

*С. И. Зенько, преподаватель кафедры прикладной математики и информатики  
Белорусского государственного педагогического университета  
имени Максима Танка, учитель математики СШ № 47 г. Минска*

## РЕАЛИЗАЦИЯ ОБУЧАЮЩЕГО ЭТАПА КОМПЛЕКСНОЙ МЕТОДИКИ ПРЕВЕНТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ ПО ПРЕДУПРЕЖДЕНИЮ ТИПИЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК УЧАЩИХСЯ

### Аннотация

Раскрывается один из этапов комплексной методики превентивной деятельности учителя математики на примере раздела «Разложение многочленов на множители» компонента «Алгебра» 7 класса. Приведено методическое наполнение последовательности превентивной деятельности учителя математики для обучающего этапа по таким компонентам, как анализ учебного материала, совокупность методических превенций и организационно-педагогические условия. Сделаны выводы об эффективности предлагаемой методики на основании экспериментальной проверки, проводившейся с 2004 по 2007 г.

### Введение

В последнее десятилетие во многих странах мира у большинства учащихся наблюдается снижение уровня знаний по предметам естественно-научного цикла. Об этом свидетельствуют результаты международных исследований TIMSS, PISA. По итогам Международного сравнительного мониторингового исследования качества математического и естественно-научного образования TIMSS 2007 г. [7] (несмотря на то, что положение российских учащихся на международной шкале TIMSS по математике превысило средний международный балл на 12 баллов) было зафиксировано снижение результатов учащихся одной и той же совокупности детей при переходе из начальной школы (IV класс, 2003 г.) в основную (VIII класс,

2007 г.) на 20 баллов. О стабильно невысоких результатах упоминается и в заключении Международной программы по оценке образовательных достижений учащихся PISA 2006 г. [5]. Это ещё более настораживает, так как речь идёт об уровне математической грамотности 15-летних учащихся — возможности применения полученных ими знаний в реальной жизни. Сложившаяся тенденция снижения уровня математической подготовки учащихся по математике прослеживается и в Республике Беларусь, о чём свидетельствуют результаты комплексного мониторинга качества общего среднего образования, проводимого Республиканским институтом контроля знаний. По итогам централизованного тестирования

2005 г. отмечается снижение среднего балла по математике по сравнению со средним баллом 2003 и 2004 гг. «Это объясняется тем, что большее количество учащихся (по сравнению с прошлыми годами) с невысоким уровнем подготовки и мотивации приняли участие в данном мероприятии» [6, с. 7]. Результаты централизованного тестирования 2006 г. вызывают тревогу в связи с тем, «что практически каждый девятый участник ЦТ 2006 не справился со стандартными школьными задачами, т. е. задачами I, II, III уровней сложности, а таких заданий в тестовом варианте было 14 (56 %)» [4, с. 5]. В заданиях I уровня допус-

тили ошибки 51920 респондентов (53,7 %). Средний процент выполнения заданий I и II уровней не превысил планку в 50 %, т. е. более половины от общего количества участников централизованного тестирования 2006 г. — 96726 человек (65401 участник — выпускники 2006 г.).

Изменение сложившейся ситуации возможно при масштабном внедрении в учебный процесс комплексной методики превентивной деятельности учителя математики по предупреждению типичных ошибок учащихся, возникающих у них как во время получения новых знаний, так и на этапе развития новых умений.

### Основная часть

Последовательность формирования безошибочных знаний у учащихся с использованием комплексной методики превентивной деятельности учителя математики изображена на рисунке 1. Эта последовательность состоит из двух этапов — обучающего и коррекционного.



Рисунок 1 — Последовательность формирования безошибочных знаний у учащихся с использованием комплексной методики превентивной деятельности учителя математики

*Обучающий этап* комплексной методики превентивной деятельности учителя математики предусматривает использование тех компонентов превентивной деятельности

(анализ учебного материала, совокупность методических превенций, организационно-педагогические условия, современные компьютерные технологии — компоненты по-

следовательности превентивной деятельности), которые направлены на недопущение математических ошибок учащимися в процессе изучения нового материала.

Исходя из опыта работы учителем в школе, а также проведённого экспериментального исследования, мы пришли к выводу о том, что полностью избежать всех ошибок большинству учителей (особенно молодым) зачастую не представляется возможным. Причины могут скрываться в недостаточном учёте особенностей класса, специфики излагаемой темы и в мастерстве учителя. Поэтому в таких случаях переходят к *коррекционному этапу*, связанному с применением тех компонентов превентивной деятельности, которые направлены на ликвидацию математических ошибок у учащихся, сформировавшихся в процессе изучения нового материала. Цель коррекционного этапа состоит в реализации превентивной деятельности учителя математики при обучении трёх подвижных групп слабоуспевающих школьников, для которых нами разработаны три методики:

1) Методика обучения учащихся с использованием заданий пошагового контроля;

2) Методика обучения учащихся с использованием заданий, направляющих учащихся на нахождение правильного решения;

3) Методика обучения учащихся с использованием заданий и средств, развивающих интерес к изучаемому материалу.

Таким образом, можно более детально представить последовательность осуществления превентивной деятельности учителя математики при обучении учащихся по одной теме (рисунок 2).

В данной статье мы остановимся более подробно на реализации обучающего этапа комплексной методики превентивной деятельности учителя математики по предупреждению типичных математических ошибок учащихся при изучении раздела «Разложение многочленов на множители» компонента «Алгебра» 7 класса. О трудности изучения тем данного разде-

ла свидетельствуют как сами разработчики учебно-методических комплексов по математике (Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьёва, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин; Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский), так и результаты проведённого анкетирования учителей.

Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьёва, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин отмечают, что применение формул сокращённого умножения от суммы выражений к квадрату двучлена, т. е. к произведению, значительно труднее. «Здесь надо уметь в «подозреваемом» трёхчлене вычленив структуру вида  $\square^2 + \Delta^2 \pm 2 \cdot \square \cdot \Delta$ , где вместо квадрата и треугольника надо записать члены соответствующего двучлена и затем записать его в квадрате:  $(\square + \Delta)^2$ . Большинству учащихся это сделать непросто» [3, с. 119].

Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский говорят о том, что разложение многочлена на множители «значительно более сложное и не всегда выполнимо. При выполнении разложения многочлена на множители ученик с неизбежностью должен пользоваться методом проб, поскольку не каждая возможная группировка даёт нужный результат» [2, с. 121].

