1)2^n x^n}\right| = 2|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 2|x|.$$

Паводле прыметы Даламбера дадзены шэраг абсалютна збягаецца, калі $2|x|<1$, г.зн. $|x|<\frac{1}{2}$, разбягаецца, калі $2|x|>1$, г.зн. $|x|>\frac{1}{2}$. Радыус збежнасці роўны $R=\frac{1}{2}$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ – інтэрвал збежнасці.

Даследуем збежнасць дадзенага шэрагу на канцах інтэрвала збежнасці. У пункце $x=-\frac{1}{2}$ атрымліваем лікавы шэраг $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, які разбягаецца. У пункце $x=\frac{1}{2}$ атрымліваем знакачаргавальны шэраг $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, які збягаецца ўмоўна.

Такім чынам, абсягам збежнасці разглядаемага шэрагу з'яўляецца прамежак $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

Заўвага 2. Інтэрвал збежнасці шэрагу 2 мае выгляд $(a-R, a+R)$.

2.4. Раўнамерная збежнасць ступеневага шэрагу

Тэарэма 1. Ступеневы шэраг

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + \dots \qquad (1)$$

раўнамерна збягаецца на кожным адрэзку, які ляжыць унутры яго інтэрвалу збежнасці $(-R;R)$.

Доказ. Разгледзім адвольны адрэзак $[-r;r]$, які сіметрычны адносна пункта 0 і ляжыць унутры інтэрвалу збежнасці $(-R;R)$. Дакажам што шэраг (1) раўнамерна збягаецца на гэтым адрэзку.

Пункт r належыць інтэрвалу збежнасці шэрагу (1), таму ў гэтым пункце шэраг (1) абсалютна збягаецца, г.зн. збягаецца лікавы шэраг

$$|c_0| + |c_1 r| + |c_2 r^2| + ... + |c_n r^n| + ... \quad .$$

Заўважым, што для ўсіх $x \in [-r, r]$ маюць месца наступныя няроўнасці:

$$|c_n x^n| \le |c_n r^n|$$
$$(n = 0,1,2...) \quad .$$

Калі цяпер скарыстаць тэарэму Вейерштраса, то атрымаем, што ступеневы шэраг (1) раўнамерна збягаецца на адрэзку $[-r, r]$.

Такім чыным, мы даказалі, што ступеневы шэраг (1) раўнамерна збягаецца на кожным адрэзку, які сіметрычны адносна пункта 0 і ляжыць унутры інтэрвалу $(-R;R)$.

Разгледзім адвольны адрэзак $[\alpha,\beta]$, які ляжыць унутры інтэрвалу $(-R;R)$. Дакажам, што шэраг (1) раўнамерна збягаецца на гэтым адрэзку.

Для доказу пабудуем такі адрэзак $[-r, r]$, які сіметрычны адносна пункта 0, змяшчае адрэзак $[\alpha,\beta]$ і сам змяшчаецца ў інтэрвале $(-R;R)$. Згодна з даказаным вышэй ступеневы шэраг (1) раўнамерна збягаецца на адрэзку $[-r, r]$, таму ён раўнамерна збягаецца і на адрэзку $[\alpha,\beta]$.

Вынік 1. Сума ступеневага шэрагу (1) непарыўная ў кожным пункце яго інтэрвалу збежнасці.

Доказ. Няхай x – адвольны пункт інтэрвалу $(-R;R)$. Дакажам, што сума шэрагу (1) будзе непарыўнай у гэтым пункце.

Для доказу пабудуем такі адрэзак $[\alpha,\beta]$., які змяшчае пункт x, а сам змяшчаецца ў інтэрвале $(-R;R)$. Паводле тэарэмы 1 шэраг (1) раўнамерна збягаецца на адрэзку $[\alpha,\beta]$. Калі цяпер скарыстаць тэарэму 3' з параграфа 2.2, то атрымаем што сума шэрагу (1) будзе непарыўнай у кожным пункце адрэзка $[\alpha,\beta]$, у прыватнасці ў пункце x.

Вынік 2. Ступеневы шэраг (1) можна пакладова інтэграваць на кожным адрэзку, які ляжыць унутры яго інтэрвалу збежнасці, у прыватнасці мае месца наступная роўнасць:

$$\int_0^x S(x)dx = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{c_n x^{n-1}}{n+1} + \ldots, \qquad (2)$$

дзе x – адвольны пункт інтэрвалу $(-R;R)$, $S(x)$ -сума шэрагу (1).

Праўдзівасць гэтага выніку выцякае з даказанай вышэй тэарэмы 1 і з тэарэмы 4' параграфа 2.2.

