УДК 514.76

**С.А. Багдановіч**

# АМАЛЬ ГІПЕРЭРМІТАВА СТРУКТУРА ДРУГОГА РОДУ ТЫПУ ($J$, $P_1$, $P_2$) НА ДАТЫЧНЫМ РАСПЛАСТАННІ РЫМАНАВАЙ МНАГАСТАЙНАСЦІ

**Уводзіны.** Паняцці кананічная звязнасць $\overline{\nabla}$ і другое фундаментальнае тэнзарнае поле $h$ класічных структур (амаль эрмітавай, рыманавай структуры амаль здабытку, $f$–структуры і г.д.) былі уведзены ў канцы XX ст. А.А. Ермаліцкім. Даследаванні такіх структур у тэрмінах вышэй адзначаных паняццяў выкладзены ў манаграфіі [**1**].

Пабудова $\overline{\nabla}$ і $h$, доказ шэрагу звязаных з імі сцвярджэнняў для амаль гіперэрмітавай структуры першага і другога роду прыведзены ў [**2-4**]. Артыкул [**5**] змяшчае вынікі даследавання амаль гіперэрмітавай структуры першага рода на датычным распластанні рыманавай мнагастайнасці.

Мэтай дадзенага артыкула з’яўляецца пабудова амаль гіперэрмітавай структуры другога роду тыпу ($J$, $P_1$, $P_2$) на датычным распластанні і доказ існавання бясконцага мноства такіх структур.

**$1^0$. Амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу ($J$, $P_1$, $P_2$).** Тры тэнзарныя палі $J$, $P_1$, $P_2$ тыпу (1, 1) на гладкай звязнай мнагастайнасці $M$ ($\dim M=2n$), якія задавальняюць умовам

$$J^2=-I,\ \ P_1^2=I,\ \ P_2^2=I,\ \ J=-P_1P_2=P_2P_1,\ \ P_1=P_2J=-JP_2,\ \ P_2=JP_1=-P_1J, \quad (1)$$

называюцца амаль кватэрніённай структурай другога роду [**6**].

Калі маюць месца роўнасці

$$g(X, Y)=g(JX, JY)=g(P_1X, P_1Y)=g(P_2X, P_2Y),$$

дзе $g$ — фіксаваная рыманава метрыка, $X$, $Y$ — вектарныя палі на $M$, то такая структура называецца амаль гіперэрмітавай структурай другога роду тыпу ($J$, $P_1$, $P_2$) і абазначаецца ($J$, $P_1$, $P_2$, $g$). Пры гэтым ($J$, $g$) з’яўляецца амаль эрмітавай структурай, а ($P_1$, $g$) і ($P_2$, $g$) — рыманавымі структурамі амаль здабытку.

Калі $\nabla$ — рыманава звязнасць метрыкі $g$, то кананічная звязнасць $\overline{\nabla}$ структуры ($J$, $P_1$, $P_2$, $g$) мае выгляд [**3**]

$$\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{4}\left(\nabla_X Y-J\nabla_X JY+P_1\nabla_X P_1Y+P_2\nabla_X P_2Y\right),$$

дзе $X$, $Y$ — любыя вектарныя палі на $M$.

Тэнзарнае поле $h$ вызначаецца па формуле [**1**]

$$h_XY=\nabla_XY-\overline{\nabla}_XY$$

і мае месца роўнасць

$$h_{XYZ}=g(h_XY, Z)=-h_{XZY}. \quad (2)$$

Для структуры ($J$, $P_1$, $P_2$, $g$) гэтае поле мае выгляд [**3**]

$$h=\frac{1}{2}(h^J+h^1+h^2)\,, \tag{3}$$

дзе $h^J$, $h^1$ і $h^2$ — другія фундаментальныя тэнзарныя палі структур $(J, g)$, $(P_1, g)$ і $(P_2, g)$ адпаведна.