В соответствии с компонентами последовательности превентивной деятельности, реализуемыми на обучающем этапе комплексной методики превентивной деятельности учителя математики, необходимо:

*Во-первых, провести анализ материала главы «Разложение многочленов на множители» с предварительным выделением возможных затруднений учащихся при его изучении и выявлении причин, приводящих к этим затруднениям.*

При разложении многочленов на множители у учащихся возможны затруднения:

1) с выделением общего множителя в записи многочлена;

2) оставлением числового коэффициента (единицы или минус единицы) в том из членов многочлена, который равен или противоположен выносимому множителю, например:  $-63ab^2 - 7ab + 84a^3b$ ;

3) вычислением показателей степени членов многочлена, которые остаются в

Обучающий этап

Коррекционный этап

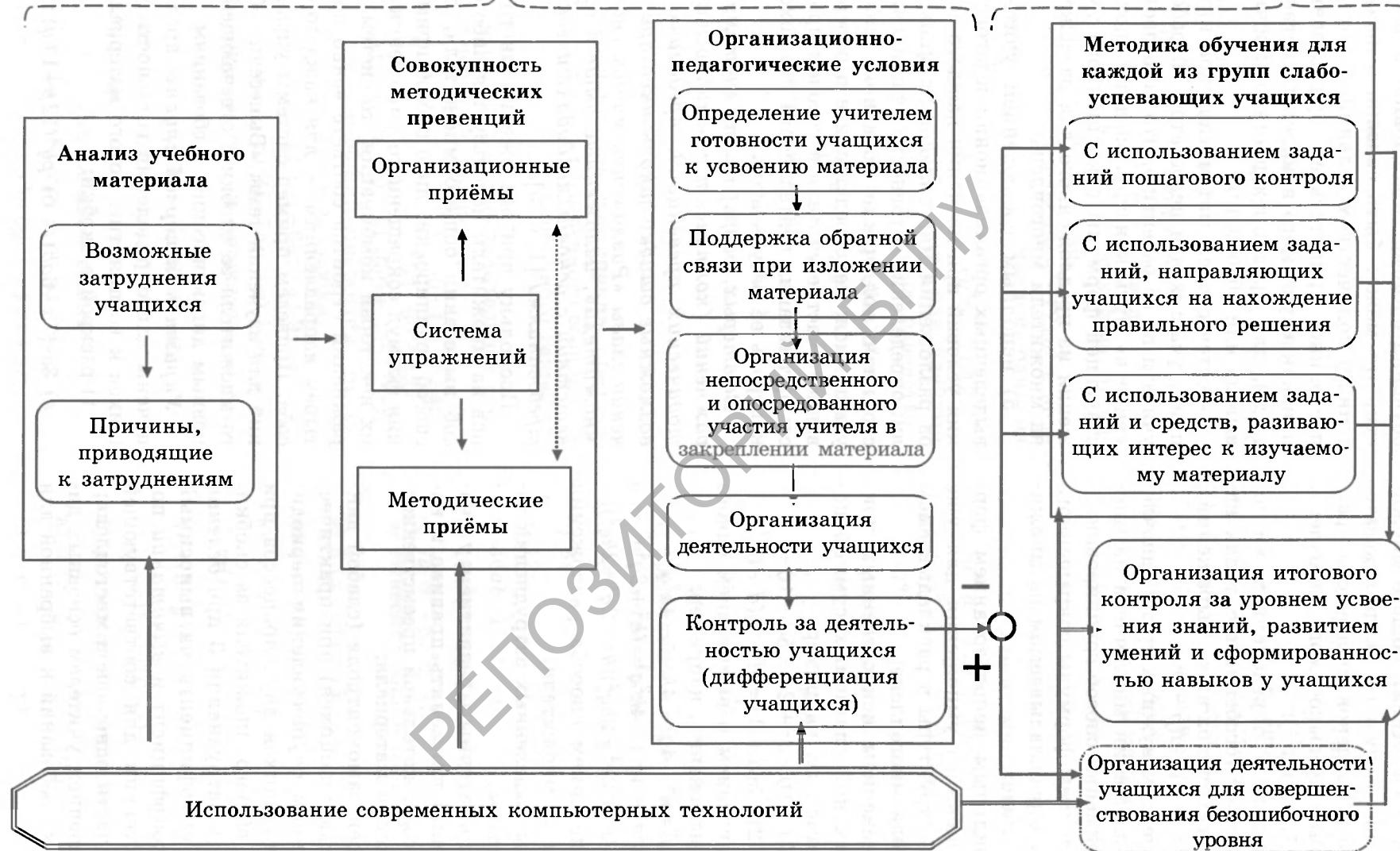


Рисунок 2 — Реализация последовательности этапов осуществления превентивной деятельности учителя математики для формирования безошибочных знаний учащихся

скобках после вынесения общего множителя (особенно в случаях, когда показатели степеней одночленов многочлена кратны коэффициенту выносимого одночлена, например:  $18t^9 - 45t^{18}$ );

4) правильным определением числовых множителей (особенно в случаях наличия противоположных выражений), например:  $s(t - p) + d(p - t)$ ;

5) выявлением нужных групп одночленов при разложении многочлена на множители, применяя способ группировки;

6) выделением формулы сокращённого умножения в раскладываемом на множители многочлене;

7) правильным использованием формул сокращённого умножения для уже выделенной структуры в раскладываемом на множители многочлене;

8) применением искусственных приёмов: а) заменой слагаемых суммой подобных слагаемых, например:

$$d^2 + 7d + 10 = d^2 + 2d + 5d + 10 = d(d + 2) + 5(d + 2) = (d + 2)(d + 5);$$

б) прибавлением и вычитанием одного и того же выражения, например:

$$k^4 + 4q^8 = k^4 + 4q^8 + 4k^2q^4 - 4k^2q^4 = (k^4 + 4k^2q^4 + 4q^8) - 4k^2q^4 = (k^2 + 2q^4)^2 - (2kq^2)^2 = (k^2 + 2q^4 - 2kq^2)(k^2 + 2q^4 + 2kq^2);$$

9) определением способа разложения многочлена на множители.

**Причины выделенных затруднений зачастую связаны:**

1) с недостаточным развитием у учащихся умений применять правила и нарушением содержательной преобладающей в изложении материала;

2) потерей самоконтроля (слабой внимательностью учащихся) при практически мгновенном осуществлении периодически сменяющихся двух процессов при вынесении общего множителя за скобки. Например, в затруднении 3 при делении числового коэффициента на выносимый числовой коэффициент и вычитании показателя степени для соответствующей буквенной части одночленов многочлена;

3) нарушением учителем основных дидактических требований к выбранной для

обучения системе упражнений, в частности, это может быть связано с недостаточным количеством заданий, в которых постоянно присутствует существенный признак изучаемого понятия (действия и т. д.), для предупреждения ошибочного вывода или обобщения;

4) отсутствием математической интуиции у учащихся и недостаточной работой учителя по её развитию, что не позволяет «видеть» путь конструирования соответствующей формулы сокращённого умножения из предложенного для разложения на множители многочлена;

5) неполным соблюдением учителем выделенных организационно-педагогических условий при изучении каждого способа разложения многочленов на множители: определение готовности учащихся; постоянная поддержка обратной связи с учащимися; непосредственное и опосредованное участие учителя в учебном процессе; организация деятельности учащихся и контроль её результатов.

*Во-вторых, разработать систему упражнений (компонент совокупности методических превенций), предваряющую возможные ошибки школьников при изучении главы «Разложение многочленов на множители», изложенные выше в соответствии с основными дидактическими требованиями [1, с. 5].*

Поскольку при разложении многочленов на множители используется либо способ вынесения общего множителя, либо способ группировки, либо способ применения формул сокращённого умножения или их некоторая комбинация, то система упражнений строится соответственно по четырём направлениям — для каждого способа. Приведём пример системы упражнений для изучения темы «Вынесение общего множителя за скобки», отвечающей основным дидактическим требованиям.