Тэарэма 2. Ступеневы шэраг (4) можна пакладова дыферэнцаваць у кожным пункце яго інтэрвалу збежнасці, г.зн. у кожным такім пункце сума шэрагу $S(x)$ дыферэнцавальная і мае месца наступная роўнасць:

$$S'(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots. \qquad (3)$$

Доказ. Разгледзім адвольны адрэзак $[-r,r]$, які змяшчаецца ў інтэрвале $(-R;R)$. Дакажам, што шэраг (1) можна пакладова дыферэнцаваць на гэтым адрэзку. Пры доказе будзем карыстацца тэарэмай 5 з параграфа 2.2. Каб скарыстаць гэту тэарэму, трэба даказаць раўнамерную збежнасць шэрагу

$$c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots \qquad (4)$$

на адрэзку $[-r,r]$. Раўнамерную збежнасць шэрагу (4) будзем даказваць пры дапамозе тэарэмы Вейерштраса.

Спачатку разгледзім адвольны пункт ξ, які здавальняе ўмове $r < \xi < R$. Далей разгледзім лік $q = \frac{r}{\xi}$. Зразумела, што $0 < q < 1$ і $r = \xi \cdot q$. Заўважым далей, што $\forall x \in [-r,r]$ мае месца наступная няроўнасць

$$\left|nc_n x^{n-1}\right| \le \left|nc_n r^{n-1}\right| = \left|nc_n (\xi \cdot q)^{n-1}\right| = \frac{\left|c_n \xi^n\right|}{\xi} nq^{n-1} \qquad (5)$$

$$(n = 1,2,\ldots.).$$

Пункт ξ належыць інтэрвалу $(-R;R)$, таму ў гэтым пункце шэраг (1) збягаецца абсалютна, г.зн. збягаецца лікавы шэраг

$$|c_0| + |c_1\xi| + \ldots + \left|c_n \xi^n\right| + \ldots.$$

Адсюль вынікае, што $\lim\limits_{n\to\infty}\left|c_n \xi^n\right| = 0$. Паколькі паслядоўнасць $\left(\left|c_n \xi^n\right|\right)$ збягаецца, то яна будзе абмежаванай, г.зн.

$$\exists M > 0, \forall n \Rightarrow \left|c_n \xi^n\right| \le M.$$

Адсюль і няроўнасці (5) атрымліваем, што для ўсіх $x \in [-r,r]$ выконваецца няроўнасць

$$\left|nc_n x^{n-1}\right| \le \frac{M}{\xi} nq^{n-1} \qquad (6)$$

$$(n = 0,1,2\ldots).$$

Разгледзім цяпер лікавы шэраг, агульным складнікам якога з'яўляецца правая частка няроўнасці (6):

$$\frac{M}{\xi} + \frac{M}{\xi} 2q + \ldots + \frac{M}{\xi} nq^{n-1} + \ldots \quad . \qquad (7)$$

Гэты шэраг з’яўляецца мажарантным шэрагам для даследуемага шэрагу (4) на адрэзку $[-r,r]$.

Шэраг (7) збягаецца, у чым лёгка пераканацца пры дапамозе прыметы Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{M}{\xi}(n+1)q^n}{\frac{M}{\xi}nq^{n-1}}=q<1,$$

бо $0<q<1$.

Паколькі лікавы шэраг (7) збягаецца і з’яўляецца мажарантным для даследуемага шэрагу (4) на адрэзку $[-r,r]$, то паводле прыметы Веерштраса атрымаем, што шэраг (4) раўнамерна збягаецца на адрэзку $[-r,r]$,. Цяпер мы ўжо можам скарыстаць тэарэму пра пакладовае дыферэнцаванне функцыйнага шэрагу (тэарэма 5 параграфа 2.2).

Паводле гэтай тэарэмы атрымліваем, што шэраг (1) можна паскладова дыферэнцаваць у кожным пункце адрэзка $[-r,r]$. Цяпер ужо лёгка даказаць, што шэраг (1) можна паскладова дыферанцаваць у кожным пункце яго інтэрвалу збежнасці.

Няхай x-адвольны пункт інтэрвалу $(-R;R)$. Пабудуем такі адрэзак$[-r,r]$, які змяшчае гэты пункт, а сам змяшчаецца ў $(-R;R)$. Згодна з даказаным вышэй шэраг (1) можна паскладова дыферэнцаваць у кожным пункце адрэзка $[-r,r]$, у прыватнасці ў пункце x.

Тэарэма 3. Няхай дадзены ступеневы шэраг

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots. \tag{1}$$

Разгледзім шэрагі

$$c_1+2\cdot c_2x+\ldots+n\cdot c_nx^{n-1}+\ldots, \tag{4}$$

$$c_0x+\frac{c_1x^2}{2}+\ldots+\frac{c_nx^{n+1}}{n+1}+\ldots, \tag{8}$$

атрыманыя паскладовым дыферэнцаваннем і інтэграваннем шэрагу (1). Шэрагі (4) і (8) маюць той жа радыус збежнасці, што і дадзены шэраг (1).

Доказ. Радыусы збежнасці шэрагаў (1), (4), (8) абазначым адпаведна R, R_1, R_2.

