МАТЭМАТЫКА

УДК 513.73

С. А. Багдановіч

АБ АРТАГАНАЛЬНЫХ ПЕРАЎТВАРЭННЯХ АМАЛЬ ГІПЕРЭРМІТАВЫХ СТРУКТУР

1⁰. Разгледзім гладкую звязную мнагастайнасць M, на якой зададзена амаль гіперэрмітава структура (АГЭС) (J_1, J_2, J_3, g), дзе $J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -I$, $J_1J_2 = -J_2J_1 = J_3$ і $g(J_iX, J_iY) = g(X, Y)$, $i = 1, 2, 3$, $X, Y \in \chi(M)$; g — фіксаваная рыманава метрыка, J_1, J_2, J_3 — тэнзарныя палі тыпу (1, 1) на M. Такую метрыку g можна, напрыклад, атрымаць па формуле

$$g(X, Y) = \frac{1}{4}\left(\tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}(J_1X, J_1Y) + \tilde{g}(J_2X, J_2Y) + \tilde{g}(J_3X, J_3Y)\right),$$

дзе $\tilde{g}$ — адвольная рыманава метрыка на M.

Няхай ∇ — рыманава звязнасць метрыкі g, тады кананічная звязнасць $\bar{\nabla}$ [1, с. 195] і другое фундаментальнае тэнзарнае поле h [2, с. 17] АГЭС на M вызначаюцца адпаведна формуламі

$$\bar{\nabla}_X Y = \frac{1}{4}(\nabla_X Y - J_1\nabla_X J_1Y - J_2\nabla_X J_2Y - J_3\nabla_X J_3Y),$$

$$h_X Y = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y, \quad X, Y \in \chi(M).$$

У прыватнасці, $\bar{\nabla}g = 0$ і $\bar{\nabla}J_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Для амаль эрмітавай структуры (J_i, g), $i = 1, 2, 3$, кананічная звязнасць $\overset{i}{\bar{\nabla}}$ і другое фундаментальнае тэнзарнае поле h^i [2, с. 112—113] на M вызначаюцца па формулах

$$\overset{i}{\bar{\nabla}}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_i\nabla_X J_iY),$$

$$h^i_X Y = \nabla_X Y - \overset{i}{\bar{\nabla}}_X Y = -\frac{1}{2}\nabla_X(J_i)J_iY = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J_i\nabla_X J_iY), \quad X, Y \in \chi(M).$$

Тэарэма 1. *Калі (J_1, g) — кэлерава структура, г. зн. $h^1_XY = 0$ $(\nabla J_1 = 0)$, то*

$$h_X Y = h^2_X Y = h^3_X Y, \quad X, Y \in \chi(M).$$

Доказ. $\bar{\nabla}_X Y = \frac{1}{4}(\nabla_X Y - J_1^2\nabla_X Y - J_2\nabla_X J_2Y - J_1J_2\nabla_X J_1J_2Y) = \frac{1}{4}(2\nabla_X Y - J_2\nabla_X J_2Y - J_1J_2J_1\nabla_X J_2Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_2\nabla_X J_2Y) = \overset{2}{\bar{\nabla}}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_3J_1\nabla_X J_3J_1Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_3\nabla_X J_3Y) = \overset{3}{\bar{\nabla}}_X Y$.

Такім чынам, $h_XY = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \overset{2}{\bar{\nabla}}_X Y = \nabla_X Y - \overset{3}{\bar{\nabla}}_X Y = h^2_X Y = h^3_X Y$. **QED**.