**Упражнения первой группы** предназначены для определения готовности учащихся к восприятию нового материала:

1) раскройте скобки:

а)  $3a \cdot (7a - 6ab)$ ; б)  $pq^2(12p + 1 + q)$ ;

2) запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а)  $12f - 4 - 5(f + 6 - 7f^2) + 6(f^2 - 4f + 7)$ ;

б)  $-(h + 5g - 4) + (-h + 4g + 3) \cdot (-9)$ ;

3) найдите разность алгебраических выражений:

а)  $-k^2$  и  $5k^2l - k^2$ ; б)  $-k^2$  и  $-5k^2l + k^2$ ;

4) представьте многочлен

$$5n^3 - 7n^6 - 9n^2 - 3 \text{ в виде:}$$

а) суммы одночлена и трёхчлена; б) разности двучлена и двучлена;

5) представьте одночлен  $-12xy^3$  в виде произведения двух одночленов, один из которых равен:

а)  $6y^2$ ; б)  $-4xy$ ; в)  $xy^3$ ; г)  $12$ ;

6) замените многоточия одночленами так, чтобы получилось верное равенство

$$11a^2b^4(\dots - 2a^2b + \dots) = -33a^3b^5 - \\ - 22a^4b^5 + 55a^2b^9;$$

7) выполните деление:

а)  $(9f - 12g) : 3$ ;

б)  $(8f - 24g - 4) : (-4)$ ;

в)  $(-17fh + 5h) : h$ ;

г)  $(-kt - 2k^2t + 4k^3t^4) : (kt)$ .

Упражнения *второй группы* предназначены для непосредственного восприятия нового материала и первичного закрепления полученных знаний:

1) используя распределительное свойство умножения, вычислите:

а)  $28 \cdot 4 + 28 \cdot 5$ ; б)  $-65 \cdot 4 + 40 \cdot 4$ ;

в)  $-80 \cdot 7 - 60 \cdot 7$ ; г)  $134 \cdot 99 + 134 \cdot 1$ ;

д)  $251 \cdot 25 - 1 \cdot 25$ ; е)  $356 + 356 \cdot 999$ ;

2) назовите общий множитель многочлена и вынесите его за скобки:

а)  $5 \cdot p + 5 \cdot 1$ ; б)  $6 \cdot 1 - 6a$ ; в)  $9x - 9$ ;

г)  $2a + 2b$ ; д)  $7f - 7h$ ; е)  $15y + 15z$ ;

3) вынесите общий множитель за скобки:

а)  $3 \cdot 5 - 3a$ ; б)  $3a + 15$ ; в)  $9b - 36$ ;

г)  $48 + 12y$ ; д)  $15 \cdot 2y - 15 \cdot 3h$ ;

е)  $6m + 8k$ ;

4) разложите на множители:

а)  $1 \cdot b + ba$ ; б)  $xy + y$ ; в)  $z - yz$ ;

г)  $ab + ac$ ; д)  $xb - by$ ; е)  $zx + yz$ ;

5) вынесите общий множитель за скобки:

а)  $1 \cdot m - m \cdot b$ ; б)  $m + m \cdot m$ ; в)  $m^2 - m$ ;

г)  $b^2 + b^3$ ; д)  $d^5 - d^4$ ; е)  $f^6 + 4f^2$ .

Упражнения *третьей группы* предназначены для предоставления возможности осознания (осмысления) алгоритма решения данного вида упражнений и формирования первичных умений:

1) вынесите общий множитель за скобки:

а)  $2 \cdot 4y + 3x \cdot 4y$ ; б)  $35mn - 25m$ ;

в)  $1 \cdot 4p + 36pq$ ; г)  $7bc - 7b$ ;

д)  $-21xy - 21y$ ; е)  $-8ab + 24bc$ ;

2) разложите на множители:

а)  $5a^3 \cdot a^2 - 17a^2$ ; б)  $7a^8 + 12a^5$ ;

в)  $21m^6 + 7m^8$ ; г)  $28x^8 - 42x^5$ ;

д)  $18t^9 - 45t^{18}$ ; е)  $35y^{10} + 30y^5$ ;

3) представьте в виде произведения многочлен:

а)  $a^2b \cdot a^2b^2 + 1 \cdot a^2b^2$ ; б)  $x^7y^5 - x^4y^3$ ;

в)  $-y^2z + 2y^5z^6$ ; г)  $1 \cdot ab - ab^2 + a^2b$ ;

д)  $x^3b^4 - x^4b^3 + x^3b^3$ ;

е)  $a^3b^4c^5 - a^4b^5c^3 + a^5b^4c^3$ ;

4) представьте в виде произведения одночлена и трёхчлена:

а)  $2r^4 \cdot 7r^5 + r^2 \cdot 7r^5 - 4 \cdot 7r^5$ ;

б)  $8s^9 + 12s^7 + 8s^6$ ;

в)  $12t^{11} - 24t^5 - 6t^9$ ;

г)  $36ab - 18ab^2 + 6a^2b$ ;

д)  $18x^3b^4 - 22x^4b^3 + 16x^3b^3$ ;

е)  $7a^3b^4 - 6a^4b^5 + 5a^5b^4$ ;

5) вынесите общий множитель за скобки:

а)  $5 \cdot (x + y) + a \cdot (x + y)$ ;

б)  $x \cdot (a + b) - 1 \cdot (a + b)$ ;

в)  $(z - y) + f(z - y)$ ;

г)  $m(n - 9) + (n - 9)p$ ;

д)  $x(3 + y) + 6(3 + y)$ ;

е)  $(6 - c)b - 11(6 - c)$ ;

6) разложите на множители:

а)  $a \cdot (x - y) + (-1) \cdot (x - y)$ ;

б)  $b(x - y) + (y - x)$ ;

в)  $(-1)(y-z)+c(y-z)$ ;

г)  $(z-y)+p(y-z)$ ;

д)  $m(a-b)-n(b-a)$ ;

е)  $f(t-s)+g(s-t)$ ;

7) представьте выражение в виде произведения двух двучленов:

а)  $5y(p-q)-3(q-p)$ ;

б)  $r(2z-5h)+3p(5h-2z)$ ;

в)  $f^2(v-w)+g(w-v)$ ;

г)  $q^3(7-e)-t(e-7)$ ;

д)  $-(p-i)+4c(i-p)$ ;

е)  $(a-b)-5h(b-a)$ .

Упражнения *четвёртой группы* носят дифференцированный характер и направлены на развитие умений через закрепление знаний. Ученики выполняют в каждом задании по три примера в зависимости от подготовки.

