УДК 512.62

С. А. Багдановіч

КАНАНІЧНАЯ ЗВЯЗНАСЦЬ І ДРУГОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЕ ТЭНЗАРНАЕ ПОЛЕ АМАЛЬ ГІПЕРЭРМІТАВАЙ СТРУКТУРЫ ДРУГОГА РОДУ ТЫПУ (J, P_1, P_2)

1^0. Амаль эрмітавыя структуры і структуры амаль здабытку. Няхай (M, J, g) – амаль эрмітавая мнагастайнасць, гэта значыць $J^2=-I$ і $g(JX, JY)=g(X, Y)$ для любых вектарных палёў X, Y на M, дзе J – тэнзарнае поле тыпу (1, 1), g – фіксаваная рыманава метрыка на M. Гэту метрыку g можна атрымаць па формуле

$$g(X, Y)=\frac{1}{2}(\tilde{g}(X, Y)+\tilde{g}(JX, JY)),$$

дзе $\tilde{g}$ – любая рыманава метрыка на M.

Калі ∇ – рыманава звязнасць метрыкі g, то кананічная звязнасць $\overline{\nabla}$ амаль эрмітавай структуры (J, g) на M вызначаецца па формуле

$$\overline{\nabla}_X Y=\frac{\nabla_X Y-J\nabla_X JY}{2}=\nabla_X Y+\frac{\nabla_X(J)JY}{2}, \quad (1)$$

дзе X, Y – вектарныя палі на M, [1, с. 112–113]. У прыватнасці, $\overline{\nabla}g=0$ і $\overline{\nabla}J=0$. Для другога фундаментальнага тэнзарнага поля h пары (J, g) маем:

$$h_X Y=\nabla_X Y-\overline{\nabla}_X Y=-\frac{\nabla_X(J)JY}{2}=\frac{\nabla_X Y+J\nabla_X JY}{2}. \quad (2)$$

Калі R – тэнзарнае поле крывізны звязнасці ∇, то тэнзарнае поле крывізны $\overline{R}$ звязнасці (1) знаходзіцца па формуле

$$\overline{R}_{XY}Z=\frac{1}{2}R_{XY}Z-\frac{1}{2}JR_{XY}JZ+h_Y h_X Z-h_X h_Y Z, \quad (3)$$

дзе h вызначаецца па формуле (2). Тэнзарнае поле кручэння $\overline{T}$ звязнасці (1) знаходзіцца па формуле

$$\overline{T}_X Y=\frac{1}{2}(J\nabla_Y JX-J\nabla_X JY-[X, Y]). \quad (4)$$

Разгледзім рыманаву структуру амаль здабытку (P, g) на мнагастайнасці M, гэта значыць тэнзарнае поле P тыпу (1, 1), для якога $P^2=I$ і $g(PX, PY)=g(X, Y)$, дзе g – фіксаваная рыманава метрыка, а X, Y – любыя вектарныя палі на M. Такая метрыка g атрымліваецца па формуле

$$g(X, Y)=\frac{1}{2}(\tilde{g}(X, Y)+\tilde{g}(PX, PY)),$$

дзе $\tilde{g}$ – любая рыманава метрыка на M.

Кананічная звязнасць $\overline{\nabla}$ і другое фундаментальнае тэнзарнае h поле структуры (P, g) знаходзяцца адпаведна па формулах

$$\overline{\nabla}_X Y=\frac{\nabla_X Y+P\nabla_X PY}{2}=\nabla_X Y-\frac{\nabla_X(P)PY}{2}, \quad (5)$$

$$h_X Y=\nabla_X Y-\overline{\nabla}_X Y=\frac{\nabla_X(P)PY}{2}=\frac{\nabla_X Y-P\nabla_X PY}{2}, \quad (6)$$

дзе X, Y – вектарныя палі на M [1, с. 98–99]. У прыватнасці, $\overline{\nabla}g=0$ і $\overline{\nabla}P=0$.

Для тэнзарнага поля крывізны $\overline{R}$ і кручэння $\overline{T}$ звязнасці (5) маем:

$$\overline{R}_{XY}Z=\frac{R_{XY}Z}{2}+\frac{PR_{XY}PZ}{2}+h_Y h_X Z-h_X h_Y Z, \quad (7)$$

$$\overline{T}_X Y=\frac{P\nabla_X PY-P\nabla_Y PX-[X, Y]}{2}, \quad (8)$$

дзе R – тэнзарнае поле крывізны звязнасці ∇, а h знаходзіцца па формуле (6).