Тэарэма 2. *Калі $h^2_X Y = h^3_X Y$, $X, Y \in \chi(M)$, то (J_1, g) — кэлерава структура.*

Доказ. Прадыферэнцаваўшы тоеснасць $J_1 = J_2J_3$, атрымаем

$$\nabla_X(J_1)Y = \nabla_X(J_2)J_3Y + J_2\nabla_X(J_3)Y.$$

Адсюль паводле формулы $\nabla_X(J_i)Y = 2h^i_X J_iY$ і тоеснасці $h^i_X J_iY = -J_ih^i_XY$, $i = 1, 2, 3$ маем

$$2h^1_X J_1Y = -2J_1h^1_XY = 2h^2_X J_2J_3Y + 2J_2h^3_X J_3Y = -2J_2h^2_X J_3Y + 2J_2h^2_X J_3Y = 0,$$

г. зн. $h^1_X Y = 0$ для кожных $X, Y \in \chi(M)$. **QED**.

2⁰. Няхай $(J'_1, J'_2, J'_3, g = \langle\ ,\ \rangle)$ — АГЭС на M. Разгледзім адлюстраванне $A\colon M \to O(3; \boldsymbol{R})\colon x \mapsto A(x) = (a_{ij}(x))$, $i, j = 1, 2, 3$, $a_{ij} \in F(M)$ і тэнзарнае поле тыпу (1;1)

$$J_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}J'_j. \tag{1}$$

Тады

$$J_i^2 = (a_{i1}J'_1 + a_{i2}J'_2 + a_{i3}J'_3)^2 = a_{i1}^2J_1'^2 + a_{i2}^2J_2'^2 + a_{i3}^2J_3'^2 + a_{i1}a_{i2}J'_1J'_2 + a_{i2}a_{i1}J'_2J'_1 + a_{i1}a_{i3}J'_1J'_3 + a_{i3}a_{i1}J'_3J'_1 + a_{i2}a_{i3}J'_2J'_3 + a_{i3}a_{i2}J'_3J'_2 = -(a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2) = -I,$$

$$J_iJ_j = (a_{i1}J'_1 + a_{i2}J'_2 + a_{i3}J'_3)(a_{j1}J'_1 + a_{j2}J'_2 + a_{j3}J'_3) = -(a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3})I + a_{i1}a_{j2}J'_1J'_2 + a_{i1}a_{j3}J'_1J'_3 + a_{i2}a_{j1}J'_2J'_1 + a_{i2}a_{j3}J'_2J'_3 + a_{i3}a_{j1}J'_3J'_1 + a_{i3}a_{j2}J'_3J'_2 = (a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1})J'_1J'_2 + (a_{i1}a_{j3} - a_{i3}a_{j1})J'_1J'_3 + (a_{i2}a_{j3} - a_{i3}a_{j2})J'_2J'_3,$$

$$J_jJ_i = (a_{j1}J'_1 + a_{j2}J'_2 + a_{j3}J'_3)(a_{i1}J'_1 + a_{i2}J'_2 + a_{i3}J'_3) = -(a_{j1}a_{i1} + a_{j2}a_{i2} + a_{j3}a_{i3})I + a_{j1}a_{i2}J'_1J'_2 + a_{j1}a_{i3}J'_1J'_3 + a_{j2}a_{i1}J'_2J'_1 + a_{j2}a_{i3}J'_2J'_3 + a_{j3}a_{i1}J'_3J'_1 + a_{j3}a_{i2}J'_3J'_2 = (a_{j1}a_{i2} - a_{j2}a_{i1})J'_1J'_2 + (a_{j1}a_{i3} - a_{j3}a_{i1})J'_1J'_3 + (a_{j2}a_{i3} - a_{j3}a_{i2})J'_2J'_3,$$

$$<J_iX,\ J_iY>=$$
$$=<(a_{i1}J_1'+a_{i2}J_2'+a_{i3}J_3')X,(a_{i1}J_1'+a_{i2}J_2'+a_{i3}J_3')Y>=$$
$$=(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2)<X,\ Y>+$$
$$+a_{i1}a_{i2}<J_1'X,\ J_2'Y>+a_{i1}a_{i3}<J_1'X,\ J_3'Y>+$$
$$+a_{i2}a_{i1}<J_2'X,\ J_1'Y>+a_{i2}a_{i3}<J_2'X,\ J_3'Y>+$$
$$+a_{i3}a_{i1}<J_3'X,\ J_1'Y>+a_{i3}a_{i2}<J_3'X,\ J_2'Y>=$$
$$=<X,Y>+a_{i1}a_{i2}(<-X,J_1'J_2'Y>+<-X,J_2'J_1'Y>)+$$
$$+a_{i1}a_{i3}(<-X,\ J_1'J_3'Y>+<-X,\ J_3'J_1'Y>)+$$
$$+a_{i2}a_{i3}(<-X,J_2'J_3'Y>+<-X,J_3'J_2'Y>)=<X,\ Y>,$$