1) выразите произведением многочлен:

а) 1.  $14ab-35bc$ ;

2.  $16xy+40zn$ ;

3.  $-6hf-18f^4$ ;

б) 1.  $-14p^3-7pq$ ;

2.  $25a+15b-20ab$ ;

3.  $8xy-17xy^2+16x^2y^2$ ;

в) 1.  $14a^2z-28abz+14b^2z$ ;

2.  $8n^2m^2-8nm^2+24m^2d$ ;

3.  $-8s^2t^3-72s^4t^4-12ts^6$ ;

2) разложите на множители:

а) 1.  $c(x-y)-(x-y)$ ;

2.  $a(5t+4)+b(5t+4)-c(5t+4)$ ;

3.  $-8h^2(a-2b+c)-3z^3(a-2b+c)$ ;

б) 1.  $(m+n)-a(m+n)$ ;

2.  $6x(3k-2q)+7y(3k-2q)-2d(3k-2q)$ ;

3.  $-4p(a^2-ab+b^2)+8q(a^2-ab+b^2)-32pq(a^2-ab+b^2)$ ;

в) 1.  $2(p+q)+b(p+q)-(p+q)$ ;

2.  $9(-3a+2-a^2)+8a^2(-3a+2-a^2)-11a(-3a+2-a^2)$ ;

3.  $m(a+b)(c-d)-(a+b)q(c-d)+(a+b)(c-d)y$ ;

3) заполните пропуски так, чтобы получилось выражение, тождественно равное многочлену  $-28a^3b^5+14a^6b^3-7a^2b^2+35a^3b^4$ :

а) 1.  $14a^3b^3(\dots+\dots)-7a^2b^2+35a^3b^4$ ;

2.  $-28a^3b^5+7a^2b^2(\dots-\dots)+35a^3b^4$ ;

3.  $-28a^3b^5+14a^6b^3-7a^2b^2(\dots-\dots)$ ;

б) 1.  $7a^2b^2(-\dots+\dots-\dots)+35a^3b^4$ ;

2.  $-28a^3b^5-7a^2b^2(-\dots+\dots-\dots)$ ;

3.  $14a^3b^3(-\dots+\dots)+7a^2b^2(-\dots+\dots)$ ;

в) 1.  $14a^6b^3-7a^2b^2(\dots+\dots-\dots)$ ;

2.  $7a^3b^3(-\dots+\dots+\dots)-7a^2b^2$ ;

3.  $7a^3b^4(-\dots+\dots)+7a^2b^2(\dots-\dots)$ ;

4) заполните пропуски так, чтобы получилось выражение, тождественно равное многочлену  $36x^7y^5-27x^5y^4+45x^3y^6-9x^3y^4$ :

а) 1.  $\dots(4x^2y-3)+45x^3y^6-9x^3y^4$ ;

2.  $36x^7y^5\dots(3x^2-5y^2)-9x^3y^4$ ;

3.  $36x^7y^5-27x^5y^4\dots(5y^2-1)$ ;

б) 1.  $\dots(4x^3y-3x^2+5y^2)-9x^3y^4$ ;

2.  $36x^7y^5\dots(3x^2-5y^2+1)$ ;

3.  $\dots(4x^2y-3)\dots(5y^2-1)$ ;

в) 1.  $-27x^5y^4\dots(4x^3y+5y^2-1)$ ;

2.  $\dots(-4x^3y+3x^2+1)+45x^3y^6$ ;

3.  $\dots(3x^2+5y^2)\dots(4x^3y-1)$ ;

5) упростите выражение:

а) 1.  $12(i+j)+12(i-j)$ ;

2.  $-x^2(5y+2)+(2y+5)x^2$ ;

3.  $(a+b)(2c-3)-(a+b)(5c-4)$ ;

б) 1.  $3fq(2f-q)+3fq(f+2q)$ ;

2.  $-8h^2p(a^2+6d)+(6a^2+d)\cdot 8h^2p$ ;

3.  $(m-n)(9k+7)-(m-n)(15-3k)$ ;

в) 1.  $6a^2(9-4b^3)+6a^2(4+9b^3)$ ;

2.  $-11s^3t^4(2s^2+3t^3)+(3s^2+2t^3)\cdot 11s^3t^4$ ;

3.  $(3y+x)(12y-9x)-(3y+x)(9y+10x)$ ;

б) вынесите общий множитель за скобки:

а) 1.  $(a+b)\cdot(a+b)-2(a+b)$ ;

2.  $b(c-d)+(c-d)^2$ ;

3.  $17(e-6f)-(e-6f)^2$ ;

б) 1.  $5m(s-t)+(s-t)\cdot(s-t)$ ;

2.  $(p+2a)^2-14s^3(p+2a)$ ;

3.  $-21ij(4ij+13)+(4ij+13)^2$ ;

в) 1.  $(x+z)^2-15v(x+z)$ ;

2.  $-29w^5(19-3m)-(19-3m)^2$ ;

3.  $(-sr^2+3n)^2+sr^2(-sr^2+3n)$ ;

7) представьте многочлен в виде произведения:

а) 1.  $(a+b)^2+(a+b)^3$ ;

2.  $2(t-3x)^4-(t-3x)^3$ ;

3.  $(f^2+h^2)^2-(f^2+h^2)^2\cdot g$ ;

б) 1.  $(m-3n)^4+(m-3n)^3$ ;

2.  $d(a+b)^3-(a+b)^2$ ;

3.  $(p^3+64)^3-(p^3+64)^3(1-q^2)$ ;

в) 1.  $(9i^2-2)^2+(9i^2-2)^4$ ;

2.  $(s^3-y^3)^3-(s^3-y^3)^4$ ;

3.  $(z^6+1)(36-z^5)^6-(36-z^5)^6$ ;

8) вынесите общий множитель за скобки:

а) 1.  $4(p-q)-3(q-p)$ ;

2.  $(a-b)^2+(b-a)$ ;

3.  $14s(r-b)-(b-r)^2$ ;

б) 1.  $m(a-b)+3(a-b)+7n(b-a)$ ;

2.  $2(m-n)^2-(n-m)$ ;

3.  $13t(x-y)^3-(y-x)^2$ ;

в) 1.  $5(p-q)-3d(p-q)+6(q-p)$ ;

2.  $4(x-y)^2+3(y-x)$ ;

3.  $31(m-n)^3+12k(n-m)^2$ .

*Пятая группа* упражнений предназначена для формирования навыка разложения многочлена на множители с использованием способа вынесения общего множителя за скобки. В заданиях из других содержательных линий школьного курса математики необходимо применить имеющиеся знания и умения.

1) Найдите значение выражения, предварительно представив многочлен в виде произведения:

а)  $4a(b-c)+3b(c-b)+2c(b-c)$  при  $a=4,25$ ;  $b=6\frac{2}{3}$ ;  $c=-2$ ;

б)  $(v-w)(12r+7)-(v-w)(12r-15)$  при  $v=2,5$ ;  $w=\frac{8}{11}$

2) Решите уравнение:

а)  $x^2+6x=0$ ; б)  $y(y-3)-5y=0$ .

3) При каких значениях переменных равны значения выражений:

а)  $5z(z+4)$  и  $10(z+4)$ ;

б)  $6x(5x-3)$  и  $12(3-5x)$ .

4) Докажите тождество:

а)  $16xy-16xy(x^2-1)=(3x-2y)(4x^3-8x)-(3x+2y)(4x^3-8x)$ ;

б)  $(3t-7s)(5n-2m)-(6s-2t)(5n-2m)=5(5t-13s)n-2(5t-13s)m$ .