**$2^0$. Адлюстраванне звязнасці**. Няхай $(M, g)$ — рыманава мнагастайнасць ($\dim M=n$) і $TM$ — яе датычнае распластанне. Для метрычнай звязнасці $\tilde{\nabla}$ ($\tilde{\nabla} g=0$) разгледзім адлюстраванне $\tilde{K}$ [**7**, **8**], якое вызначаецца формулай

$$\tilde{\nabla}_X Z=\tilde{K}\,Z_*X,$$

дзе $Z$ разглядаецца як адлюстраванне з $M$ у $TM$ і правая частка ёсць вектарнае поле, якое супастаўляе пункту $p\in M$ вектар $\tilde{K}\,Z_*X_p\in M_p$.

Калі $U\in TM$, абазначым праз $H_U$ ядро $\tilde{K}|_{TM_U}$ і гэтая $n$–мерная падпрастора $TM_U$ называецца гарызантальнай падпрасторай $TM_U$. Няхай $\pi$ абазначае натуральную праекцыю $TM$ на $M$, тады $\pi_*$ ёсць $C^\infty$–адлюстраванне $TTM$ на $TM$. Калі $U\in TM$, абазначым праз $V_U$ ядро $\pi_*|_{TM_U}$ і гэтая $n$–мерная падпрастора $TM_U$ называецца вертакальнай падпрасторай $TM_U$ ($\dim TM_U=2\dim M=2n$). Наступныя адлюстраванні з'яўляюцца ізамарфізмамі адпаведнай вектарнай прасторы ($p=\pi(U)$):

$$\pi_*|_{TM_U}: H_U \to M_p,$$

$$\tilde{K}|_{TM_U}: V_U \to M_p$$

і ма маем

$$TM_U=H_U\oplus V_U.$$

Калі $X$ — вектарнае поле на $M$, то існуе адзінае вектарнае поле на $TM$, якое называецца «гарызантальным ліфтам» (адпаведна «вертыкальным ліфтам») $X$ і абазначаецца $\overline{X}^h$ (адпаведна $\overline{X}^v$), такое, што для ўсіх $U\in TM$

$$\pi_*\overline{X}^h_U=X_{\pi(U)}, \qquad \pi_*\overline{X}^v_U=0_{\pi(U)},$$

$$\tilde{K}\overline{X}^h_U=0_{\pi(U)}, \qquad \tilde{K}\overline{X}^v_U=X_{\pi(U)}.$$

Няхай $\tilde{R}$ — тэнзарнае поле крывізны звязнасці $\tilde{\nabla}$, тады з [**7**]

$$[\overline{X}^v, \overline{Y}^v]=0, \tag{4}$$

$$[\overline{X}^h, \overline{Y}^v]=\left(\overline{\tilde{\nabla}_X Y}\right)^v, \tag{5}$$

$$\pi_*([\overline{X}^h, \overline{Y}^h]_U)=[X, Y]_U, \tag{6}$$

$$\tilde{K}([\overline{X}^h, \overline{Y}^h]_U)=\tilde{R}(X, Y)U. \tag{7}$$

Для вектарных палёў $\overline{X}=\overline{X}^h\oplus\overline{X}^v$ і $\overline{Y}=\overline{Y}^h\oplus\overline{Y}^v$ на $TM$ натуральная рыманава метрыка $\hat{g}=\langle\ ,\ \rangle$ на $TM$ вызначаецца формулай

$$\langle\overline{X}, \overline{Y}\rangle=g(\pi_*\overline{X}, \pi_*\overline{Y})+g(\tilde{K}\overline{X}, \tilde{K}\overline{Y}).$$

Відавочна, што падпрасторы $H_U$ і $V_U$ артаганальныя адносна $<\ ,\ >$. Калі $X_1, X_2, \dots , X_n$ — артанарміраваныя на $M$ вектарныя палі (г. зн. $g(X_i, X_j)=\delta^i_j$), то $\overline{X}_1^h, \overline{X}_2^h, ..., \overline{X}_n^h$, $\overline{X}_1^v, \overline{X}_2^v, ..., \overline{X}_n^v$ — артанарміраваныя вектарныя палі на $TM$.