Згодна з тэарэмай 2 і вынікам 2 з тэарэмы 1 шэрагі (4) і (8) збягаюцца ў кожным пункце інтэрвалу $(-R;R)$. Адсюль вынікае, што

$$\begin{aligned}&R\le R_1,\\&R\le R_2.\end{aligned} \tag{9}$$

Такім чынам, пры паскладовым дыферэнцаванні ступеневага шэрагу, а таксама пры паскладовым інтэграванні радыус збежнасці ступеневага шэрагу не памяншаецца.

Паколькі шэраг (1) можа быць атрыманы пры паскладовым інтэграванні шэрагу (4), то, скарыстаўшы атрыманыя вышэй высновы, будзем мець

$$R_1\le R. \tag{10}$$

Аналагічна

$$R_2\le R. \tag{11}$$

З няроўнасцяў (9), (10), (11) вынікае $R_1=R_2=R$.

2.5. Шэраг Тэйлара

Няхай функцыя $f(x)$ вызначаная ў некаторым наваколлі пункта a, напрыклад, на інтэрвале $(a-r, a+r)$. Узнікае пытанне: ці існуе такі ступеневы шэраг

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots, \tag{1}$$

сума якога на разглядаемым інтэрвале роўная $f(x)$?

Азначэнне 1. Будзем казаць, што на інтэрвале $(a-r, a+r)$ функцыя $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг (1), калі на гэтым інтэрвале дадзены шэраг збягаецца, і яго сума роўная $f(x)$, г. зн. калі

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots, \tag{2}$$

$$\forall\ x \in (a-r, a+r).$$

Улічваючы гэтае азначэнне, сфармуляванае вышэй пытанне можна сфармуляваць так: ці можна на інтэрвале $(a-r, a+r)$ функцыю $f(x)$ раскласці ў ступеневы шэраг выгляду (1). Рашэнне гэтага пытання мае важнае значэнне для практыкі, г. зн. калі функцыя на некаторым інтэрвале раскладаецца ў ступеневы шэраг, то гэты расклад можна выкарыстоўваць для знаходжання набліжаных значэнняў дадзенай функцыі.

Такім чынам, даследуем пытанне аб магчымасці раскладання функцыі ў ступеневы шэраг. Перш за ўсё адзначым, што калі функцыя $f(x)$ на інтэрвале $(a-r, a+r)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг (1), то яна дыферэнцавальная любы лік разоў на разглядаемым інтэрвале. Адсюль вынікае, што пры даследаванні сфармуляванага вышэй пытання мы павінны абмежавацца разглядам такіх функцый, якія на інтэрвале $(a-r, a+r)$ любы лік разоў дыферэнцавальныя. Для такіх функцый дакажам наступную тэарэму.

Тэарэма 1. Калі на інтэрвале $(a-r, a+r)$ функцыя $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг (1), г. зн. на гэтым інтэрвале мае месца роўнасць (2), то гэты расклад адзіны.

Доказ. Згодна з умовай тэарэмы $\forall x \in (a-r, a+r)$ мае месца роўнасць (2). Калі скарыстаць тэарэму пра пакладовае дыферэнцаванне ступеневага шэрагу, то атрымаем для ўсіх такіх x наступныя роўнасці:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots, \tag{2_1}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \ldots, \tag{2_2}$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)n\cdot\ldots\cdot 2c_{n+1}(x-a) + \ldots, \tag{2_n}$$

. . . . . .

Калі падставім у роўнасці (2), (2_1), … (2_n), … $x = a$, то атрымаем:

$$f(a) = c_0,\ f'(a) = 1!c_1,\ f''(a) = 2!c_2,\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = n!c_n,\ \ldots,$$

адкуль

$$c_0 = f(a),\ c_1 = \frac{f'(a)}{1!},\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \ldots, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad . \tag{3}$$

Такім чынам, каэфіцыенты раскладу (2) вызначаюцца адназначна па формулах (3). Гэтым мы даказалі, што, калі на інтэрвале $(a-r, a+r)$ функцыя $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг (1), то гэты расклад адзіны, прычым ён мае выгляд

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{2'}$$

Азначэнне 2. Ступеневы шэраг, які стаіць у правай частцы роўнасці (2’), называецца шэрагам Тэйлара функцыі $f(x)$, іншымі словамі шэрагам Тэйлара функцыі $f(x)$ называецца ступеневы шэраг выгляду

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \quad . \tag{4}$$

Калі $a = 0$, то гэты шэраг мае выгляд

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \tag{5}$$

Шэраг (5) называецца шэрагам Макларэна.

Калі скарыстаць паняцце шэрагу Тэйлара, то даказаную вышэй тэарэму 1 можна сфармуляваць і гэтак.

Тэарэма 1’. Калі на інтэрвале $(a-r, a+r)$ функцыя $f(x)$ раскладаецца ў ступеневы шэраг (1), то гэты шэраг з’яўляецца яе шэрагам Тэйлара.