5) Докажите, что значение выражения:

а)  $21^9-21^8$  делится на 20;

б)  $59^7+59^8$  делится на 60.

Аналогичным образом строятся системы упражнений для формирования навыков при изучении тем «Разложение многочленов на множители способом группировки», «Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения», «Разложение многочленов на множители с использованием разных способов».

*В-третьих, в продумывании организационных приёмов — компонент совокуп-*



ности методических превенций — способствующих снижению у учащихся ошибок при изучении главы «Разложение многочленов на множители». Организационные приёмы подбираются исходя из особенностей рассматриваемой темы, класса и профессиональной подготовленности учителя. Будет полезным использовать показательно-образцовые решения в их различных вариантах.

**Вариант 1.** Один из сильных учащихся выполняет задание на доске, а слабые учащиеся следят за решением. Потом сильный учащийся решает аналогичный пример на доске, слабые выполняют свои задания синхронно с работой на доске, задавая при необходимости свои вопросы.

**Вариант 2.** Работа по образцу, предложенному на доске, мультимедийном экране или на карточках.

**Вариант 3.** Работа на компьютере с использованием аудио- и видеоматери-

алов, демонстрирующих образец решения.

**В-четвёртых, в продумывании методических приёмов — компонент совокупности методических превенций — по обоснованию того, что является правильным действием при изучении главы «Разложение многочленов на множители», а что неправильным (ошибочным) для недопущения причин, приводящих к возникновению затруднений у школьников.**

При изучении этого раздела можно использовать **методический приём визуализированного алгоритма с числовыми контрпримерами**. Приём реализуется в два или три этапа (в зависимости от появления ошибок в действиях учащихся): 1) визуализированное изложение нового материала; 2) построение алгоритма решения определённого типа задач; 3) использование числовых контрпримеров.

**Тема «Вынесение общего множителя за скобки»**

**I.** Для визуализации алгоритма приводится схема-образец (рисунок 3).

**II.** Алгоритм:

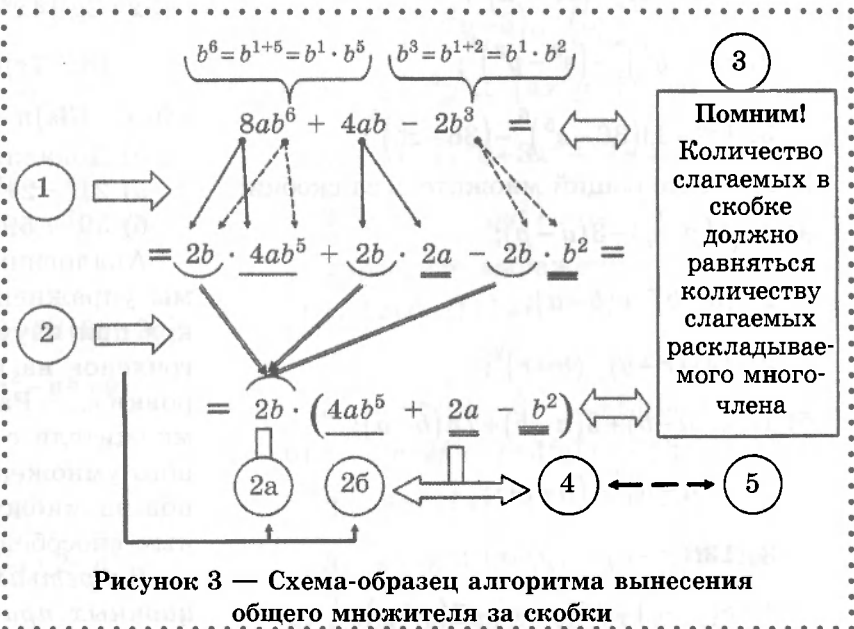
1. Разложите каждый член многочлена на множители так, чтобы среди них был общий множитель;

2. Примените распределительное свойство умножения: 2а) запишите выделенный общий множитель; 2б) затем в скобках сумму оставшихся сомножителей;

3. Проверьте количество слагаемых в скобке (их должно быть столько же, сколько и у первоначального многочлена);

4. Проверьте, нет ли общего множителя у всех одночленов в скобке. Если есть, то выполните пункты 2—4 ещё раз.

5. Если пункты 2—4 выполняли более одного раза, то перемножьте одночлены, стоящие перед скобкой.



**Рисунок 3 — Схема-образец алгоритма вынесения общего множителя за скобки**

## Тема «Разложение многочленов на множители способом группировки»

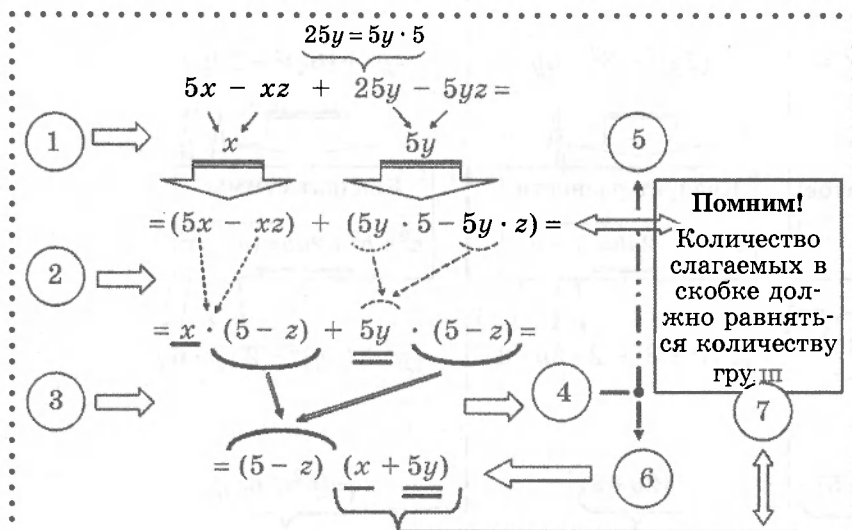


Рисунок 4 — Схема-образец алгоритма разложения многочленов на множители способом группировки

I. Для визуализации алгоритма приводится схема-образец (рисунок 4).

Первоначально учащимся можно сообщить алгоритм в приведённом ниже виде. В дальнейшем можно его дополнить с учётом затруднения 8, описанного выше — при рассмотрении возможных затруднений у учащихся.

## II. Алгоритм:

1. Объединить члены многочлена в группы, имеющие общий множитель.

2. Для каждой группы множителей применить алгоритм вынесения общего множителя за скобки.

3. Сравнить выражения в скобках, которые остались после выполнения пункта 2.

4. Если эти выражения являются одинаковыми, то 4а), иначе 4б): 4а) это и есть общий множитель для всех групп, далее выполните пункт 6; 4б) иначе воспользуйтесь пунктом 5.

5. Если эти выражения неодинаковые, то попробуйте по-другому объединить члены многочлена в группы, имеющие общий множитель, и выполните ещё раз пункты 3—4.

