

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРЕНАЖЁРА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

А. В. Микашова, И. А. Пигаль,  
БГПУ (Минск)

Науч. рук. – к. ф.-м. н., доцент  
И. Н. Гуло

Большинство криволинейных интегралов сводится к обычным определённым интегралам. Вид этих интегралов зависит от следующих факторов:

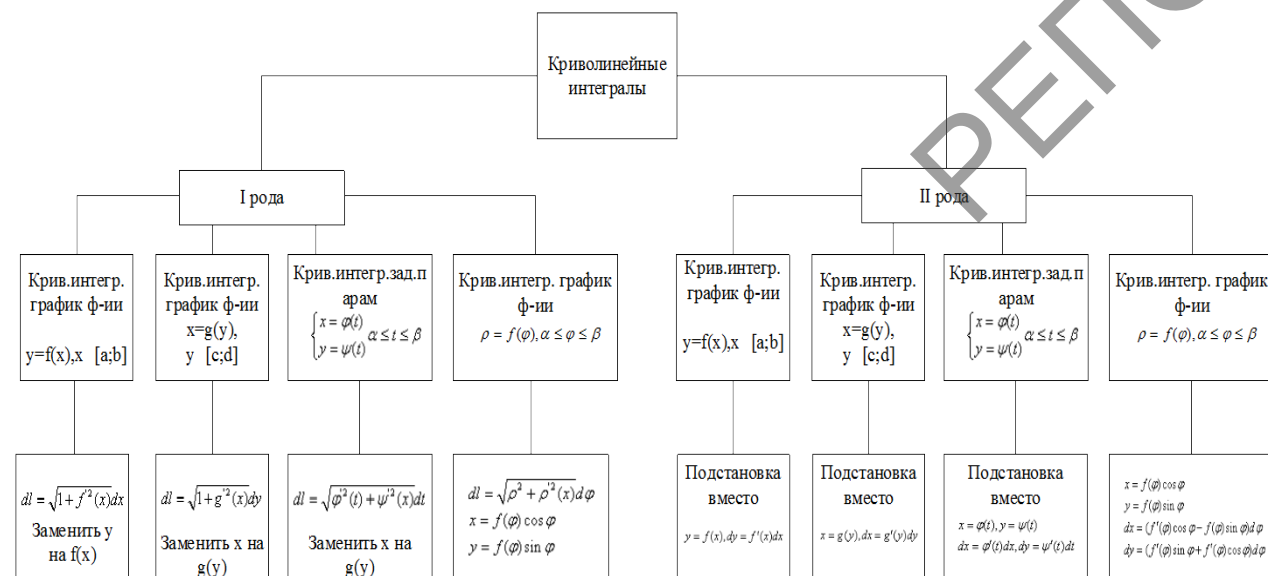
1. От рода криволинейного интеграла: определяет вид подынтегрального выражения. Если подынтегральное выражение имеет вид:

- $P(x, y)dl$ , то это криволинейный интеграл I рода;
- $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , то это криволинейный интеграл II рода.

2. От кривой, вдоль которой вычисляется криволинейный интеграл. Если кривая интегрирования  $AB$  является графиком функции:

- $y = f(x), x \in [a, b]$  или  $x = g(y), y \in [c, d]$ , тогда в подынтегральном выражении необходимо заменить, соответственно,  $y$  на  $f(x)$ ,  $x$  на  $g(y)$ ;
- заданной параметрически  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$  (точка  $A$  соответствует параметру  $\alpha$ , точка  $B$  параметру  $\beta$ ), тогда в подынтегральном выражении необходимо заменить,  $x$  на  $\varphi(t)$ ,  $y$  на  $\psi(t)$ ;
- заданной в полярной системе координат  $\rho = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$  (точка  $A$  соответствует значению  $\varphi = \alpha$ , а точка  $B$  значению  $\varphi = \beta$ ), тогда в подынтегральном выражении необходимо заменить, соответственно,  $x$  на  $f(\varphi) \cdot \cos \varphi$ ,  $y$  на  $f(\varphi) \cdot \sin \varphi$ .

При вычислении криволинейных интегралов предлагаем, в качестве руководства, следующую схему решения:



Проиллюстрируем на примере то, как ею пользоваться.

**Пример.** Вычислить интеграл  $\int_{AB} xy dl$ ,

кривая  $AB$  задана уравнениями  $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

**Решение.**

1. Определим род интеграла: так как подынтегральное выражение имеет вид  $P(x, y)dl$ , то это криволинейный интеграл I рода.

2. По условию кривая  $AB$  задана параметрически, поэтому дифференциал дуги вычислим по формуле  $dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$ , вместо  $x$  и  $y$  подставим функции, которые их задают.

3. Криволинейный интеграл сводится к определённому интегралу

$$xy dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3 \sin t \cdot 3 dt = 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt,$$

который можно вычислить поднесением под знак дифференциала.

В виртуальной обучающей среде Moodle разработан вспомогательный тренажёр, на котором отрабатываются понятия криволинейных интегралов I и II рода, их свойства, навыки вычисления. Пользователям предложены тесты, находящиеся в открытом доступе, которые содержат вопросы теоретического и практического планов, а также задания, позволяющие поэтапно вычислять криволинейные интегралы I и II рода. Материалы размещены в ресурсном центре физико-математического факультета БГПУ, что позволяет создавать сайты для онлайн-обучения.