Адсюль вынікае, што пытанне аб магчымасці раскладання функцыі ў ступеневы шэраг зводзіцца да пытання аб магчымасці раскладання яе ў шэраг Тэйлара.

Адзначым, што калі функцыя $f(x)$ у пункце a любы лік разоў дыферэнцавальная, то для яе чыста фармальна можна пабудаваць шэраг Тэйлара. Гэты факт запісваюць так:

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

Аднак гэта зусім не сведчыць аб тым, што функцыя $f(x)$ раскладаецца ў шэраг Тэйлара, г.зн. для гэтай функцыі ў разглядаемым наваколлі пункта a мае месца роўнасць (2’). Можа здарыцца, што шэраг Тэйлара разбягаецца пры ўсіх $x \neq a$. Можа здарыцца таксама, што ён збягаецца, але не да той функцыі, якая яго нарадзіла.

Прыклад 1. Разгледзім функцыю

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{калі} \quad x \neq 0; \\ 1, & \text{калі} \quad x = 0. \end{cases}$$

Гэтая функцыя дыферэнцавальная любы лік разоў ва ўсіх пунктах лікавай восі. Пабудуем для яе шэраг Макларэна.

Пры дапамозе нескладаных вылічэнняў атрымаем $f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = 0, \ldots$. Таму шэраг Макларэна для разглядаемай функцыі будзе мець наступны выгляд:

$$0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \ldots ,$$

г.зн.

$$0+0+0+\ldots+0+\ldots.$$

Сумма гэтага шэрагу ва ўсіх пунктах x лікавай восі роўная нулю. Таму ва ўсіх пунктах $x \neq 0$ разглядаемы шэраг збягаецца, але не да той функцыі, якая яго нарадзіла.

Узнікае пытанне: пры якіх умовах шэраг Тэйлара збягаецца, прычым да той функцыі, якая яго нарадзіла, г. зн. пры якіх умовах функцыя $f(x)$ раскладаецца ў шэраг Тэйлара?

Тэарэма 2. Няхай функцыя $f(x)$ на інтэрвале $(a-r,a+r)$ дыферэнцавальная любы лік разоў. Для таго, каб на гэтым інтэрвале дадзеная функцыя раскладалася ў шэраг Тэйлара, неабходна і дастаткова, каб $\forall x \in (a-r,a+r)$ выконвалася наступная ўмова:

$$\lim_{n\to\infty}(f(x)-S_n(x))=0,$$

дзе $S_n(x)$ – n-ая частковая сума шэрагу Тэйлара функцыі $f(x)$.

Доказ. Неабходнасць. Згодна з умовай тэарэмы функцыя $f(x)$ раскладаецца ў шэраг Тэйлара на інтэрвале $(a-r,a+r)$. Гэта значыць, што ў кожным пункце x гэтага інтэрвалу шэраг Тэйлара, пабудаваны для функцыі $f(x)$, збягаецца да $f(x)$, г.зн.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a-r,a+r).$$

Адсюль

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x) - f(x)) = 0 \qquad \forall x \in (a-r,a+r).$$

Дастатковасць. Згодна з умовай тэарэмы

$$\lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n(x)) = 0 \qquad \forall x \in (a-r,a+r).$$

Адсюль вынікае, што

$$\lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0,$$

$$f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a-r,a+r).$$

Гэта сведчыць аб тым, што ў кожным пункце інтэрвалу $(a-r,a+r)$ шэраг Тэйлара, пабудаваны для функцыі $f(x)$, збягаецца да $f(x)$, г.зн. функцыя $f(x)$ раскладаецца на дадзеным інтэрвале ў шэраг Тэйлара.

Тэарэмай 2 мы зможам карыстацца, калі знойдзем зручны выраз для рознасці $f(x)-S_n(x)$.

Гэтым пытаннем мы і будзем займацца ў наступным параграфе.

2.6. Формула Тэйлара

Няхай функцыя $f(x)$ на інтэрвале $(a-r,a+r)$ мае непарыўныя вытворныя да парадку n уключна. Няхай x адвольны пункт гэтага інтэрвалу. Разгледзім інтэграл

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Скарыстаўшы формулу інтэгравання па частках

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \, ,$$

атрымаем:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} df^{(n-1)}(t) =$$

$$= \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}dt =$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} df^{(n-2)}(t) =$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n-2)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} \Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{1}{(n-3)!}\int_a^x (x-t)^{n-3} f^{(n-2)}(t)dt =$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} - \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2} - \ldots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \int_a^x f'(t)dt =$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} - \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2} - \ldots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - f(a) + f(x) .$$

Адсюль вынікае наступная роўнасць:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x) , \qquad (1)$$

дзе $$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \, . \qquad (2)$$

Роўнасць (1) называецца формулай Тэйлара для функцыі $f(x)$. Яна атрымана для любога пункта $x \in (a-r, a+r)$.