6. Воспользуйтесь распределительным свойством умножения: 6а) запишите выделенный общий множитель; 6б) затем в скобках — сумму оставшихся сомножителей.

7. Проверьте количество слагаемых в скобке (их должно быть столько же, сколько было выделено групп из первоначального многочлена с общими множителями).

## Тема «Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения»

I. Для визуализации алгоритма приводится схема-образец (рисунок 5).

## II. Алгоритм:

1. Замените какие возможно одночлены многочлена одночленами второй степени.

2. Определите формулу сокращённого умножения, сравнив многочлен с известными формулами.

3. Если необходимо, продолжите изменение раскладываемого многочлена, выделив в нём удвоенное произведение.

4. Представьте многочлен в виде произведения, используя выделенные основные элементы формулы сокращённого умножения.

5. Сравните полученный вариант разложения многочлена на множители с результатом применения формулы.

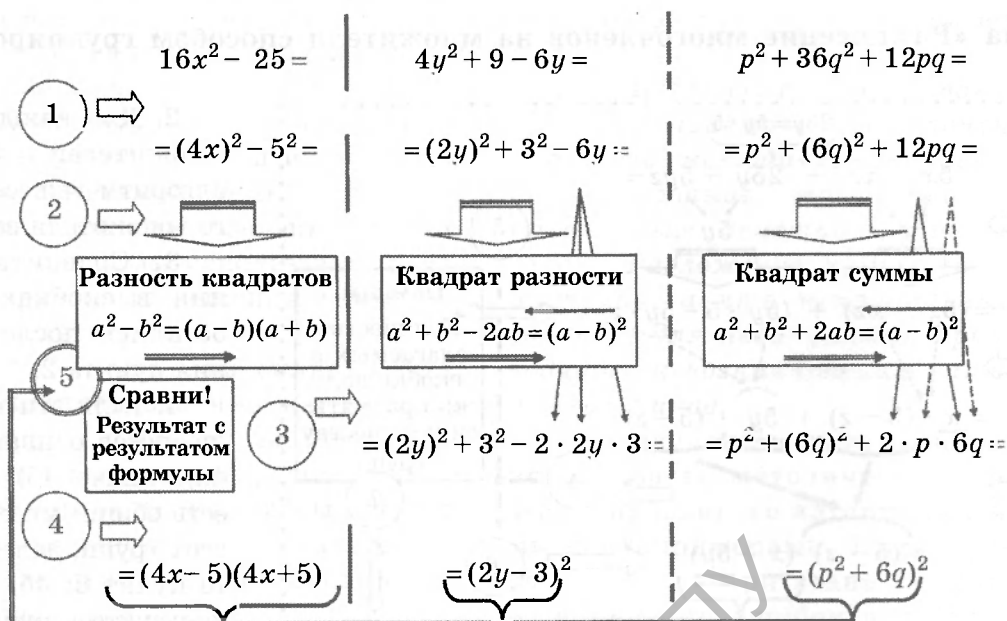


Рисунок 5 — Схема-образец алгоритма разложения многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения

При изучении темы «Разложение многочленов на множители с использованием разных способов» предполагается, что наряду со знанием рассмотренных выше трёх способов разложения многочлена на множители учащиеся должны овладеть некоторыми их комбинациями. Характер этих комбинаций и уровень их сложности настолько разнообразны, что выделить некоторые совершенно типичные ситуации трудно. Поэтому как минимум обязательным является умение выполнять задания, состоящие из применения комбинаций двух способов разложения многочлена на множители. На данном этапе

учащимся целесообразно показать решение примеров и предложить самостоятельно составить необходимые схемы-образцы и алгоритмы решения.

Для обоснования того, что является правильным действием при изучении нового материала, а что ошибочным, предполагается наряду со схемой-образцом и алгоритмом использовать числовые контрпримеры.

**Пример 1** (затруднение 1).

Представьте многочлен  $5a^6b^2 - 4a^3b^6$  в виде тождественно равного ему выражения  $a^3b^2(\dots)$ , заменив многочлены нужными одночленами.

Неправильное решение	Числовой контрпример	Правильное решение
$5a^6b^2 - 4a^3b^6 =$ $= a^3b^2(5a^2b - 4ab^3)$	При $a = 1$ $b = 2$ : 1) $5a^6b^2 - 4a^3b^6 = 6 \cdot 1 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 64 =$ $= 4 \cdot (6 - 64) = 4 \cdot (-58);$ 2) $a^3b^2(5a^2b - 4ab^3) = 1 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 1 \cdot 2 -$ $- 4 \cdot 1 \cdot 8) = 4 \cdot (10 - 32) = 4 \cdot (-22);$ 3) $4 \cdot (-58) \neq 4 \cdot (-22)$	$5a^6b^2 - 4a^3b^6 =$ $= a^3b^2(5a^3 - 4b^4)$  Проверьте правильность решения самостоятельно

**Пример 2** (затруднение 2).

Вынесите общий множитель за скобки:  $-63ab^2 - 7ab + 84a^3b$ .

Неправильное решение	Числовой контрпример	Правильное решение
$-63ab^2 - 7ab + 84a^3b -$ $= 7ab \cdot (-9b + 12a^2)$	При $a = 1$ $b = 2$ : 1) $-63ab^2 - 7ab + 84a^3b = -63 \cdot 1 \cdot 4 - 7 \times 1 \cdot 4 + 84 \cdot 1 \cdot 2 = -252 - 28 + 168 = -112$ ; 2) $7ab \cdot (-9b + 12a^2) = 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-9 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = 14 \cdot (-6) = -84$ ; 3) $-112 \neq -84$	$-63ab^2 - 7ab + 84a^3b = 7ab \times$ $\times (-9b) - 7ab \cdot 1 + 7ab \cdot 12a^2 =$ $= 7ab \cdot (-9b - 1 + 12a^2)$ <p>Проверьте правильность решения самостоятельно</p>

**Пример 3** (затруднение 3).

Разложите на множители многочлен  $30y^{12} + 48y^6$ .

Неправильное решение	Числовой контрпример	Правильное решение
$30y^{12} + 48y^6 = 6y^6(5y^2 + 8y)$	При $y = -1$ : 1) $30y^{12} + 48y^6 = 30 + 48 = 78$ ; 2) $6y^6(5y^2 + 8y) = 6 \cdot (5 - 8) = -18$ ; 3) $78 \neq -18$ . Заметим, что $y = 1$ не позволяет выявить допущенную ошибку	$30y^{12} + 48y^6 = 6y^6(5y^6 + 8)$ <p>Проверьте правильность решения самостоятельно</p>

**Пример 4** (затруднение 4).

Используя метод группировки, разложите многочлен  $st - sp + dp - dt$  на множители.

