УДК 513.73

С. А. Багдановіч

КАНАНІЧНАЯ ЗВЯЗНАСЦЬ І ДРУГОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЕ ТЭНЗАРНАЕ ПОЛЕ АМАЛЬ ЭРМІТАВАЙ ГІПЕРКАМПЛЕКСНАЙ МНАГАСТАЙНАСЦІ

1. Амаль эрмітавы мнагастайнасці

Няхай (M, J, g) — амаль эрмітава мнагастайнасць, гэта значыць $J^2=-I$ і $g(JX, JY)=g(X, Y)$ для ўсякіх $X, Y\in\chi(M)$, дзе g — фіксаваная рыманава метрыка на M. Для ўсякай рыманавай метрыкі $\tilde{g}$ на M такую метрыку g можна знайсці па формуле

$$g(X, Y)=\frac{1}{2}(\tilde{g}(X, Y)+\tilde{g}(JX, JY)),\ X, Y\in\chi(M).$$

Няхай ∇ — рыманава звязнасць метрыкі g, тады можна вызначыць звязнасць $\bar{\nabla}$ на M па формуле

$$\bar{\nabla}_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y-J\nabla_X JY)=\nabla_X Y+\frac{1}{2}\nabla_X(J)JY,\ X, Y\in\chi(M). \qquad (1)$$

Звязнасць $\bar{\nabla}$ называецца кананічнай звязнасцю амаль эрмітавай структуры (J, g) [1], у прыватнасці $\bar{\nabla}g=0$ і $\bar{\nabla}J=0$.

Тэнзарнае поле h называецца другім фундаментальным тэнзарным полем амаль эрмітавай структуры (J, g) [1], дзе

$$h_X Y=\nabla_X Y-\bar{\nabla}_X Y=-\frac{1}{2}\nabla_X(J)JY=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+J\nabla_X JY),\ \ X, Y\in\chi(M);$$

$$h_{XYZ}=g(h_X Y, Z)=-h_{XZY}.$$

У прыватнасці, класіфікацыя Грэя–Хервелы [2] амаль эрмітавых мнагастайнасцяў можа быць перапісана ў тэрмінах тэнзарнага поля h [1]. Напрыклад, клас кэлеравых мнагастайнасцяў **K** вызначаецца ўмовай $h=0$; клас набліжана кэлеравых мнагастайнасцяў **NK** — умовай $h_X X=0$; клас амаль кэлеравых мнагастайнасцяў **AK** — умовай $\sigma h_{XYZ}=h_{XYZ}+h_{YZX}+h_{ZXY}=0$, $X, Y, Z\in\chi(M)$.

Калі $\bar{T}$ — тэнзарнае поле кручэння звязнасці $\bar{\nabla}$, то вядома [1], што для $X, Y\in\chi(M)$

$$\bar{T}_X Y=\bar{\nabla}_X Y-\bar{\nabla}_Y X-[X, Y]=\frac{1}{2}(J\nabla_Y JX-J\nabla_X JY-[X, Y]).$$

Няхай $\bar{R}$ і R — тэнзарныя палі крывізны звязнасцяў $\bar{\nabla}$ і ∇ адпаведна, тады згодна [1] для $X, Y, Z\in\chi(M)$ маем

$$\bar{R}_{XY}Z=\frac{1}{2}R_{XY}Z-\frac{1}{2}JR_{XY}JZ+h_Y h_X Z-h_X h_Y Z.$$

2. Кананічная звязнасць амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці

Разгледзім амаль эрмітаву гіперкамплексную мнагастайнасць $(M,\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ g)$ [5], дзе $\dim M=4n$, $J_i^2=-I$, $J_1J_2=-J_2J_1=J_3$ і $g(J_iX,\ J_iY)=g(X,\ Y)$ для ўсякіх $i=1,\ 2,\ 3$ і $X,\ Y\in\chi(M)$. Для ўсякай рыманавай метрыкі $\tilde g$ на M такую метрыку g можна вызначыць па формуле

$$g(X,\ Y)=\frac{1}{4}(\tilde g(X,\ Y)+\tilde g(J_1X,\ J_1Y)+\tilde g(J_2X,\ J_2Y)+\tilde g(J_3X,\ J_3Y)),$$