Велічыню $R_n(x)$ называюць астаткавым складнікам формулы Тэйлара. Астаткавы складнік, запісаны ў выглядзе (2), называюць астаткавым складнікам у інтэгральнай форме. Знойдзем яшчэ адну форму для астаткавага складніка $R_n(x)$.

Заўважым, што функцыя $(x-t)^{n-1}$ на адрэзку з канцамі у пуктах a і x захоўвае знак. Таму, скарыстаўшы да інтэграла (2) абагульненую тэарэму аб сярэднім значэнні, будзем мець, што

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} dt = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\frac{(x-t)^n}{n}\Big|_{t=x}^{t=a} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n .$$

Такім чынам, мы атрымалі:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n , \qquad (3)$$

дзе ξ – некаторы пункт адрэзка з канцамі ў пунктах a і x .

Астаткавы складнік формулы Тэйлара, запісаны ў выглядзе (3), называецца астаткавым складнікам у форме Лагранжа.

2.7. Раскладанне функцый у шэраг Тэйлара

Няхай функцыя $f(x)$ любы лік разоў дыферэнцавальная на інтэрвале $(a-r,a+r)$. Для дадзенай функцыі пабудуем шэраг Тэйлара:

$$f(x) \sim f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\ldots.$$

Далей для дадзенай функціі запішам формулу Тэйлара:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n(x),$$

дзе x – адвольны пункт інтэрвалу $(a-r,a+r)$.

Заўважым, што сума первых n складнікаў формулы Тэйлара з'яўляецца n-ай частковай сумай шэрагу Тэйлара, якую мы абазначаем праз $S_n(x)$. Таму формулу Тэйлара для функціі $f(x)$ можна запісаць у выглядзе

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

Адсюль вынікае, што

$$f(x)-S_n(x)=R_n(x),$$

дзе x – адвольны пункт інтэрвалу $(a-r,a+r)$. Калі ўлічыць апошнюю роўнасць, то тэарэму 2 з параграфа 2.5. можна сфармуляваць так.

Тэарэма 1. Няхай функцыя $f(x)$ на інтэрвале $(a-r,a+r)$ дыферэнцавльная любы лік разоў. Для таго, каб на гэтым інтэрвале дадзеная функцыя раскладалася ў шэраг Тэйлара, неабходна і дастаткова, каб $\forall x\in(a-r,a+r)$ выконвалася наступная ўмова:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

дзе $R_n(x)$ – астаткавы складнік формулы Тэйлара.

Скарыстаем тэарэму 1 і атрымаем адну дастатковую прымету раскладання функцыі ў шэраг Тэйлара.

Тэарэма 2. Калі функцыя $f(x)$ на інтэрале $(a-r,a+r)$ мае вытворныя любога пардку, і ўсе яны абмежаваныя на гэтым інтэрвале адным і тым жа лікам, г. зн.

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \quad \forall x\in(a-r,a+r) \tag{1}$$

$$(n=0,1,2,\ldots),$$

то функцыя $f(x)$ на інтэрвале $(a-r,a+r)$ раскладаецца ў шэраг Тэйлара.

Доказ. Будзем карыстацца астаткавым складнікам формулы Тэйлара для функцыі $f(x)$ у форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \tag{2}$$

дзе x – адвольны пункт інтэрвалу $(a-r,a+r)$, ξ – некаторы пункт, які ляжыць на адрэзку з канцамі ў пунктах a і x.

Калі скарыстаць умову (1), то $\forall x\in(a-r,a+r)$ з (2) атрымліваем наступную няроўнасць:

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n)}(\xi)\right|}{n!}\left|x-a\right|^n \le \frac{M}{n!}r^n ,$$

г. зн.

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M}{n!}r^n \qquad (n = 0,1,2,\ldots) . \tag{3}$$

Докажам зараз, што

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n!}r^n = 0 . \tag{4}$$

Тады з няроўнасці (3) будзе вынікаць, што

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad \forall x \in (a-r, a+r) .$$

Адсюль, скарыстаўшы тэарэму (1), атрымаем, што функцыя $f(x)$ на інтэрвале $(a-r, a+r)$ раскладаецца у шэраг Тэйлара. Такім чынам, доказ тэарэмы звёўся да доказу роўнасці (4).

Для доказу гэтай роўнасці разгледзім шэраг з агульным складнікам $\frac{Mr^n}{n!}$,

г.зн. шэраг $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Mr^n}{n!} .$$

Гэты шэраг збягаецца, у чым лёгка пераканацца, калі скарыстать прымету Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{Mr^{n+1}n!}{(n+1)!Mr^n} = r\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1 .$$

Адсюль, скарыстаўшы неабходную прымету збежнасці шэрагу, атрымліваем, што

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n!}r^n = 0 .$$

Роунасць (4) даказалі і разам з ёй даказалі і тэарэму 2.