2^0. Кананічная звязнасць амаль гіперэрмітавай структуры другога роду тыпу (J, P_1, P_2). Тры тэнзарныя палі J, P_1, P_2 тыпу (1, 1) на гладкай звязнай мнагастайнасці M, якія задавальняюць умовам

$$J^2=-I, \quad P_1^2=I, \quad P_2^2=I,$$
$$J=-P_1P_2=P_2P_1, \quad P_1=P_2J=-JP_2,$$
$$P_2=JP_1=-P_1J,$$

называюцца амаль кватэрніённай структурай другога роду, а гладкая звязная мнагастайнасць з гэтай структурай называецца амаль кватэрніённай мнагастайнасцю другога роду [2].

Разгледзім амаль кватэрніённую структуру другога роду (J, P_1, P_2) з фіксаванай рыманавай метрыкай g і вектарнымі палямі X, Y на M. Калі маюць месца роўнасці

$$g(X, Y)=g(JX, JY)=g(P_1X, P_1Y)=g(P_2X, P_2Y),$$

то такую структуру будзем называць амаль гіперэрмітавай структурай другога роду тыпу (J, P_1, P_2) і абазначаць (J, P_1, P_2, g). Фіксаваную метрыку g можна атрымаць з любой рыманавай метрыкі $\tilde{g}$ на M па формуле

$$g(X,Y)=\frac{1}{4}(\tilde{g}(X, Y)+\tilde{g}(JX, JY)+\tilde{g}(P_1X, P_1Y)+\tilde{g}(P_2X, P_2Y)).$$

Калі ∇ – рыманава звязнасць метрыкі g, то кананічная звязнасць $\overline{\nabla}$ структуры (J, P_1, P_2, g) вызначаецца па формуле

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{\nabla_X Y - J\nabla_X JY + P_1\nabla_X P_1 Y + P_2\nabla_X P_2 Y}{4}, \qquad (9)$$

дзе X, Y – вектарныя палі на M. У прыватнасці, $\overline{\nabla} g = 0$ і $\overline{\nabla}J = \overline{\nabla}P_1 = \overline{\nabla}P_2 = 0$.

На мнагастайнасці (M, J, P_1, P_2, g) вызначым кананічныя звязнасці $\overset{J}{\overline{\nabla}}$ (па формуле (1)), $\overset{1}{\overline{\nabla}}$ і $\overset{2}{\overline{\nabla}}$ (па формуле (5)) амаль эрмітавай структуры (J, g) і рыманавых структур амаль здабытку (P_1, g) і (P_2, g) адпаведна. Разгледзім сувязь паміж ∇, $\overset{J}{\overline{\nabla}}$, $\overset{1}{\overline{\nabla}}$, $\overset{2}{\overline{\nabla}}$ і $\overline{\nabla}$ у выпадку, калі амаль эрмітава структура (J, g) з'яўляецца кэлеравай.

Тэарэма 1. Калі амаль эрмітава структура (J, g) – кэлерава, гэта значыць $\nabla J = 0$, то

1) $\overset{J}{\overline{\nabla}} = \nabla$,

2) $\overline{\nabla} = \overset{1}{\overline{\nabla}} = \overset{2}{\overline{\nabla}}$.

Доказ. 1) $\overset{J}{\overline{\nabla}}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\nabla_X(J)JY = \nabla_X Y$.

2) $$\overline{\nabla}_X Y = \frac{\nabla_X Y - J\nabla_X JY + P_1\nabla_X P_1 Y + P_2\nabla_X P_2 Y}{4} = \frac{\nabla_X Y - J^2\nabla_X Y + P_1\nabla_X P_1 Y + JP_1\nabla_X JP_1 Y}{4} = \frac{\nabla_X Y + \nabla_X Y + P_1\nabla_X P_1 Y + P_1\nabla_X P_1 Y}{4} = \frac{\nabla_X Y + P_1\nabla_X P_1 Y}{2} = \overset{1}{\overline{\nabla}}_X Y.$$

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{\nabla_X Y + P_1\nabla_X P_1 Y}{2} = \frac{\nabla_X Y + JP_2\nabla_X JP_2 Y}{2} = \frac{\nabla_X Y + P_2\nabla_X P_2 Y}{2} = \overset{2}{\overline{\nabla}}_X Y.$$

QED

Наступную тэарэму можна даказаць па аналогіі з доказам папярэдняй.