**3⁰. Кананічная амаль эрмітава структура**. Вызначым тэнзарнае поле $J$ на $TM$ роўнасцямі [**7**]

$$J\overline{X}^h=\overline{X}^v, \quad J\overline{X}^v=-\overline{X}^h,$$

дзе $X$ — вектарнае поле на $M$. Тады

$$J\overline{X}=J(J(\overline{X}^h\oplus\overline{X}^v))=J(-\overline{X}^h\oplus\overline{X}^v)=-(\overline{X}^h\oplus\overline{X}^v)=-I\overline{X},$$

г. зн. $J^2=-I$.

Легка паказаць, што $<J\overline{X},\ J\overline{Y}>=<\overline{X},\ \overline{Y}>$, таму $(TM,\ J,\ <\ ,\ >)$ — кананічная амаль эрмітава мнагастайнасць.

Разгледзім другое фундаментальнае тэнзарнае поле $h^J$ пары $(J,\ <\ ,\ >)$. Рыманава звязнасць $\hat{\nabla}$ метрыкі $\hat{g}=<\ ,\ >$ на $TM$ вызначаецца па формуле [**8**]

$$<\hat{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}>=\frac{1}{2}(\overline{X}<\overline{Y},\overline{Z}>+\overline{Y}<\overline{Z},\overline{X}>-\overline{Z}<\overline{X},\overline{Y}>+<\overline{Z},[\overline{X},\overline{Y}]>+$$
$$+<\overline{Y},[\overline{Z},\overline{X}]>+<\overline{X},[\overline{Z},\overline{Y}]>, \tag{8}$$

дзе $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ — вектарныя палі на $TM$.

Выкарыстаўшы $h^J_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+J\nabla_X JY)$ і (2), для артанарміравальных вектарных палёў $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ на $TM$ атрымаем

$$h^J_{\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}}=<h^J_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}>=\frac{1}{2}<\hat{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}+J\hat{\nabla}_{\overline{X}}J\overline{Y},\overline{Z}>=\frac{1}{2}(<\hat{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}>-<\hat{\nabla}_{\overline{X}}J\overline{Y},J\overline{Z}>)=$$
$$=\frac{1}{4}\big(<[\overline{X},\overline{Y}],\overline{Z}>+<[\overline{Z},\overline{X}],\overline{Y}>+<[\overline{Z},\overline{Y}],\overline{X}>-<[\overline{X},J\overline{Y}],J\overline{Z}>-$$
$$-<[J\overline{Z},\overline{X}],J\overline{Y}>-<[J\overline{Z},J\overline{Y}],\overline{X}>\big). \tag{9}$$

З улікам (4)-(7) і (9), разгледзім наступныя выпадкі для $h^J$, мяркуючы, што ўсе адпаведныя вектарныя палі артанарміравальныя.

$$h^J_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^h}=\frac{1}{4}(<[\overline{X}^h,\ \overline{Y}^h],\ \overline{Z}^h>+<[\overline{Z}^h,\ \overline{X}^h],\ \overline{Y}^h>+<[\overline{Z}^h,\ \overline{Y}^h],\ \overline{X}^h>-$$
$$-<[\overline{X}^h,\ J\overline{Y}^h],\ J\overline{Z}^h>-<[J\overline{Z}^h,\ \overline{X}^h],\ J\overline{Y}^h>-<[J\overline{Z}^h,\ J\overline{Y}^h],\ \overline{X}^h>)=$$
$$=\frac{1}{4}(g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)+g([Z,Y],X)-<[\overline{X}^h,\ \overline{Y}^v],\ \overline{Z}^v>-$$
$$-<[\overline{Z}^v,\ \overline{X}^h],\ \overline{Y}^v>-<[\overline{Z}^v,\ \overline{Y}^v],\ \overline{X}^h>)=\frac{1}{2}g(\nabla_X Y,Z)-\frac{1}{4}(g(\tilde{\nabla}_X Y,Z)-$$
$$-g(\tilde{\nabla}_X Z,Y))=\frac{1}{2}(g(\nabla_X Y,Z)-g(\tilde{\nabla}_X Y,Z)).$$