Неправильное решение	Числовой контрпример	Правильное решение
$st - sp + dp - dt = (st - sp) +$ $+ (dp - dt) = s(t - p) + d(p - t) =$ $= (t - p)(s + d)$	При $d = 1$ , $p = 2$ , $s = 3$ , $t = 4$ : 1) $st - sp + dp - dt = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 1 \times 4 = 12 - 6 + 2 - 4 = 4$ ; 2) $(t - p)(s + d) = (4 - 2) \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 4 = 8$ ; 3) $4 \neq 8$	$st - sp + dp - dt = (st - sp) +$ $+ (dp - dt) = s(t - p) + d(p - t) =$ $= s(t - p) - d(-p + t) =$ $= (t - p)(s - d)$ <p>Проверьте правильность решения самостоятельно</p>

**Пример 5** (затруднение 6).

Представьте многочлен  $g^2 + 4g + 4$  в виде квадрата суммы.

Неправильное решение	Числовой контрпример	Правильное решение
$g^2 + 4g + 4 = (g + 4)^2$	При $g = 1$ : 1) $g^2 + 4g + 4 = 1 + 4 + 4 = 9$ ; 2) $(g + 4)^2 = (1 + 4)^2 = 25$ ; 3) $9 \neq 25$	$g^2 + 4g + 4 = g^2 + 2 \cdot 2 \cdot g + 2^2 =$ $= (g + 2)^2$ <p>Проверьте правильность решения самостоятельно</p>

*В-пятых, в выявлении и соблюдении организационно-педагогических условий, формирующих у учащихся прочные знания при изучении раздела «Разложение многочленов на множители», включающих:*

- определение готовности учащихся к усвоению нового материала;
- постоянную поддержку обратной связи с учащимися в процессе изложения нового материала;
- непосредственное и опосредованное участие педагога при закреплении знаний, развитии умений и формировании навыков у учащихся по новой теме;
- реализацию целенаправленной учебной деятельности школьников для усвоения нового материала и своевременный контроль её результатов.

Для эффективной реализации превентивной деятельности учителя математики при обучении школьников нельзя забывать о скрытом потенциале для усвоения нового материала такого этапа обучения, как *домашняя работа*. Учебная работа дома принципиально отличается от учебной работы в школе прежде всего тем, что осуществляется без непосредственного присутствия учителя в момент её выполнения. Поэтому задача учителя при подготовке домашнего задания по теме состоит в оказании максимального опосредованного влияния для предупреждения математических ошибок учащихся при её выполнении. Школьник самостоятельно выбирает время для её выполнения, определяет наиболее приемлемый для него ритм и темп работы.

Исходя из опыта работы, анализа методической литературы и проведённого педагогического эксперимента, мы пришли к выводу о целесообразности использования *разноуровневых дозированных домашних заданий*: для слабоуспевающих учащихся первой и второй подвижных групп (вариант 1); слабоуспевающих учащихся третьей подвижной группы (вариант 2); успевающих учащихся (вариант 3).

Предлагаемая дифференциация домашних заданий связана с учётом: а) способностей учащихся к учебной деятельности (скоростью и уровнем сознательного

безошибочного усвоения материала); б) умений организовывать свою деятельность; в) уровня интереса, проявляемого к изучаемой теме; г) умений ориентироваться в имеющемся у учащегося банке знаний.

В каждом из трёх вариантов домашних заданий все задания одинаковы по тематике, но различны: а) по форме подачи материала; б) последовательности предлагаемых заданий; в) степени трудности.

Например, домашняя работа по теме «Вынесение общего множителя за скобки» может быть предложена учащимся в следующем виде.

### Вариант 1

#### Минимальная дозировка

1) Используя распределительное свойство умножения, вычислите:

- а)  $27 \cdot 567 - 27 \cdot 837$ ;
- б)  $-1009 + 1009 \cdot 501$ ;
- в)  $127 \cdot 1,38 + 973 \cdot 1,38$ ;
- г)  $2,41 \cdot 9,9 + 2,41$ .

2) Вместо многоточия (...) поставьте коэффициенты одночленов так, чтобы получились верные равенства:

- а)  $\dots d + \dots b = 36(d + b)$ ;
- б)  $12m - 16k = 4 \cdot (\dots m - \dots k)$ .

3) Используя задание 2 как образец, вынесите общий множитель за скобки:

- а)  $27t - 27f$ ;      б)  $56 + 16q$ ;
- в)  $24gh - 1 \cdot 24$ ;      г)  $7 + 49av - 35bw$ .

4) Вместо многоточия (...) поставьте нужные одночлены так, чтобы получились верные равенства:

- а)  $17mn + 5mk = \dots (17n + 5k)$ ;
- б)  $14t^6 - 9pt^4 = t^4 (\dots - \dots)$ .

Полученный результат проверьте умножением.

#### Средняя дозировка

5) Используя задание 4 как образец, разложите на множители выражение:

- а)  $33de - 14dc$ ;      б)  $17g^5 + 27g^7$ ;
- в)  $18m^7 - 24mt$ ;      г)  $x(x+9) - 7(x+9)$ .

6) Найдите значение разложенного в задании 5в выражения при  $m = -1$ ;  $t = \frac{1}{4}$ .

*Максимальная дозировка*

7) Используя разложение на множители многочлена из задания 5г, решите уравнение  $x(x+9)-7(x+9)=0$ .

**Вариант 2***Минимальная дозировка*

1) Вычислите наиболее рациональным способом значение выражений:

а)  $3,5 \cdot 0,21 + 3,5 \cdot 9,79$ ;

б)  $180 \cdot 5,214 - 180 \cdot 5,414$ ;

в)  $-3,57 \cdot 101 + 3,57$ .

2) В примеры вместо многоточия (...) соответственно поставьте числовые значения, полученные в задании 1, и в восстановленных многочленах вынесите общий множитель за скобки:

а)  $\dots b + 15$ ; б)  $44p + \dots q$ ;

в)  $5x^3y + \dots x^2 - x$ .

3) Вместо многоточия (...) поставьте нужные одночлены, чтобы получились верные равенства:

а)  $\dots d + \dots b = 36(d+b)$ ;

б)  $12m - 16k = 4 \cdot (\dots m - \dots k)$ ;

в)  $17mn + 5mk = \dots (17n + 5k)$ ;

г)  $14t^6 - 9pt^4 = t^4(\dots)$ ;

д)  $xyz - xz = xz(\dots)$ ;

е)  $35p^2d + 25p^3d = \dots (7 + \dots)$ .

Полученный результат проверьте умножением.

*Средняя дозировка*

4) Разложите на множители выражение:

а)  $7q^3t - 28q^7t$ ;

б)  $-27y^{18} - 9y^9$ ;

в)  $y(8n - 2s^2) - 3p(8n - 2s^2)$ ;

г)  $x(m-t) + y(t-m)$ .

*Максимальная дозировка*

5) Решите уравнение, предварительно разложив многочлен на множители:

а)  $m^2 + 17m = 0$ ;

б)  $13y(2y-7) - 26(2y-7) = 0$ .

**Вариант 3***Минимальная дозировка*

1) Найдите значение выражений:

а)  $37 \cdot 34,5 + 52,7 \cdot 37 + 37 \cdot 12,8$ ;

б)  $2 \frac{2}{25} \cdot (-17) + 219 \cdot 2 \frac{2}{25} - 2 \frac{2}{25} \cdot 83$ .