г. зн. $J_i^2=-I$, $J_iJ_j=-J_jJ_i$ і $<J_iX, J_iY>=<X, Y>$, $i=1, 2, 3$. Адсюль вынікае, што тэнзарныя палі J_i ($i=1, 2, 3$) задаюць АГЭС на M.

Такім чынам, выбіраючы функцыі a_{ij} (ці вуглы Эйлера), мы атрымліваем незлічонае мноства АГЭС на M. Пошук «лепшых (у нейкім сэнсе) АГЭС» з гэтага мноства з'яўляецца важнай праблемай.

Няхай $\nabla J_1'=\nabla J_2'=0$, тады $\nabla J_3'=0$ і амаль эрмітавы структуры (J_i', g), $i=1, 2, 3$ з'яўляюцца кэлеравымі. Знойдзем другія фундаментальныя тэнзарныя палі h_X^iY амаль эрмітавых структур (J_i, g), $i=1, 2, 3$, дзе J_i — тэнзарныя палі, вызначаныя па формуле (1). Для i=1 маем

$$2h_X^1Y=\nabla_XY+J_1\nabla_XJ_1Y=\nabla_XY+$$
$$+(a_{11}J_1'+a_{12}J_2'+a_{13}J_3')\nabla_X(a_{11}J_1'+a_{12}J_2'+a_{13}J_3')Y=$$
$$=\nabla_XY+a_{11}J_1'\nabla_Xa_{11}J_1'Y+a_{11}J_1'\nabla_Xa_{12}J_2'Y+$$
$$+a_{11}J_1'\nabla_Xa_{13}J_3'Y+a_{12}J_2'\nabla_Xa_{11}J_1'Y+$$
$$+a_{12}J_2'\nabla_Xa_{12}J_2'Y+a_{12}J_2'\nabla_Xa_{13}J_3'Y+$$
$$+a_{13}J_3'\nabla_Xa_{11}J_1'Y+a_{13}J_3'\nabla_Xa_{12}J_2'Y+a_{13}J_3'\nabla_Xa_{13}J_3'Y=$$
$$=\nabla_XY+a_{11}J_1'(a_{11}\nabla_XJ_1'Y+(Xa_{11})J_1'Y)+$$
$$+a_{11}J_1'(a_{12}\nabla_XJ_2'Y+(Xa_{12})J_2'Y)+$$
$$+a_{11}J_1'(a_{13}\nabla_XJ_3'Y+(Xa_{13})J_3'Y)+$$
$$+a_{12}J_2'(a_{11}\nabla_XJ_1'Y+(Xa_{11})J_1'Y)+$$
$$+a_{12}J_2'(a_{12}\nabla_XJ_2'Y+(Xa_{12})J_2'Y)+$$
$$+a_{12}J_2'(a_{13}\nabla_XJ_3'Y+(Xa_{13})J_3'Y)+$$
$$+a_{13}J_3'(a_{11}\nabla_XJ_1'Y+(Xa_{11})J_1'Y)+$$
$$+a_{13}J_3'(a_{12}\nabla_XJ_2'Y+(Xa_{12})J_2'Y)+$$
$$+a_{13}J_3'(a_{13}\nabla_XJ_3'Y+(Xa_{13})J_3'Y)=$$
$$=(1+a_{11}^2J_1'^2+a_{12}^2J_2'^2+a_{13}^2J_3'^2)\nabla_XY+$$
$$+(a_{11}(Xa_{11})J_1'^2+a_{12}(Xa_{12})J_2'^2+a_{13}(Xa_{13})J_3'^2)Y+$$
$$+a_{11}a_{12}(J_1'J_2'\nabla_XY+J_2'J_1'\nabla_XY)+$$
$$+a_{11}a_{13}(J_1'J_3'\nabla_XY+J_3'J_1'\nabla_XY)+$$
$$+a_{12}a_{13}(J_2'J_3'\nabla_XY+J_3'J_2'\nabla_XY)+a_{11}(Xa_{12})J_1'J_2'Y+$$
$$+a_{11}(Xa_{13})J_1'J_3'Y+a_{12}(Xa_{11})J_2'J_1'Y+$$
$$+a_{12}(Xa_{13})J_2'J_3'Y+a_{13}(Xa_{11})J_3'J_1'Y+$$
$$+a_{13}(Xa_{12})J_3'J_2'Y=(1-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2)\nabla_XY-$$
$$-(a_{11}(Xa_{11})+a_{12}(Xa_{12})+a_{13}(Xa_{13}))Y+$$
$$+a_{11}a_{12}(J_1'J_2'-J_1'J_2')\nabla_XY+a_{11}a_{13}(J_1'J_3'-J_1'J_3')\nabla_XY+$$
$$+a_{12}a_{13}(J_2'J_3'-J_2'J_3')\nabla_XY+a_{11}(Xa_{12})J_3'Y-a_{11}(Xa_{13})J_2'Y-$$
$$-a_{12}(Xa_{11})J_3'Y+a_{12}(Xa_{13})J_1'Y+a_{13}(Xa_{11})J_2'Y-a_{13}(Xa_{12})J_1'Y.$$