$$X,\ Y\in\chi(M).$$

Разгледзім мноства $P(H)$ усіх ортаўнармаваных рэпераў над M такіх, што для кожнага $u\in P(H)$ тэнзарныя палі J_1, J_2, J_3 маюць наступныя матрыцы:

$$(J_1)=\begin{bmatrix}0&0&E_n&0\\0&0&0&E_n\\-E_n&0&0&0\\0&-E_n&0&0\end{bmatrix},\ (J_2)=\begin{bmatrix}0&-E_n&0&0\\E_n&0&0&0\\0&0&0&E_n\\0&0&-E_n&0\end{bmatrix},\ (J_3)=\begin{bmatrix}0&0&0&E_n\\0&0&-E_n&0\\0&E_n&0&0\\-E_n&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Мноства $P(H)$ будзе G-структурай з структурнай групай

$$H=Sp_n=\left\{\begin{pmatrix}A&B&C&D\\-B&A&-D&C\\-C&D&A&-B\\-D&-C&B&A\end{pmatrix}\in O(4n)\right\}.$$

Тэарэма 1. Няхай ∇ — рыманава звязнасць метрыкі g. Кананічная звязнасць $\overline{\nabla}$ G-структуры $((P(H),\ g)$, якая адпавядае амаль эрмітавай гіперкамплекснай структуры $(J_1,\ J_2,\ J_3,\ g)$, вызначаецца па формуле

$$\overline{\nabla}_XY=\frac{1}{4}(\nabla_XY-J_1\nabla_XJ_1Y-J_2\nabla_XJ_2Y-J_3\nabla_XJ_3Y),X,\ Y\in\chi(M).$$

Доказ. Алгебра Лі $\underline{\boldsymbol{h}}$ структурнай групы H для $P(H)$ мае наступны выгляд:

$$\underline{\boldsymbol{h}}=\left\{\tilde x=\begin{bmatrix}A&B&C&D\\-B&A&-D&C\\-C&D&A&-B\\-D&-C&B&A\end{bmatrix}:\tilde x\in\underline{\mathbf{o}}\right\}.$$

Далей, $\underline{\boldsymbol{o}}=\underline{\boldsymbol{h}}\oplus\underline{\boldsymbol{m}}$, дзе $\underline{\boldsymbol{o}}$ — алгебра Лі ортаўнармаванай групы,

$$\underline{\boldsymbol{m}}=\left\{\tilde x=\begin{bmatrix}P&R&S&T\\-R&P&-T&S\\S&-T&-P&R\\T&S&-R&-P\end{bmatrix}:\tilde x\in\underline{\mathbf{o}}\right\}$$

і

$$tr\left(\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P & R & S & T \\ -R & P & -T & S \\ S & -T & -P & R \\ T & S & -R & -P \end{bmatrix}^T\right)=0,$$

гэта значыць, што $\underline{\boldsymbol{m}}=\underline{\boldsymbol{h}}^{\perp}$ адносна формы Кілінга. Для ўсякага $\omega\in\underline{\boldsymbol{o}}$ мы можам атрымаць натуральны расклад $\omega=\omega|_{\boldsymbol{h}}+\omega|_{\boldsymbol{m}}$ па формуле

$$\omega=\frac{1}{4}(\omega-j_1\omega j_1-j_2\omega j_2-j_3\omega j_3)+\frac{1}{4}(3\omega+j_1\omega j_1+j_2\omega j_2+j_3\omega j_3),$$