Тэарэма 2. Калі структура амаль здабытку (P_1, g) (ці (P_2, g)) – асобая, гэта значыць $\nabla P_1 = 0$ (ці $\nabla P_2 = 0$), то

1) $\overset{1}{\overline{\nabla}} = \nabla$ (ці $\overset{2}{\overline{\nabla}} = \nabla$),

2) $\overline{\nabla} = \overset{J}{\overline{\nabla}} = \overset{2}{\overline{\nabla}}$ (*ці* $\overline{\nabla} = \overset{J}{\overline{\nabla}} = \overset{1}{\overline{\nabla}}$).

У выпадку, калі звязнасць ∇ і кананічная звязнасць (9) супадаюць, мае месца наступная

Тэарэма 3. Калі $\nabla = \overline{\nabla}$, то $\overset{J}{\overline{\nabla}} = \overset{1}{\overline{\nabla}} = \overset{2}{\overline{\nabla}} = \overline{\nabla}$.

Доказ. На падставе роўнасцей $\overline{\nabla}J = \overline{\nabla}P_1 = \overline{\nabla}P_2 = 0$ маем

$$\overset{J}{\overline{\nabla}}_X Y = \frac{\nabla_X Y - J\nabla_X JY}{2} = \frac{\overline{\nabla}_X Y - J\overline{\nabla}_X JY}{2} = \overline{\nabla}_X Y + \frac{\overline{\nabla}_X(J)JY}{2} = \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y.$$

Для $i = 1, 2$ атрымліваем

$$\overset{i}{\overline{\nabla}}_X Y = \frac{\nabla_X Y + P_i\nabla_X P_i Y}{2} = \frac{\overline{\nabla}_X Y + P_i\overline{\nabla}_X P_i Y}{2} = \overline{\nabla}_X Y - \frac{\overline{\nabla}_X(P_i)P_i Y}{2} = \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y.$$

QED

3^0. Другое фундаментальнае тэнзарнае поле амаль гіперэрмітавай структуры другога роду тыпу (J, P_1, P_2). Няхай ∇ – рыманава звязнасць метрыкі g і $\overline{\nabla}$ – кананічная звязнасць структуры (J, P_1, P_2, g). Тэнзарнае поле h называецца другім фундаментальным тэнзарным полем структуры (J, P_1, P_2, g), дзе

$$h_X Y = \nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y. \qquad (10)$$

Непасрэдным падлікам можна праверыць, што

$$h_{XYZ} = g(h_X Y, Z) = -h_{XZY}.$$

Вызначым па формулах (2) і (6) другія фундаментальныя тэнзарныя палі h^J, h^1 і h^2 структур (J, g), (P_1, g) і (P_2, g) адпаведна.

Тэарэма 4. $h_X Y = \frac{1}{2}\left(h^J_X Y + h^1_X Y + h^2_X Y\right)$.

Доказ. З (9), на падставе (2) і (6), вынікае

$$h_X Y = \nabla_X Y - \frac{\nabla_X Y - J\nabla_X JY + P_1\nabla_X P_1 Y + P_2\nabla_X P_2 Y}{4} = \frac{3\nabla_X Y + J\nabla_X JY - P_1\nabla_X P_1 Y - P_2\nabla_X P_2 Y}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\nabla_X Y + J\nabla_X JY}{2} + \frac{\nabla_X Y - P_1\nabla_X P_1 Y}{2} + \frac{\nabla_X Y - P_2\nabla_X P_2 Y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(h^J_X Y + h^1_X Y + h^2_X Y\right).$$

QED

Тэарэма 5. *Калі $h^1_X Y = h^2_X Y$, то (J, g) – кэлерава структура.*

Доказ. Патрэбна даказаць, што $h^J_X Y = 0$. Прадыферэнцаваўшы тоеснасць $J = P_2 P_1$, атрымаем

$$\nabla_X(J)Y = \nabla_X(P_2)P_1 Y + P_2\nabla_X(P_1)Y.$$

Адсюль, паводле формул $\nabla_X(J)Y = 2h^J_X JY$, $\nabla_X(P_i)Y = 2h^i_X P_i Y$ і тоеснасцей $h^J_X JY = -Jh^J_X Y$, $h^i_X P_i Y = -P_i h^i_X Y$, $i = 1, 2$, маем

$$2h^J_X JY = -2Jh^J_X Y = 2h^2_X P_2 P_1 Y + 2P_2 h^1_X P_1 Y = -2P_2 h^2_X P_1 Y + 2P_2 h^2_X P_1 Y = 0,$$

гэта значыць $h^J_X Y = 0$ для любых вектарных палёў X, Y.