2.8. Раскладанне функцый $\mathbf{f(x) = \sin x}$, $\mathbf{f(x) = \cos x}$ у шэраг Макларана

I. Разгледзім функцыю $f(x) = \sin x$. Спачатку дакажам, што дадзеная функцыя раскладаецца ў шэраг Макларана на любым інтэрвале $(-r, r)$, сіметрычным адносна 0.

Разгледзім адвольны інтэрвал $(-r, r)$.На гэтым інтэрвале дадзеная функцыя мае вытворныя любога парадку. Усе яны абмежаваныя адным і тым жа лікам:

$$\left|\sin^{(n)} x\right| \le 1 \qquad \forall x \in (-r, r) .$$
$$(n = 0,1,2,\ldots)$$

Таму згодна з тэарэмай 2 папярэдняга параграфа функцыя $f(x) = \sin x$ раскладаецца ў шэраг Макларэна на інтэрвале $(-r, r)$.

Паколькі функцыя $f(x) = \sin x$ раскладаецца ў шэраг Макларэна на любым інтэрвале $(-r, r)$, то адсюль вынікае, што яна раскладаецца ў шэраг Макларэна і на ўсёй лікавай восі (для любога пункта x заўсёды можна пабудаваць такі інтэрвал $(-r, r)$, які змяшчае гэты пункт).

Знойдзем гэты расклад.

$$f(x) = \sin x , \qquad f(0) = 0 ,$$
$$f'(x) = \cos x , \qquad f'(0) = 1 ,$$

$$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(0) = 0,$$
$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(0) = -1,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots . \qquad (1)$$
$$(\ -\infty < x < +\infty \ )$$

II.Аналагічным чынам даказваецца праўдзівасць наступнага сцвярджэння:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots . \qquad (2)$$
$$(\ -\infty < x < +\infty \ )$$

III.Расклады (1) і (2) могуць быць скарыстаны для знаходжання набліжаных значэнняў функцый $\sin x$ і $\cos x$. Знойдзем набліжанае значэнне $\sin 1$. Падставіўшы ў роўнасць (1) $x = 1$, атрымаем

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \ldots .$$

Суму гэтага шэрагу заменім сумай яго першых чатырох складнікаў. Атрымаем наступную набліжаную роўнасць:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040}.$$

Атрыманая пры гэтым памылка будзе меншай або роўнай $\frac{1}{9!} = \frac{1}{362880}$.

Для ацэнкі памылкі мы карысталіся наступным правілам: калі суму шэрагу Лейбніца замяніць яго частковай сумай, то мы зробім памылку, якая мае знак, што і першы адкідваемы складнік і па модулю не перавышае яго.

2.9. Раскладанне функцыі $\mathbf{f(x) = e^x}$ у шэраг Макларэна

Разгледзім функцыю $f(x) = e^x$. Спачатку дакажам, што дадзеная функцыя раскладаецца ў шэраг Макларэна на любым інтэрвале $(-r, r)$, сіметрычным адносна 0.

Разгледзім адвольны інтэрвал $(-r, r)$. На дадзеным інтэрвале функцыя $f(x) = e^x$ мае вытворныя любога парадку. Усе яны абмежаваныя адным і тым жа лікам:

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = e^x < e^r,$$

г. зн.

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < M \quad (\ n = 0, 1, 2, \ldots \ ) \ \ \forall x \in (-r, r),$$

дзе $M = e^r$.

Таму паводле тэарэмы 2 з параграфа 2.7. атрымаем, што функцыя $f(x) = e^x$ раскладаецца ў шэраг Макларэна на інтэрвале $(-r, r)$.

Паколькі дадзеная функцыя раскладаецца ў шэраг Макларэна на любым інтэрвале $(-r, r)$, то яна раскладаецца ў гэты шэраг і на ўсёй лікавай восі.

Знойдзем гэты расклад. Маем:

$$f(x) = e^x, \qquad f'(x) = e^x, \qquad f''(x) = e^x, \qquad \ldots;$$
$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 1, \qquad \ldots;$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{1}$$
$$(-\infty < x < +\infty).$$

Расклад (1) можа быць скарыстаны для набліжанага вылічэння ліку e.

У роўнасць (1) падставім $x = 1$:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Заменім суму гэтага шэрагу сумай яго першых n складнікаў. Атрымаем набліжаную роўнасць

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

Атрыманая пры гэтым памылка будзе такой:

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots) <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Такім чынам, памылка ў набліжанай роўнасці меншая $\frac{1}{n \cdot n!}$.

2.10. Вылічэнне лагарыфмаў

Разгледзім шэраг

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots.$$

Пры кожным фіксаваным x гэты шэраг з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй з назоўнікам $-x$. Вядома, што ён збягаецца, калі $|-x| < 1$, г. зн. $|x| < 1$, разбягаецца, калі $|x| \geq 1$. Прычым сума дадзенага шэрагу роўная $\frac{1}{1+x}$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Інтэрвалам збежнасці разглядаемага шэрагу з'яўляецца інтэрвал $(-1,1)$.