дзе

$$j_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \\ -E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad j_2=\begin{bmatrix} 0 & -E_n & 0 & 0 \\ E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \end{bmatrix},\quad j_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 \\ -E_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Няхай $\overline{\omega}=\frac{1}{4}(\omega-j_1\omega j_1-j_2\omega j_2-j_3\omega j_3)$ і φ — гэта сечыва $P(H)$ над некаторым наваколлем U, якое кожнаму пункту $x\in U$ ставіць у адпаведнасць лінейны рэпер $(X_1)_x$, $(X_2)_x$, ..., $(X_{4n})_x)$, X, $Y=\sum_k f^k X_k$ — вектарныя палі на M. Тады з [3] вынікае, што

$$\overline{\nabla}_{X_x}Y=\varphi(x)\,\overline{\omega}(\varphi_*X_x)\varphi(x)^{-1}Y_x+\sum_k(Xf^k)(x)(X_k)_x=\frac{1}{4}\varphi(x)[\omega(\varphi_*X_x)-$$

$$-j_1\omega(\varphi_*X_x)j_1-j_2\omega(\varphi_*X_x)j_2-j_3\omega(\varphi_*X_x)j_3]\varphi(x)^{-1}Y_x+\sum_k(Xf^k)(x)(X_k)_x=$$

$$=\frac{1}{4}[\varphi(x)\omega(\varphi_*X_x)\varphi(x)^{-1}Y_x+\sum_k(Xf^k)(x)(X_k)_x-j_1\varphi(x)\omega(\varphi_*X_x)\varphi(x)^{-1}j_1Y_x-$$

$$-\sum_k j_1(Xf^k)(x)j_1(X_k)_x-j_2\varphi(x)\omega(\varphi_*X_x)\varphi(x)^{-1}j_2Y_x-\sum_k j_2(Xf^k)(x)j_2(X_k)_x-$$

$$-j_3\varphi(x)\omega(\varphi_*X_x)\varphi(x)^{-1}j_3Y_x-\sum_k j_3(Xf^k)(x)j_3(X_k)_x]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\nabla_{X_x}Y_x-J_1\nabla_{X_x}J_1Y_x-J_2\nabla_{X_x}J_2Y_x-J_3\nabla_{X_x}J_3Y_x\right),$$

дзе $\varphi(x)$ разглядаецца як адлюстраванне з $\boldsymbol{R}^n$ на $T_x(M)$. Відавочна, што $\varphi(x)j_i=J_i\cdot\varphi(x)$, $i=1, 2, 3$.

QED.

У прыватнасці, $\overline{\nabla}g=0$ і $\overline{\nabla}J_i=0$, $i=1, 2, 3$.

На амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці M вызначым кананічныя звязнасці $\overset{i}{\overline{\nabla}}$ $(i=1, 2, 3)$, якія адпавядаюць амаль эрмітавым структурам $(J_i;\ g)$ па формуле (1):

$$\overset{i}{\overline{\nabla}}_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y-J_i\nabla_X J_i Y)=\nabla_X Y+\frac{1}{2}\nabla_X(J_i)Y,\qquad X,\ Y\in(M).$$

Тэарэма 2. $\overset{i}{\overline{\nabla}} J_i = 0$, дзе i=1, 2, 3.

Тэарэма 3. Калі $\nabla J_1=0$, то $\overset{1}{\overline{\nabla}} = \nabla$ і $\overline{\nabla} = \overset{2}{\overline{\nabla}} = \overset{3}{\overline{\nabla}}$.

Тэарэма 4. Калі $\overline{\nabla} = \nabla$, то $\overset{1}{\overline{\nabla}} = \overset{2}{\overline{\nabla}} = \overset{3}{\overline{\nabla}} = \nabla$.

3. Другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці

Тэнзарнае поле h называецца другім фундаментальным тэнзарным полем амаль эрмітавай гіперкамплекснай структуры (J_1, J_2, J_3, g), дзе

$$h_X Y = \nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y, \quad X,\ Y \in \chi(M); \tag{2}$$
$$h_{XYZ} = g(h_X Y,\ Z) = -h_{XZY}.$$

Разгледзім залежнасць паміж h і h^i, i=1, 2, 3, дзе h^i — другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль эрмітавай структуры (J_i, g). З (2) вынікае, што

$$h_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{4}(\nabla_X Y - J_1 \nabla_X J_1 Y - J_2 \nabla_X J_2 Y - J_3 \nabla_X J_3 Y) =$$
$$= \frac{1}{4}(3\nabla_X Y + J_1 \nabla_X J_1 Y + J_2 \nabla_X J_2 Y + J_3 \nabla_X J_3 Y) = \frac{1}{2}(0{,}5(\nabla_X Y + J_1 \nabla_X J_1 Y) +$$
$$+ 0{,}5(\nabla_X Y + J_2 \nabla_X J_2 Y) + 0{,}5(\nabla_X Y + J_3 \nabla_X J_3 Y)) = \frac{1}{2}\left(h^1_X Y + h^2_X Y + h^3_X Y\right).$$

Такім чынам, $h = \frac{1}{2}(h^1 + h^2 + h^3)$.