2) Разложите многочлен на множители:

а)  $8q^3t^2 - 40q^7t$ ;

б)  $10y^{10} + 15y^{15} - 5y^5$ ;

в)  $3(a-b) + 5h(a-b)$ ;

г)  $d(16t - 4k^2) + 3q^2(16t - 4k^2)$ .

3) Восстановите тождества:

а)  $-12x^7 - 28x^5 + 8x^6 - x^3 = \dots (12x^4 + 28x^2 + 8x^3 \dots 1)$ ;

б)  $36yh^2 - \dots + 45y^3h^6 = 36yh^2(\dots - h + \dots)$ .

*Средняя дозировка*

4) Вынесите общий множитель за скобки:

а)  $6x^2(m+5) - 6y^3(m+5)$ ;

б)  $7z(4p^2 + 5pq) - 7z(4q^2 + 5pq) + 7zp(2p - 3q)$ ;

в)  $(a-b)(12a-13b) + (b-a)(18a+5b)$ ;

г)  $5(x-y)^2 - 6(y-x)$ .

*Максимальная дозировка*

5) Решите уравнение:

а)  $(1,6x - 7,2)(x + 4) + (1,6x - 7,2)(3x + 4) = 0$ ;

б)  $5z(z^2 + 2z^3) - 10(z^2 + 2z^3) = 0$ .

Для того чтобы домашние задания играли действительно существенную роль в осуществлении превентивной деятельности учителя математики, недостаточно сконцентрировать внимание только на требованиях *разноуровневости и дозирования*. Необходимо также выполнять требования *своевременной и эффективной проверки и взаимосвязанности домашних заданий с диагностикой усвоения материала*. Результаты предварительной диагностики выставляются по желанию учащихся. Если предварительную диагности-

ку все учащиеся проходят на высоком безошибочном уровне, то предлагается итоговая диагностика, иначе учащиеся делятся на успевающих и слабоуспевающих (в свою очередь эти школьники подразде-

ляются на три подвижные группы). Далее их обучение осуществляется по индивидуально-групповым траекториям. Последующая «встреча» всех учащихся класса происходит на этапе итогового контроля.

### Заклучение

Методика комплексного осуществления превентивной деятельности учителя математики по курсу математики V—VII классов проходила экспериментальную проверку в средних школах № 47 и № 197 города Минска с 2004 по 2007 г.

Контрольные и экспериментальные классы определялись на основе анализа успеваемости учащихся: результатов проверочных и контрольных работ, а также текущих отметок по предмету по окончании первых четвертей в 2004/05, 2005/06 и 2006/07 учебных годах. Проведённый анализ позволил отобрать классы, которые на-

ходились в равных начальных условиях. Начиная со второй четверти, в экспериментальных классах обучение проводилось с использованием методики комплексного осуществления превентивной деятельности.

До эксперимента уровень безошибочных знаний, рассчитанный в контрольных и экспериментальных классах, был практически одинаковым. После проведения педагогического эксперимента этот уровень существенно отличается, о чём свидетельствуют результаты выполнения учащимися контрольных работ (рисунок 6).

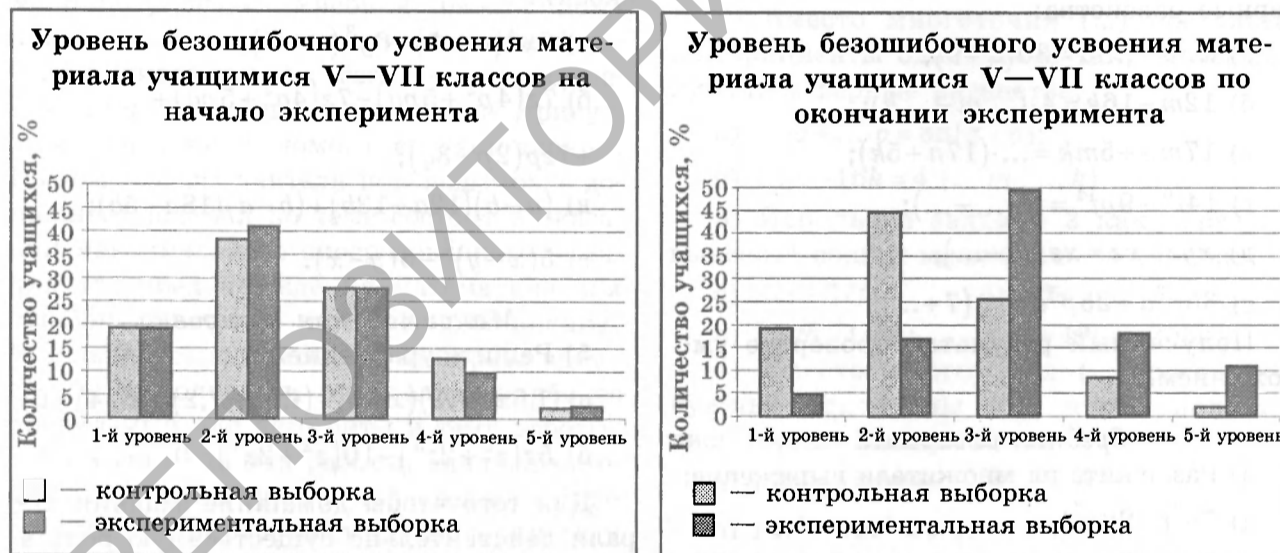


Рисунок 6 — Динамика изменения уровня безошибочного усвоения материала у учащихся V—VII контрольных и экспериментальных классов

Для контроля эффективности предлагаемой методики нами применялись как эмпирические, так и статистические методы. Полученные результаты позволяют говорить об эффективности разработан-

ной методики комплексного осуществления превентивной деятельности учителя математики по предупреждению типичных математических ошибок учащихся.

## Список использованной литературы

1. Зенько, С. И. Система упражнений для предупреждения математических ошибок учащихся в 5 классе: материалы в помощь студентам физ.-мат. фак-тов / С. И. Зенько; БГПУ. — Минск, 2006. — 116 с.
2. Латотин, Л. А. Математика в 7 классе: учеб.-метод. пособие для учителей учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский; пер. с бел. яз. И. П. Ефременко. — Минск : Народная асвета, 2004. — 192 с.
3. Математика в 7 классе: учеб.-метод. пособие для учителей учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. и бел. яз. обучения с 12-летним сроком обучения / Е. П. Кузнецова [и др.]. — 3-е изд. — Минск : Аверсэв, 2005. — 272 с.
4. Математика: готовимся к централизованному тестированию: Анализ ошибок. Комментарии к ответам. Тренировочные тесты / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. — Минск : Аверсэв, 2007. — 77 с.
5. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA-2006 / Г. С. Ковалева [и др.]. — Центр оценки качества образования ИСМО РАО. — М., 2007. — 98 с.
6. Централизованное тестирование: 2005: Анализ. Выводы. Рекомендации. Тесты / Н. Г. Гончар [и др.]; под ред. Н. С. Феськова; Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. В 2 ч. Ч 2. Математика. Физика. Химия. Биология. — Минск : РИКЗ, 2006. — 80 с.
7. TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades / Ina V.S. Mullis [and other] — Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. — 478 p.

Поступила в редакцию 10.04.2009 г.