Паколькі ступеневы шэраг можна пасакладова інтэграваць на кожным адрэзку, які належыць яго інтэрвалу збежнасці, то будзем мець:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

дзе x – адвольны пункт інтэрвалу $(-1,1)$.

Гэты расклад можна запісаць у наступным выглядзе:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \tag{1}$$
$$-1 < x < 1.$$

Роўнасць (1) мае месца ў кожным пункце $x \in (-1,1)$. Можна даказаць, што гэтая роўнасць мае месца і ў пункце $x = 1$. У пункце $x = -1$ роўнасць (1) не мае месца, бо ў гэтым пункце не мае сэнсу левая частка гэтай роўнасці. Такім чынам, роўнасць (1) мае месца для ўсіх $x \in (-1,1]$.

Расклад (1) у прынцыпе можна выкарыстоўваць для набліжанага вылічэння значэнняў $\ln(1+x)$, але гэта не зусім зручна, паколькі разглядаемы шэраг збягаецца павольна. Важна мець такі шэраг, які б збягаўся даволі хутка. Такі шэраг можна атрымаць наступным чынам.

У роўнасці (1) заменім x на $-x$. Будзем мець:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots . \qquad (2)$$

Гэтая роўнасць мае месца для ўсіх x, якія задавальняюць умове $-1 \le x < 1$. Калі цяпер ад роўнасці (1) адняць роўнасць (2), то атрымаем:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots) . \qquad (3)$$

Роўнасць (3) мае месца для ўсіх x, якія задавальняюць умове $-1 < x < 1$.

У роўнасць (3) падставім $x = \dfrac{1}{2n+1}$, дзе n – натуральны лік. Атрымаем:

$$\ln\frac{n+1}{n} = 2(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots),$$

$$\ln(n+1) = \ln n + 2(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots) . \qquad (4)$$

Адпраўляючыся ад $\ln 1 = 0$, пры дапамозе шэрагу (4), які збягаецца дастаткова хутка, мы можам знайсці набліжанае значэнне лагарыфма натуральнага любога натуральнага ліку.

Напрыклад,

$$\ln 2 = 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots) .$$

Суму гэтага шэрагу заменім сумай першых пяці яго складнікаў. Атрымаем набліжаную роўнасць

$$\ln 2 \approx 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}) .$$

Атрыманая памылка будзе такой:

$$2(\frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \frac{1}{13\cdot 3^{13}} + \ldots) < 2(\frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \frac{1}{11\cdot 3^{13}} + \ldots) =$$

$$\frac{2}{11\cdot 3^{11}}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots) = \frac{2}{11\cdot 3^{11}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{11\cdot 3^9\cdot 8} < 0,000002 .$$

2.11.Біномны шэраг

Раскладзем у шэраг Макларэна функцыю $f(x) = (1+x)^\alpha$, дзе α – адвольны рэчаісны лік.

Спачатку для дадзенай функцыі фармальна пабудуем шэраг Макларэна.

Маем:

$$f(x) = (1+x)^\alpha , \qquad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f'(0) = \alpha ;$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1) ;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}\,,\quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))\,;$$

. . . .

Шэраг Макларэна мае наступны выгляд:

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\ldots. \qquad (1)$$

Гэты шэраг называецца біномным шэрагам.

Калі α з'яўляецца цэлым неадмоўным лікам, то ўсе каэфіцыенты гэтага шэрагу, пачынаючы з некаторага, роўныя нулю. Калі α не з'яўляецца цэлым неадмоўным лікам, то ўсе каэфіцыенты шэрагу (1) адрозныя ад нуля. Зафіксуем нашу ўвагу на апошнім выпадку.

Разгледзім выпадак, калі α не з'яўляецца цэлым неадмоўным лікам.

Знойдзем інтэрвал збежнасці шэрагу (1). Будзем карыстацца прыметай Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}n!}{(n+1)!\ \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^n}\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=|x|\,.$$

Згодна з прыметай Даламбера шэраг абсалютна збягаецца, калі $|x|<1$, разбягаецца, калі $|x|>1$. Адсюль робім высновы, што інтэрвалам збежнасці шэрагу (1) з'яўляецца інтэрвал $(-1,1)$.

З таго факту, што шэраг (1) збягаецца на інтэрвале $(-1,1)$, яшчэ не вынікае, што яго сума роўная $(1+x)^\alpha$, г. зн. роўная той функцыі, якая яго нарадзіла. Дакажам, што на інтэрвале $(-1,1)$ шэраг збягаецца менавіта да функцыі $(1+x)^\alpha$, г. зн. дакажам, што на гэтым інтэрвале мае месца наступная роўнасць:

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\ldots. \qquad (2)$$

Зрабіць гэта з дапамогай тэарэмы 2 з параграфа 2.7 нельга, бо ўмовы гэтай тэарэмы не выконваюцца. Зробім гэта іншым метадам.