Няхай (J_1, g) — кэлерава структура, гэта значыць $h^1=0$ (ці $\nabla J_1=0$). Тады другія фундаментальныя тэнзарныя палі h, h^2 і h^3 супадаюць. Сапраўды, мы маем

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{1}{4}(\nabla_X Y - J_1^2 \nabla_X Y - J_2 \nabla_X J_2 Y - J_1 J_2 \nabla_X J_1 J_2 Y) =$$
$$= \frac{1}{2}(2\nabla_X Y - J_2 \nabla_X J_2 Y - J_1 J_2 J_1 \nabla_X J_2 Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_2 \nabla_X J_2 Y) =$$
$$= \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_3 J_1 \nabla_X J_3 J_1 Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_3 \nabla_X J_3 Y)$$

і

$$h_X Y = \nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}(\nabla_X Y - {}_2\nabla_X J_2 Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J_2 \nabla_X J_2 Y) = h^2_X Y,$$

$$h_X Y = \nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J_3 \nabla_X J_3 Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J_3 \nabla_X J_3 Y) = h^3_X Y.$$

4. Тензарнае поле кручэння кананічнай звязнасці амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці

Калі $\bar{T}$ — тэнзарнае поле кручэння звязнасці $\bar{\nabla}$, то для $X, Y \in \chi(M)$ маем $\bar{T}_X Y = \frac{1}{2}\left(\bar{T}^1_X Y + \bar{T}^2_X Y + \bar{T}^3_X Y\right)$, дзе $\bar{T}^i$ — тензарнае поле кручэння звязнасці $\overset{i}{\bar{\nabla}}$, i=1, 2, 3. Сапраўды,

$$\bar{T}_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] - \sum_{i=1}^{3}(J_i \nabla_X J_i Y - J_i \nabla_Y J_i X) - 3[X, Y]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}(J_i \nabla_Y J_i X - J_i \nabla_X J_i Y - [X, Y])\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{T}^1_X Y + \bar{T}^2_X Y + \bar{T}^3_X Y\right).$$

5. Тэнзарнае поле крывізны кананічнай звязнасці амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці

Калі $\bar{R}$, R і $\bar{R}^i$, i=1, 2, 3 — тэнзарныя палі крывізнаў звязнасцяў $\bar{\nabla}$, ∇ і $\overset{i}{\bar{\nabla}}$ адпаведна, то

$$\bar{R}_{XY} Z = h_X h_Y Z - h_Y h_X Z + \sum_{i=1}^{3}\left(\bar{R}^i_{XY} Z + \frac{1}{4} J_i R_{XY} J_i Z\right) - \frac{5}{4} R_{XY} Z,$$

дзе h — другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці.

ЛІТАРАТУРА

1. *Ермолицкий А. А.* Римановы многообразия с геометрическими структурами: Моногр. Мн., 1998.
2. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants //Ann. Mat. pura appl. 1980. V. 123. P. 35—58.
3. *Bishop R., Crittenden R.* Geometry of Manifolds. N.-Y., 1964.
4. *Богданович С. А.* Каноническая связность на почти гиперкомплексном многообразии // Тез. докл. VIII Бел. матем. конф. Мн., 2000. Ч. 2. С. 95.
5. *Alekseevsky D. V., Marchiafava S.* Quaternionic Structures on a Manifold and Subordinated Structures // Ann. Mat. pura appl. 1996. V. 171. P. 205—273.

SUMMARY

The canonical connection $\bar{\nabla}$ and the second fundamental tensor field h [1] of almost Hermitian hypercomplex manifold have been constructed in the paper. It contains some results about geometry of manifolds with almost Hermitian hypercomplex structures.