Паколькі $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1$ і $a_{11}(Xa_{11})+a_{12}(Xa_{12})+a_{13}(Xa_{13})=0$, то

$$2h_X^1Y=(a_{11}(Xa_{12})-a_{12}(Xa_{11}))J_3'Y+(a_{13}(Xa_{11})-a_{11}(Xa_{13}))J_2'Y+(a_{12}(Xa_{13})-a_{13}(Xa_{12}))J_1'Y. \qquad (2)$$

Да (2) прыменім тоеснасць $h_X^1J_1Y=-J_1h_X^1Y$. Атрымаем $a_{12}(Xa_{13})-a_{13}(Xa_{12})=0$. Значыць,

$$h_X^1Y=\frac{1}{2}\Big[(a_{11}(Xa_{12})-a_{12}(Xa_{11}))J_3'Y+(a_{13}(Xa_{11})-a_{11}(Xa_{13}))J_2'Y\Big]. \qquad (3)$$

Выканаўшы аналагічныя вылічэнні для i=2 і i=3, будзем мець

$$h_X^2Y=\frac{1}{2}\Big[(a_{21}(Xa_{22})-a_{22}(Xa_{21}))J_3'Y+(a_{22}(Xa_{23})-a_{23}(Xa_{22}))J_1'Y\Big]. \qquad (4)$$

$$h_X^3Y=\frac{1}{2}\Big[(a_{33}(Xa_{31})-a_{31}(Xa_{33}))J_2'Y+(a_{33}(Xa_{32})-a_{32}(Xa_{33}))J_1'Y\Big]. \qquad (5)$$

Разгледзім прыклад, які ілюструе дадзены выпадак.