$$h^J_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^v}=\frac{1}{4}(<[\overline{X}^h,\ \overline{Y}^h],\ \overline{Z}^v>+<[\overline{Z}^v,\ \overline{X}^h],\ \overline{Y}^h>+<[\overline{Z}^v,\ \overline{Y}^h],\ \overline{X}^h>-$$

$$-<[\bar X^h, J\bar Y^h], J\bar Z^v>-<[J\bar Z^v, \bar X^h], J\bar Y^h>-<[J\bar Z^v, J\bar Y^h], \bar X^h>)=$$
$$=\frac{1}{4}(g(\tilde R(X, Y)U, Z)+<[\bar Z^h, \bar X^h], \bar Y^v>)=\frac{1}{4}(g(\tilde R(X, Y)U, Z)+$$
$$+g(\tilde R(Z, X)U, Y))=-\frac{1}{4}(g(\tilde R(X, Y)Z, U)+g(\tilde R(Z, X)Y, U)).$$

$$h^J_{\bar X^h \bar Y^v \bar Z^h}=-\frac{1}{4}(g(\tilde R(Z, X)Y, U)+g(\tilde R(X, Y)Z, U)).$$

$$h^J_{\bar X^v \bar Y^h \bar Z^h}=-\frac{1}{4}g(\tilde R(Z, Y)X, U).$$

$$h^J_{\bar X^v \bar Y^v \bar Z^v}=\frac{1}{4}g(\tilde R(Z, Y)X, U).$$

$$h^J_{\bar X^v \bar Y^v \bar Z^h}=0.$$

$$h^J_{\bar X^v \bar Y^h \bar Z^v}=0.$$

$$h^J_{\bar X^h \bar Y^v \bar Z^v}=\frac{1}{2}(g(\tilde\nabla_X Y, Z)-g(\nabla_X Y, Z)).$$

**4[0]. Амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу ($J$, $P_1$, $P_2$) на датычным распластанні**. Вызначым тэнзарнае поле $P_1$ на $TM$ роўнасцямі

$$P_1\bar X^h=\bar X^h,\ P_1\bar X^v=-\bar X^v.$$

Маем

$$P_1^2\bar X=P_1(P_1(\bar X^h\oplus\bar X^v))=P_1(\bar X^h\oplus-\bar X^v)=(\bar X^h\oplus\bar X^v)=I\bar X,$$

г. зн. $P_1^2=I$. Лёгка праверыць, што $<P_1\bar X, P_1\bar Y>=<\bar X, \bar Y>$, таму ($P_1$, < , >) — рыманава структура амаль здабытку.

Далей,

$$J(P_1\bar X)=J(\bar X^h\oplus-\bar X^v)=(\bar X^v\oplus\bar X^h)=(\bar X^h\oplus\bar X^v),$$
$$P_1(J\bar X)=P_1(\bar X^v\oplus-\bar X^h)=(-\bar X^v\oplus-\bar X^h)=-(\bar X^h\oplus\bar X^v).$$

Адсюль $JP_1=-P_1J=P_2$, дзе тэнзарнае поле $P_2$ вызначаецца на $TM$ роўнасцямі

$$P_2\bar X^h=\bar X^v,\ P_2\bar X^v=\bar X^h. \qquad (10)$$

Паколькі $<P_2\bar X, P_2\bar Y>=<\bar X, \bar Y>$ і выконваюцца ўмовы (1), то ($P_2$, < , >) — рыманава структура амаль здабытку на $TM$ і ($J$, $P_1$, $P_2$, < , >) — амаль гіперэрмітава структура другога роду на $TM$.