QED

Тэарэма 6. Калі (J, g) – кэлерава структура, то $h_X Y = h_X^1 Y = h_X^2 Y$.

Доказ. Паводле тэарэмы 1 $\bar{\nabla} = \bar{\bar{\nabla}}^1 = \bar{\bar{\nabla}}^2$. Таму

$$h_X Y = \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \overset{1}{\bar{\nabla}}_X Y = \nabla_X Y - \overset{2}{\bar{\nabla}}_X Y = h_X^1 Y = h_X^2 Y.$$

QED

Наступныя тэарэмы 7 і 8 даказваюцца па аналогіі з доказамі тэарэм 5 і 6.

Тэарэма 7. Калі $h_X^J Y = h_X^2 Y$ (ці $h_X^J Y = h_X^1 Y$), то (P_1, g) (ці (P_2, g)) – асобая структура.

Тэарэма 8. Калі (P_1, g) (ці (P_2, g)) – асобая структура, то $h_X Y = h_X^J Y = h_X^2 Y$ (ці $h_X Y = h_X^J Y = h_X^1 Y$).

4⁰. Тэнзарныя палі крывізны і кручэння кананічнай звязнасці амаль гіперэрмітавай структуры другога роду тыпу (J, P_1, P_2).

Тэарэма 9. Калі $\bar{T}$ – тэнзарнае поле кручэння звязнасці (9), то

$$\bar{T}_X Y = \frac{1}{2}\left(\bar{T}_X^J Y + \bar{T}_X^1 Y + \bar{T}_X^2 Y\right),$$

дзе $\bar{T}^J$ вызначаецца па формуле (4), $\bar{T}^1$ і $\bar{T}^2$ – па формуле (8).

Доказ.

$$\bar{T}_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y] = \frac{1}{4}\{\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] -$$
$$-J\nabla_X JY + J\nabla_Y JX + \sum_{i=1}^{2}\left(P_i\nabla_X P_i Y - P_i \nabla_Y P_i X\right) - 3[X,Y]\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{J\nabla_Y JX - J\nabla_X JY - [X,Y]}{2} + \sum_{i=1}^{2}\frac{P_i\nabla_X P_i Y - P_i\nabla_Y P_i X - [X,Y]}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\bar{T}_X^J Y + \bar{T}_X^1 Y + \bar{T}_X^2 Y\right).$$

QED

Тэарэма 10. Тэнзарнае поле крывізны $\bar{R}$ звязнасці (9) знаходзіцца па формуле

$$\bar{R}_{XY} Z = h_X h_Y Z - h_Y h_X Z + \bar{R}_{XY}^J Z + \bar{R}_{XY}^1 Z + \bar{R}_{XY}^2 Z + \frac{JR_{XY}JZ - P_1 R_{XY} P_1 Z - P_2 R_{XY} P_2 Z - 5R_{XY} Z}{4},$$

дзе R – тэнзарнае поле крывізны звязнасці ∇, h знаходзіцца па формуле (10), а $\bar{R}^J$ і $\bar{R}^1$, $\bar{R}^2$ вызначаюцца па формулах (3) і (7) адпаведна.

Доказ.

$$16\bar{R}_{XY} Z = 16\left(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z\right) =$$
$$= 16\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - 16\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - 4\nabla_{[X,Y]} Z + \tag{11}$$
$$+4J\nabla_{[X,Y]} JZ - 4P_1 \nabla_{[X,Y]} P_1 Z - 4P_2 \nabla_{[X,Y]} P_2 Z.$$