3^0. Возьмем $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\alpha\in F(M)$,

тады $\begin{cases} J_1=\cos\alpha J_1'+\sin\alpha J_2',\\ J_2=-\sin\alpha J_1'+\cos\alpha J_2',\\ J_3=J_3'.\end{cases}$

Паколькі $\nabla J_1'=\nabla J_2'=0$, то $\nabla J_3=\nabla J_3'=0$ і $h_X^3Y=0$. Тады для любых X, $Y\in\chi(M)$, згодна з *тэарэмай 1* і па формуле (3), знаходзім:

$$h_XY=h_X^1Y=h_X^2Y=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[(\cos\alpha(X\sin\alpha)-\sin\alpha(X\cos\alpha))J_3Y+(0\cdot(X\cos\alpha)-\cos\alpha(X0))J_2'Y\Big]=$$
$$=\frac{1}{2}(\cos^2\alpha(X\alpha)+\sin^2\alpha(X\alpha))J_3Y=\frac{1}{2}(X\alpha)J_3Y,$$

дзе h_XY — другое фундаментальнае тэнзарнае поле АГЭС (J_1, J_2, J_3, <, >).

Абазначым $X\alpha=<grad\alpha, X>$ і $grad\alpha=\xi$, тады канчаткова атрымаем

$$h_X Y=\frac{1}{2}<\xi, X>J_3 Y,\ \xi, X, Y\in\chi(M).$$

Такім чынам, даказалі наступную тэарэму.

Тэарэма 3. *Існуе* АГЭС $(J_1, J_2, J_3, <, >)$, *для якой* $\nabla J_3=0$ *і* $h_X Y=\frac{1}{2}<\xi, X>J_3 Y$, дзе $\|\xi\|\neq 0$, $\xi, X, Y\in\chi(M)$.

АГЭС $(J_1, J_2, J_3, <, >)$, для якой $\nabla J_3=0$ і $h_X Y=\frac{1}{2}<\xi, X>J_3 Y$, дзе $\|\xi\|\neq 0$, $\xi, X, Y\in\chi(M)$, будзем называць *АГЭС тыпу* ξ.

Тэарэма 4. *Няхай* $(J_1, J_2, J_3, <, >)$ *— АГЭС тыпу* ξ. *Калі існуе рашэнне* α *раўнання* $\xi=\mathrm{grad}\,\alpha$, *то структуры* $(J_i', <, >)$, $i=1, 2, 3$ *з'яўляюцца кэлеравымі, дзе АГЭС* $(J_1', J_2', J_3', <, >)$ *на* M *вызначаецца наступным чынам*:

$$\begin{cases} J_1'=\cos\alpha J_1-\sin\alpha J_2, \\ J_2'=\sin\alpha J_1+\cos\alpha J_2,\ \alpha\in F(M). \\ J_3'=J_3, \end{cases}$$

Доказ. $\nabla_X(J_2')Y=\nabla_X(\sin\alpha J_1+\cos\alpha J_2)Y-$
$-(\sin\alpha J_1+\cos\alpha J_2)\nabla_X Y=\sin\alpha\nabla_X J_1 Y+\cos\alpha\nabla_X J_2 Y+$
$+X(\sin\alpha)J_1 Y+X(\cos\alpha)J_2 Y-\sin\alpha J_1\nabla_X Y-\cos\alpha J_2\nabla_X Y=$
$=\sin\alpha\nabla_X(J_1)Y+\cos\alpha\nabla_X(J_2)Y+\cos\alpha(X\alpha)J_1 Y-$
$-\sin\alpha(X\alpha)J_2 Y=\sin\alpha\cdot 2h_X J_1 Y+\cos\alpha\cdot 2h_X J_2 Y+$
$+\cos\alpha(X\alpha)J_1 Y-\sin\alpha(X\alpha)J_2 Y=\sin\alpha(X\alpha)J_3 J_1 Y+$
$+\cos\alpha(X\alpha)J_3 J_2 Y+\cos\alpha(X\alpha)J_1 Y-\sin\alpha(X\alpha)J_2 Y=0.$

Значыць $\nabla J_2'=\nabla J_3'=0$, таму $\nabla J_1'=0$. Адсюль вынікае, што $(J_i', <, >)$, $i=1, 2, 3$, — кэлеравы структуры. ***QED***.

Тэарэма 5. *АГЭС* $(J_1, J_2, J_3, <, >)$ *тыпу* ξ *з'яўляецца квазіаднароднай структурай* ($\bar{\bar\nabla}h=0$, [2, с. 25]) *тады і толькі тады, калі* $\bar{\bar\nabla}\xi=0$ *на* M.

