

ЛІТАРАТУРА

- Конопляник И. А. Классы систем дифференциальных уравнений без подвижных критических точек: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мин., 1976.
- Конопляник И. А. Об одном классе систем третьего порядка без подвижных критических точек // Доклады АН БССР. 1979. Т. XXIII. № 9.

- Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.

SUMMARY

It was found necessary and sufficient conditions of absent movable peculiar points in an autonomic nonlinear system (1). It was considered the case, when $A_0=0$.

УДК 510.22

С. А. Багдановіч

ІНФІНІТЭЗІМАЛЬНАЯ ПЕРАЎТВАРЭННІ НА АМАЛЬ ГІПЕРЭРМІТАВЫХ МНАГАСТАЙНАСЦЯХ

Няхай M — звязная мнагастайнасць класа C^∞ , на якой зададзена амаль гіперэрмітава структура АГЭС (J_1, J_2, J_3, g) , гэта значыць

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -I, \quad J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3,$$

$g(J_1 X, J_1 Y) = g(J_2 X, J_2 Y) = g(J_3 X, J_3 Y) = g(X, Y)$ для любых $X, Y \in \chi(M)$, дзе g — фіксаваная рыманава метрыка на M . Для любой рыманавай метрыкі \tilde{g} на M такую рыманаву метрыку g можна атрымаць па формуле

$$g(X, Y) = \frac{1}{4} (\tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}(J_1 X, J_1 Y) + \tilde{g}(J_2 X, J_2 Y) + \tilde{g}(J_3 X, J_3 Y)), \quad X, Y \in \chi(M).$$

Тэарэма 1 [1]. Няхай (M, g) — рыманава мнагастайнасць, TTM — другое датычнае расслаенне мнагастайнасці M . Тады можна атрымаць бясконцае мноства АГЭС на TTM .

Калі ∇ — рыманава звязнасць метрыкі g , то можна вызначыць звязнасць $\bar{\nabla}$ на M па формуле [2, с. 195]

$$\bar{\nabla}_X Y = \frac{1}{4} (\nabla_X Y - J_1 \nabla_X J_1 Y - J_2 \nabla_X J_2 Y - J_3 \nabla_X J_3 Y), \quad (1)$$

$$X, Y \in \chi(M).$$

Звязнасць $\bar{\nabla}$ называецца кананічнай звязнасцю АГЭС (J_1, J_2, J_3, g) [3, с. 17], у прыватнасці

$$\bar{\nabla} g = 0, \quad \bar{\nabla} J_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тэнзарнае поле $h = \nabla - \bar{\nabla}$ называецца другім фундаментальным тэнзарным полем АГЭС (J_1, J_2, J_3, g) [3, с. 17], дзе

$$h_X Y = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y,$$

$$h_{XYZ} = g(h_X Y, Z) = -h_{XZY}, \quad X, Y, Z \in \chi(M).$$

Няхай на M зададзена навыраджанае вектарнае поле (дынамічная сістэма) $\xi \in \chi(M)$, якое парадажае лакальную аднапараметрычную группу лакальных пераўтварэнняў φ_t . Вектарнае поле ξ называецца інфінітэзімальнай ізаметрыяй,

калі φ_t для любога t складаецца з лакальных ізаметрый метрыкі g ; ξ — інфінітэзімальная афіннае пераўтварэнне адносна звязнасці $\bar{\nabla}$, калі

$$\varphi_t(\bar{\nabla}_X Y) = \bar{\nabla}_{\varphi_t X} \varphi_t Y, \quad X, Y \in \chi(M).$$

Вектарнае поле ξ з'яўляецца інфінітэзімальной ізаметрыяй тады і толькі тады, калі $L_\xi g = 0$ (L_ξ — вытворная Лі) [4, с. 223].

Няхай $\bar{\nabla}$ — поўная афінная звязнасць на M , тады кожнае інфінітэзімальнае афіннае пераўтварэнне ξ мнагастайнасці M з'яўляецца поўным, гэта значыць ξ парадажае глабальную аднапараметрычную группу пераўтварэнняў на M .

Згодна [4, с. 217], вектарнае поле ξ ёсьць інфінітэзімальная афіннае пераўтварэнне мнагастайнасці M тады і толькі тады, калі

$$L_\xi \cdot \bar{\nabla}_Y - \bar{\nabla}_{L_\xi Y} = \bar{\nabla}_{[\xi, Y]}, \quad Y \in \chi(M).$$

Далей пад звязнасцю $\bar{\nabla}$ будзем разумець кананічную звязнасць, якая вызначаецца формулай (1).

Тэарэма 2 [3, с. 33]. Вектарнае поле ξ ёсьць інфінітэзімальная ізаметрыя і афіннае інфінітэзімальнае пераўтварэнне адносна звязнасці $\bar{\nabla}$ тады і толькі тады, калі $L_\xi g = 0$ і $L_\xi h = 0$, дзе $h = \nabla - \bar{\nabla}$.

Тэарэма 3. Няхай $L_\xi g = 0$, $L_\xi J_1 = 0$, $L_\xi J_2 = 0$. Тады ξ ёсьць інфінітэзімальная ізаметрыя і інфінітэзімальнае афіннае пераўтварэнне адносна кананічнай звязнасці (1).