Паколькі

$$16h_X h_Y Z = 16(\nabla_X \nabla_Y Z - \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z - \nabla_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z) =$$
$$= 16\nabla_X \nabla_Y Z - 4(\nabla_X \nabla_Y Z - J\nabla_X J\nabla_Y Z + P_1 \nabla_X P_1 \nabla_Y Z + P_2 \nabla_X P_2 \nabla_Y Z) - 4(\nabla_X \nabla_Y Z -$$
$$-\nabla_X J\nabla_Y JZ + \nabla_X P_1 \nabla_Y P_1 Z + \nabla_X P_2 \nabla_Y P_2 Z) + 16\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z =$$
$$= 8\nabla_X \nabla_Y Z + 4J\nabla_X J\nabla_Y Z - 4P_1 \nabla_X P_1 \nabla_Y Z -$$
$$-4P_2 \nabla_X P_2 \nabla_Y Z + 4\nabla_X J\nabla_Y JZ - 4\nabla_X P_1 \nabla_Y P_1 Z -$$
$$-4\nabla_X P_2 \nabla_Y P_2 Z + 16\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z$$

і, значыць,

$$16h_Y h_X Z = 8\nabla_Y \nabla_X Z + 4J\nabla_Y J\nabla_X Z - 4P_1 \nabla_Y P_1 \nabla_X Z -$$
$$-4P_2 \nabla_Y P_2 \nabla_X Z + 4\nabla_Y J\nabla_X JZ - 4\nabla_Y P_1 \nabla_X P_1 Z -$$
$$-4\nabla_Y P_2 \nabla_X P_2 Z + 16\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z,$$

то

$$16\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z = 16h_X h_Y Z - 8\nabla_X \nabla_Y Z - 4J\nabla_X J\nabla_Y Z +$$
$$+4P_1 \nabla_X P_1 \nabla_Y Z + 4P_2 \nabla_X P_2 \nabla_Y Z - 4\nabla_X J\nabla_Y JZ + \tag{12}$$
$$+4\nabla_X P_1 \nabla_Y P_1 Z + 4\nabla_X P_2 \nabla_Y P_2 Z,$$

$$16\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z = 16h_Y h_X Z - 8\nabla_Y \nabla_X Z - 4J\nabla_Y J\nabla_X Z +$$
$$+4P_1 \nabla_Y P_1 \nabla_X Z + 4P_2 \nabla_Y P_2 \nabla_X Z - 4\nabla_Y J\nabla_X JZ + \tag{13}$$
$$+4\nabla_Y P_1 \nabla_X P_1 Z + 4\nabla_Y P_2 \nabla_X P_2 Z.$$

Падставім (12) і (13) у (11), атрымаем

$$16\bar{R}_{XY} Z = 16h_X h_Y Z - 8\nabla_X \nabla_Y Z - 4J\nabla_X J\nabla_Y Z +$$
$$+4P_1 \nabla_X P_1 \nabla_Y Z + 4P_2 \nabla_X P_2 \nabla_Y Z - 4\nabla_X J\nabla_Y JZ +$$
$$+4\nabla_X P_1 \nabla_Y P_1 Z + 4\nabla_X P_2 \nabla_Y P_2 Z - 16h_Y h_X Z +$$
$$+8\nabla_Y \nabla_X Z + 4J\nabla_Y J\nabla_X Z - 4P_1 \nabla_Y P_1 \nabla_X Z - \tag{14}$$
$$-4P_2 \nabla_Y P_2 \nabla_X Z + 4\nabla_Y J\nabla_X JZ - 4\nabla_Y P_1 \nabla_X P_1 Z -$$
$$-4\nabla_Y P_2 \nabla_X P_2 Z - 4\nabla_{[X,Y]} Z + J\nabla_{[X,Y]} JZ -$$
$$-4P_1 \nabla_{[X,Y]} P_1 Z - 4P_2 \nabla_{[X,Y]} P_2 Z.$$

Далей,

$$16\bar{R}_{XY}^J Z = 4\nabla_X \nabla_Y Z - 4\nabla_X J\nabla_Y JZ - 4J\nabla_X J\nabla_Y Z -$$
$$-4J\nabla_X \nabla_Y JZ - 4\nabla_Y \nabla_X Z + 4\nabla_Y J\nabla_X JZ +$$
$$+4J\nabla_Y J\nabla_X Z + 4J\nabla_Y \nabla_X JZ - 8\nabla_{[X,Y]} Z + 8J\nabla_{[X,Y]} JZ,$$

