КАНОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ НА ПОЧТИ ГИПЕРКОМПЛЕКСНОМ МНОГООБРАЗИИ

Богданович Сергей Адамович (Беларусь, Минск)

Пусть M^{4n} – риманово многообразие с римановой метрикой $\widetilde{g}$.

Тензорное поле J типа (1, 1) такое, что $J^2 = -id$, называется почти комплексной структурой на многообразии M^{4n}.

Почти гиперкомплексная структура на многообразии M^{4n} определяется парой почти комплексных структур J_1 и J_2 на многообразии M^{4n} таких, что $J_1J_2 = -J_2J_1 = J_3$. Тензорное поле J_3 также является почти комплексной структурой на многообразии M^{4n}.

Многообразие M^{4n} с фиксированной почти гиперкомплексной структурой называется почти гиперкомплексным многообразием. Для любой римановой метрики $\widetilde{g}$ на многообразии M^{4n} определяется ассоциированная к ней метрика g по следующей формуле

$$g(X,Y) = \widetilde{g}(X,Y) + \sum_{i=1}^{3} \widetilde{g}(J_iX, J_iY),$$

где $X, Y \in \chi(M^{4n})$. Каждая такая метрика g является кватернионно-эрмитовой метрикой на многообразии M^{4n}, т. е.

$$g(J_1X, J_1Y) = g(J_2X, J_2Y) = g(J_3X, J_3Y) = g(X,Y).$$

Если ∇ – риманова связность такой фиксированной метрики g, то можно определить связность $\overline{\nabla}$ на гиперкомплексном многообразии M^{4n} по формуле

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{1}{4}\left(\nabla_X Y - \sum_{i=1}^{3} J_i \nabla_X J_i Y\right),$$

где $X, Y \in \chi(M^{4n})$.

Определение. Связность $\overline{\nabla}$ называется канонической связностью структуры $(J_1, J_2, J_3; g)$.

Теорема 1. $\overline{\nabla}$ *– метрическая связность.*

Теорема 2. $\overline{\nabla} J_i = 0$, *где* $i = 1, 2, 3$.

На почти гиперкомплексном многообразии M^{4n} определим канонические связности $\overset{i}{\overline{\nabla}}$ $(i = 1, 2, 3)$, соответствующие почти эрмитовым структурам $(J_i; g)$, [1], по формуле

$$\overset{i}{\overline{\nabla}}_X Y = \frac{1}{2}\left(\nabla_X Y - J_i \nabla_X J_i Y\right) = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\nabla_X (J_i) Y,$$

где $X, Y \in \chi(M^{4n})$.

Теорема 3. $\overset{i}{\overline{\nabla}} J_i = 0$, *где* $i = 1, 2, 3$.

Теорема 4. *Если* $\nabla J_1 = 0$, *то*: 1) $\overset{1}{\overline{\nabla}} = \nabla$ *и* 2) $\overline{\nabla} = \overset{2}{\overline{\nabla}} = \overset{3}{\overline{\nabla}}$.

Теорема 5. *Если* $\overline{\nabla} = \nabla$, *то* $\overset{1}{\overline{\nabla}} = \overset{2}{\overline{\nabla}} = \overset{3}{\overline{\nabla}} = \nabla$.

Литература. 1. Ермолицкий А. А. Римановы многообразия с геометрическими структурами. (Монография). Мн.: БГПУ, 1998.