Суму шэрагу (1) абазначым праз $S(x)$.

$$S(x)=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\ldots, \qquad (3)$$

$$x\in(-1,1)\,.$$

Паколькі ступеневы шэраг можна дыферэнцаваць паскладова ў кожным пункце яго інтэрвалу збежнасці, то будзем мець

$$S'(x)=\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\ldots,$$

$$x\in(-1,1)\,.$$

Адсюль

$$\frac{S'(x)}{\alpha}=1+\frac{\alpha-1}{1!}x+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\ldots, \qquad (4)$$

$$x\in(-1,1)\,.$$

Роўнасць (4) памножым на x і прыбавім да роўнасці (4).

Атрымаем:

$$\frac{(1+x)S'(x)}{\alpha}=x+\frac{\alpha-1}{1!}x^2+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3+\ldots\quad+$$

$$+1+\frac{\alpha-1}{1!}x+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{3!}x^3+\ldots.$$

Адкуль

$$\frac{(1+x)S'(x)}{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots.$$

Калі скарыстаць роўнасць (3), то з апошняй роўнасці атрымліваем, што

$$\frac{(1+x)S'(x)}{\alpha}=S(x),$$

адкуль

$$(1+x)S'(x)-\alpha S(x)=0. \qquad (5)$$

Роўнасць (5) даказана $\forall x\in(-1,1)$.

Разгледзім дапаможную функцыю

$$\varphi(x)=\frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}},\quad x\in(-1,1). \qquad (6)$$

Дакажам, што гэтая функцыя ва ўсіх пунктах інтэрвалу $(-1,1)$ роўная адзінцы.

З гэтай мэтай знойдзем вытворную дапаможнай функцыі:

$$\varphi'(x)=\frac{(1+x)^{\alpha}S'(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}S(x)}{(1+x)^{2\alpha}}=$$

$$=\frac{(1+x)S'(x)-\alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}},$$

адкуль, улічваючы роўнасць (5), атрымліваем, што

$$\varphi'(x)=0\quad\forall x\in(-1,1).$$

Адсюль вынікае, што функцыя $\varphi(x)$ з'яўляецца сталай на інтэрвале $(-1,1)$. Паколькі $\varphi(0)=1$, то $\varphi(x)=1\quad\forall x\in(-1,1)$, г.зн.

$$\frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}}=1\quad\forall x\in(-1,1),$$

$$S(x)=(1+x)^{\alpha}\quad\forall x\in(-1,1).$$

Падставіўшы выраз для $S(x)$ у роўнасць (3), атрымаем роўнасць (2).

Такім чынам, мы даказалі, што калі α не з'яўляецца цэлым неадмоўным лікам, то для любога $x\in(-1,1)$ мае месца наступная роўнасць:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (2)$$

Калі $|x|>1$, то гэтая роўнасць не мае месца, бо дадзены шэраг разбягаецца. Адзначым без доказу, што пры $x=-1$ роўнасць (2) мае месца, калі $\alpha>0$, а пры $x=1$ роўнасць мае месца, калі $\alpha>-1$.

Заўвага. Калі α з'яўляецца цэлым неадмоўным лікам, то роўнасць (2) мае месца для любога x.

Сапраўды, калі α – цэлы неадмоўны лік, то для ўсіх рэчаісных x мае месца формула бінома Ньютана:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot1}{\alpha!}x^{\alpha}.$$

Гэтую роўнасць можна запісаць у наступным выглядзе:

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot 1}{\alpha!}x^{\alpha}+0+0+0+\ldots .$$

Але менавіта такі выгляд мае і роўнасць (2), калі α з'яўляецца цэлым неадмоўным лікам.

ЛІТАРАТУРА

1. Ангилейко И.М. Бесконечные ряды. Мн., 1964.
2. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащёнов К.В. Курс Математического анализа: В 2 т. М., 1972. Т. 2.
3. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. СПб.2002.
4. Шмелёв П.А. Теория рядов в задачах и упрапжнениях. М., 1983.

ЗМЕСТ

Вучэбнае выданне

ШЫЛІНЕЦ Уладзімір Адамавіч

ШЭРАГІ

Вучэбны дапаможнік

Рэдактар: Л. М. Каранеўская
*Тэхнічнае рэдагаванне
і камп'ютарная вёрстка:* А. А. Пакала

Падпісана ў друк .04. Фармат 60x84 1/16. Папера афсетная. Гарнітура *Arial.* Друк афсетны. Ум. друк. арк. Ул.–выд. арк. Тыраж 100 экз. Заказ

Установа адукацыі "Беларускі дзяржаўны педагагічны універсітэт імя Максіма Танка"
Ліцэнзія ЛВ № 196 ад 04.02.03. 220050, Мінск, Савецкая, 18

Выдавецтва і паліграфічнае выкананне: Вучэбна–выдавецкі цэнтр БДПУ.

Ліцэнзія ЛП № 486 ад 02.04.02. 220007, Мінск, Магілёўская, 37