$$16\bar{R}_{XY}^1 Z = 4\nabla_X \nabla_Y Z + 4\nabla_X P_1 \nabla_Y P_1 Z + 4P_1 \nabla_X P_1 \nabla_Y Z +$$
$$+4P_1 \nabla_X \nabla_Y P_1 Z - 4\nabla_Y \nabla_X Z - 4\nabla_Y P_1 \nabla_X P_1 Z -$$
$$-4P_1 \nabla_Y P_1 \nabla_X Z - 4P_1 \nabla_Y \nabla_X P_1 Z - 8\nabla_{[X,Y]} Z -$$
$$-8P_1 \nabla_{[X,Y]} P_1 Z,$$

$$16\bar{R}_{XY}^2 Z = 4\nabla_X \nabla_Y Z + 4\nabla_X P_2 \nabla_Y P_2 Z + 4P_2 \nabla_X P_2 \nabla_Y Z +$$
$$4P_2 \nabla_X \nabla_Y P_2 Z - 4\nabla_Y \nabla_X Z - 4\nabla_Y P_2 \nabla_X P_2 Z -$$
$$-4P_2 \nabla_Y P_2 \nabla_X Z - 4P_2 \nabla_Y \nabla_X P_2 Z - 8\nabla_{[X,Y]} Z -$$
$$-8P_2 \nabla_{[X,Y]} P_2 Z,$$

і выраз (14) пераўтвараецца да выгляду

$$16\bar{R}_{XY} Z = 16h_X h_Y Z - 16h_Y h_X Z + \left(4\nabla_X \nabla_Y Z -\right.$$
$$-4\nabla_X J\nabla_Y JZ - 4J\nabla_X J\nabla_Y Z - 4J\nabla_X \nabla_Y JZ -$$
$$-4\nabla_Y \nabla_X Z + 4\nabla_Y J\nabla_X JZ + 4J\nabla_Y J\nabla_X Z + 4J\nabla_Y \nabla_X JZ -$$
$$\left.-8\nabla_{[X,Y]} Z + 8J\nabla_{[X,Y]} J\right) + \left(4\nabla_X \nabla_Y Z + 4\nabla_X P_1 \nabla_Y P_1 Z +\right.$$

$$\ldots\nabla_X\nabla_Y Z + 4P_1\nabla_X\nabla_Y P_1 Z - 4\nabla_Y\nabla_X Z -$$
$$-4\nabla_Y P_1\nabla_X P_1 Z - 4P_1\nabla_Y P_1\nabla_X Z - 4P_1\nabla_Y\nabla_X P_1 Z -$$
$$-8\nabla_{[X,Y]}Z - 8P_1\nabla_{[X,Y]}P_1 Z\big) + \big(4\nabla_X\nabla_Y Z +$$
$$+4\nabla_X P_2\nabla_Y P_2 Z + 4P_2\nabla_X P_2\nabla_Y Z + 4P_2\nabla_X\nabla_Y P_2 Z -$$
$$-4\nabla_Y\nabla_X Z - 4\nabla_Y P_2\nabla_X P_2 Z - 4P_2\nabla_Y P_2\nabla_X Z -$$
$$-4P_2\nabla_Y\nabla_X P_2 Z - 8\nabla_{[X,Y]}Z - 8P_2\nabla_{[X,Y]}P_2 Z\big) -$$
$$-20\nabla_X\nabla_Y Z + 20\nabla_Y\nabla_X Z + 4J\nabla_X\nabla_Y JZ - 4P_1\nabla_X\nabla_Y P_1 Z -$$
$$-4P_2\nabla_X\nabla_Y P_2 Z - 4J\nabla_Y\nabla_X JZ + 4P_1\nabla_Y\nabla_X P_1 Z +$$
$$+4P_2\nabla_Y\nabla_X P_2 Z + 20\nabla_{[X,Y]}Z - 4J\nabla_{[X,Y]}JZ +$$
$$+4P_1\nabla_{[X,Y]}P_1 Z + 4P_2\nabla_{[X,Y]}P_2 Z =$$
$$= 16h_X h_Y Z - 16h_Y h_X Z + 16\bar R^J_{XY} Z + 16\bar R^1_{XY} Z + 16\bar R^2_{XY} Z +$$
$$+4J\big(\nabla_X\nabla_Y JZ - \nabla_Y\nabla_X JZ - \nabla_{[X,Y]}JZ\big) -$$
$$-4P_1\big(\nabla_X\nabla_Y P_1 Z - \nabla_Y\nabla_X P_1 Z - \nabla_{[X,Y]}P_1 Z\big) -$$
$$-4P_2\big(\nabla_X\nabla_Y P_2 Z - \nabla_Y\nabla_X P_2 Z - \nabla_{[X,Y]}P_2 Z\big) -$$
$$-20\big(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\big) =$$
$$= 16h_X h_Y Z - 16h_Y h_X Z + 16\bar R^J_{XY} Z + 16\bar R^1_{XY} Z + 16\bar R^2_{XY} Z +$$
$$+4JR_{XY}JZ - 4P_1R_{XY}P_1 Z - 4P_2R_{XY}P_2 Z - 20R_{XY}Z.$$