Доказ. $(\bar{\bar\nabla}_Z h)(X, Y)=\bar{\bar\nabla}_Z h_X Y-h_{\bar{\bar\nabla}_Z X}Y-h_X\bar{\bar\nabla}_Z Y=$

$$=\frac{1}{2}<\xi, X>J_3\bar{\bar\nabla}_Z Y+\frac{1}{2}(Z<\xi, X>)J_3 Y-\frac{1}{2}<\xi, \bar{\bar\nabla}_Z X>J_3 Y-$$

$$-\frac{1}{2}<\xi, X>J_3\bar{\bar\nabla}_Z Y=\frac{1}{2}<\bar{\bar\nabla}_Z\xi, X>J_3 Y+$$

$$+\frac{1}{2}<\xi, \bar{\bar\nabla}_Z X>J_3 Y-\frac{1}{2}<\xi, \bar{\bar\nabla}_Z X>J_3 Y=\frac{1}{2}<\bar{\bar\nabla}_Z\xi, X>J_3 Y.$$

Значыць, $\bar{\bar\nabla}h=0$ тады і толькі тады, калі $\bar{\bar\nabla}\xi=0$. ***QED***.

Тэарэма 6. *Калі* $(J_1, J_2, J_3, <, >)$ *— квазіаднародная АГЭС тыпу* ξ *і* $L=[\xi]$, *то размеркаванне* $V=L^{\perp}$ *з'яўляецца інтэгравальным і яго максімальныя інтэгравальныя мнагастайнасці ёсць цалкам геадэзічныя падмнагастайнасці адносна звязнасці* ∇.

Доказ. Для кожных $X, Y\in V$ мы маем $h_X Y=\frac{1}{2}<\xi, X>J_3 Y=0$ і $\bar{\bar\nabla}_X Y=\nabla_X Y$. Далей, $<\bar{\bar\nabla}_X Y, \xi>=X<Y, \xi>-<Y, \bar{\bar\nabla}_X\xi>=0$, г. зн. $\bar{\bar\nabla}_X Y=\nabla_X Y\in V$. Аналагічна атрымоўваем, што $\bar{\bar\nabla}_Y X=\nabla_Y X\in V$. Такім чынам, $[X, Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X\in V$, г. зн. $V=L^{\perp}$ — інтэгравальнае размеркаванне.

З $\nabla_X Y\in V$ вынікае, што любая максімальная інтэгравальная мнагастайнасць размеркавання V з'яўляецца цалкам геадэзічнай падмнагастайнасцю адносна звязнасці ∇. ***QED***.

ЛІТАРАТУРА

1. *Багдановіч С. А.* Кананічная звязнасць і другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці // Весці БДПУ. 2002. № 2. С. 194—198.
2. *Ермолицкий А. А.* Римановы многообразия с геометрическими структурами. Мн., 1998.

SUMMARY

The socalled almost hyperHermitian structures (ahHs) of type ξ *are constructed on Riemannian manifolds with the help of orthogonal transformations of a Kaehlerian ahHs. The second fundamental tensor field h of ahHs of type* ξ *is computed and the case of quasihomogeneous structure is considered.*

УДК 517.925.6

А. Я. Крычавец, В. І. Мататаў

ДАСЛЕДАВАННЕ РУХОМЫХ АСАБЛІВЫХ ПУНКТАЎ АДНОЙ АЎТАНОМНАЙ СІСТЭМЫ ГАМІЛЬТОНА

Шмат задач па прыродазнаўстве і ў тэхніцы зводзяцца да даследавання рухомых асаблівых пунктаў у рашэннях гамільтонавых сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў [1—9].

Разгледзім сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў выгляду:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\partial H(x,y)}{\partial y},\ \frac{dy}{dz}=-\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}, \qquad (1)$$

дзе $z\in C$, $x, y\in C\cup\infty$, гамільтаніян