Доказ. Паколькі $L_\xi g = 0$, то [4, с. 223]

$$\varphi_t(\bar{\nabla}_X Y) = \bar{\nabla}_{\varphi_t X} \varphi_t Y.$$

На падставе роўнасцей $L_\xi J_1 = 0$, $L_\xi J_2 = 0$ і $J_1 J_2 = J_3$ атрымаем [4, с. 40]

$$\varphi_t(J_1 X) = J_1(\varphi_t X), \quad \varphi_t(J_2 X) = J_2(\varphi_t X),$$

$$\begin{aligned}\varphi_L(J_3 X) &= \varphi_L(J_1 J_2 X) = J_1(\varphi_L J_2 X) = J_1 J_2 \varphi_L(X) = \\ &= J_3 \varphi_L(X),\end{aligned}$$

гэта значыць

$$\varphi_L(J_3 X) = J_3(\varphi_L X) \text{ або } L_\xi J_3 = 0.$$

Тады

$$\begin{aligned}\varphi_L(\bar{\nabla}_X Y) &= \varphi_L\left(\frac{1}{4}(\nabla_X Y - J_1 \nabla_X J_1 Y - J_2 \nabla_X J_2 Y - J_3 \nabla_X J_3 Y)\right) = \\ &= \frac{1}{4}(\varphi_L(\nabla_X Y) - \varphi_L(J_1 \nabla_X J_1 Y) - \varphi_L(J_2 \nabla_X J_2 Y) - \varphi_L(J_3 \nabla_X J_3 Y)) = \\ &= \frac{1}{4}(\nabla_{\varphi_L X} \varphi_L Y - J_1(\varphi_L(\nabla_X J_1 Y)) - J_2(\varphi_L(\nabla_X J_2 Y)) - J_3(\varphi_L(\nabla_X J_3 Y))) = \\ &= \frac{1}{4}(\nabla_{\varphi_L X} \varphi_L Y - J_1 \nabla_{\varphi_L X} \varphi_L(J_1 Y) - J_2 \nabla_{\varphi_L X} \varphi_L(J_2 Y) - J_3 \nabla_{\varphi_L X} \varphi_L(J_3 Y)) = \\ &= \frac{1}{4}(\nabla_{\varphi_L X} \varphi_L Y - J_1 \nabla_{\varphi_L X} \varphi_L(\varphi_L Y) - J_2 \nabla_{\varphi_L X} \varphi_L(\varphi_L Y) - J_3 \nabla_{\varphi_L X} \varphi_L(\varphi_L Y)) = \\ &= \bar{\nabla}_{\varphi_L X} \varphi_L Y,\end{aligned}$$

$$\text{гэта значыць } \varphi_L(\bar{\nabla}_X Y) = \bar{\nabla}_{\varphi_L X} \varphi_L Y.$$

QED

Калі (J_i, g) ($i = 1, 2, 3$) — амаль камплексныя структуры, якія задаюць АГЭС на M , то кананічныя звязнасці $\bar{\nabla}$ і другія фундаментальныя тэнзорныя палі h^i гэтых структур вызначаюцца па формулах [3, с. 112—113]

$$\bar{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_i \nabla_X J_i Y) = \nabla_X Y + \frac{1}{2} \nabla_X (J_i) J_i Y, \quad (2)$$

$$h_X^i Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J_i \nabla_X J_i Y) = -\frac{1}{2} \nabla_X (J_i) J_i Y,$$

дзе ∇ — рыманава звязнасць метрыкі g ; $X, Y \in \chi(M)$.

Тэарэма 4. *Няхай $L_\xi g = 0$ і $L_\xi J_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Тады ξ ёсць інфінітэзімальная ізаметрыя і інфінітэзімальная афінна пераутварэнне адносна кананічнай звязнасці (2).*

Доказ ажыццяўляеца аналагічна доказу тэарэмы 3.

Тэарэма 5. *Няхай $L_\xi g = 0$, $L_\xi J_1 = 0$ і (J_2, g) — кэлерава структура. Тады ξ ёсць інфінітэзімальная ізаметрыя і інфінітэзімальная афінна пераутварэнне адносна звязнасці (1).*

Доказ. Паколькі (J_2, g) — кэлерава структура, то $h^2 = 0$ і $h = h^1 = h^3$ [2, с. 197], дзе h — другое фундаментальнае тэнзорнае поле АГЭС.

Далей на падставе роўнасцей $L_\xi g = 0$, $L_\xi J_1 = 0$ (згодна з тэарэмамі 2 і 4) атрымаем $L_\xi h^1 = 0$, гэта значыць $L_\xi h = 0$.

Такім чынам, $L_\xi g = 0$ і $L_\xi h = 0$; таму, паводле тэарэмы 2, ξ — інфінітэзімальная ізаметрыя і інфінітэзімальная афінна пераутварэнне адносна звязнасці (1). QED

ЛІТАРАТУРА

1. Bogdanovich S. A., Ermolitski A. A. Hypercomplex structures on tangent bundles // Proceedings of the 5th international conference «Geometry and topology of manifolds» in Krynica (Poland). Lodz, 2003. P. 22—24.
2. Багдановіч С. А. Кананічная звязнасць і другое фундаментальнае тэнзорнае поле амаль эрмітавай гіперкамплекснай магастайнасці // Весці БДПУ. 2002. № 2.
3. Ермоліцкій А. А. Римановы многообразия с геометрическими структурами. Мн., 1998.
4. Кобаяси Ш., Номідзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

SUMMARY

Some conditions have been obtained on a vector field X to be an infinitesimal isometry and an infinitesimal affine transformation with respect to a canonical connection $\bar{\nabla}$ of an almost hyperHermitian manifold.