Адсюль канчаткова атрымаем

$$\bar R_{XY}Z = h_X h_Y Z - h_Y h_X Z + \bar R^J_{XY} Z + \bar R^1_{XY}\ldots$$
$$+\frac{JR_{XY}JZ - P_1R_{XY}P_1 Z - P_2R_{XY}P_2 Z - 5\ldots}{4}$$

ЛІТАРАТУРА

1. *Ермолицкий А. А.* Римановы много… геометрическими структурами. Мн., 199…
2. *K. Yano, M. Ako.* Almost quaternion struct… second kind and almost tangent structure… Math. Sem. Rep. 1973. № 25. P. 63–94.

SUMMARY

The almost hyperHermitian structure (J, P_1, … the second kind has been considered in the… There are investigated relations among the ca… connections and the second fundamental tenso… of strucutres (J, P_1, P_2, g), (J, g), (P_1, g), (… Formulae on the curvature and torsion tensor fie… the strucutre (J, P_1, P_2, g) have been obtained.

УДК 51 (07)

Л. М. Шэндэровіч-Анціпава

АБ ЗАДАЧАХ З ВЫТВОРЧЫМ ЗМЕСТАМ У КУРСЕ МАТЭМАТЫКІ ПРАФТЭХВУЧЫЛІШЧ БУДАЎНІЧАГА ПРОФІЛЮ

Любая задача, якая ўзнікае на практыцы, па сваім змесце не з'яўляецца матэматычнай, і каб рашыць, яе неабходна перафармуляваць на мову матэматыкі. Гэта цяжкая (таму карысная для навучэнцаў) частка працы. Часцей навучэнцы лёгка рашаюць задачу, якая сфармулявана яўна, але тую ж задачу, якая патрабуе папярэдне перакладу на мову матэматыкі, рашыць не ў стане.

Задачы, аб якіх ідзе гутарка, рашаюцца не …а гатовым чарцяжы, на якім лёгка ўгледзець …дэкватны геаметрычны вобраз, а па арыгі…але ці яго мадэлі. Навучэнцы выконваюць …арцёж, праводзяць неабходныя вылічэнні, …ыкарыстоўваюць указаныя выкладчыкам …лічальныя сродкі, ацэньваюць рэзультат.

Разгледзім задачы з вытворчым зместам па …дзеле «Аб'ёмы і паверхі цел вярчэння».

1. Колькі ў звязцы электродаў для электра…кі, калі іх агульная маса 10 кг, а кожны …трод – кусок стальнога дроту даўжынёй …м і дыяметрам 6 мм? Шчыльнасць сталі …кг/м^3.

Прапановы па рашэнні. Для знаходжання масы аднаго электрода выкарыстоўваем формулу m = Vρ, дзе V = πR^{2}H.

V = 3,14·(0,03)^2·0,45 ≈ 0,000012 (м^3)

m = 0,000012·7600 ≈ 0,1 (кг)

N = 10/0,1 = 100 электродаў

2. Колькі меднага дроту дыяметрам 5 мм можна пракатаць са злітка аб'ёмам 0,5 м^3?

Прапановы па рашэнні. Выкарыстаўшы формулу V = πR^{2}H, атрымаем

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{4V}{\pi D^2}.$$

3. Жалезабетонная панэль (рыс. 1) мае памеры 600x120x22см. Па ўсёй яе даўжыні – 6 цыліндрычных адтулін, дыяметры якіх 14 см. Знайсці масу панэлі, калі шчыльнасць матэрыялу 2,5 т/м^3.

Прапановы па рашэнні. Для рашэння задачы выкарыстоўваем формулу для знаходжання аб'ёму прамавугольнага паралелепіпеда V = abc, дзе a, b, c – памеры жалезабетоннай пліты, затым формулу для знаходжання