Разгледзім другое фундаментальнае тэнзарнае поле $h^1$ структуры ($P_1$, < , >). Выкарыстаўшы формулу $h^1_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y-P_1\nabla_X P_1 Y)$, раней адзначаныя выразы (2) і (8), для артанарміравальных палёў $\bar X$, $\bar Y$, $\bar Z$ на $TM$ будзем мець

$$h^1_{\bar X\bar Y\bar Z}=<h^1_{\bar X}\bar Y, \bar Z>=\frac{1}{2}<\hat\nabla_{\bar X}\bar Y-P_1\hat\nabla_{\bar X}P_1\bar Y, \bar Z>=$$

$$=\frac{1}{2}(<\hat{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}>-<\hat{\nabla}_{\overline{X}}P_1\overline{Y},P_1\overline{Z}>)=$$

$$=\frac{1}{4}\Big(<[\overline{X},\overline{Y}],\overline{Z}>+<[\overline{Z},\overline{X}],\overline{Y}>+<[\overline{Z},\overline{Y}],\overline{X}>-<[\overline{X},P_1\overline{Y}],P_1\overline{Z}>-$$

$$-<[P_1\overline{Z},\overline{X}],P_1\overline{Y}>-<[P_1\overline{Z},P_1\overline{Y}],\overline{X}>\Big). \qquad (11)$$

З улікам (4)-(7) і (11), разгледзім наступныя выпадкі для $h^1$, мяркуючы, што ўсе адпаведныя вектарныя палі артанарміравальныя.

$$h^1_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^h}=\frac{1}{4}(<[\overline{X}^h,\ \overline{Y}^h],\ \overline{Z}^h>+<[\overline{Z}^h,\ \overline{X}^h],\ \overline{Y}^h>+<[\overline{Z}^h,\ \overline{Y}^h],\ \overline{X}^h>-$$

$$-<[\overline{X}^h,P_1\overline{Y}^h],P_1\overline{Z}^h>-<[P_1\overline{Z}^h,\ \overline{X}^h],P_1\overline{Y}^h>-<[P_1\overline{Z}^h,P_1\overline{Y}^h],\ \overline{X}^h>)=$$

$$=\frac{1}{4}(g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)+g([Z,Y],X)-g([X,Y],Z)-g([Z,X],Y)-$$

$$-g([Z,Y],X))=0.$$

$$h^1_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^v}=\frac{1}{4}(<[\overline{X}^h,\ \overline{Y}^h],\ \overline{Z}^v>+<[\overline{Z}^v,\ \overline{X}^h],\ \overline{Y}^h>+<[\overline{Z}^v,\ \overline{Y}^h],\ \overline{X}^h>-$$

$$-<[\overline{X}^h,P_1\overline{Y}^h],P_1\overline{Z}^v>-<[P_1\overline{Z}^v,\ \overline{X}^h],P_1\overline{Y}^h>-<[P_1\overline{Z}^v,P_1\overline{Y}^h],\ \overline{X}^h>)=$$

$$=\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X,Y)U,Z)+g(\tilde{R}(X,Y)U,Z))=\frac{1}{2}(g(\tilde{R}(X,Y)U,Z)=$$

$$=-\frac{1}{2}g(\tilde{R}(X,Y)Z,U).$$

$$h^1_{\overline{X}^h\overline{Y}^v\overline{Z}^h}=-\frac{1}{2}g\tilde{R}(Z,X)Y,U).$$

$$h^1_{\overline{X}^v\overline{Y}^h\overline{Z}^h}=0.$$

$$h^1_{\overline{X}^v\overline{Y}^v\overline{Z}^v}=0.$$

$$h^1_{\overline{X}^v\overline{Y}^v\overline{Z}^h}=0.$$

$$h^1_{\overline{X}^v\overline{Y}^h\overline{Z}^v}=0.$$

$$h^1_{\overline{X}^h\overline{Y}^v\overline{Z}^v}=0.$$

Па аналогіі можна падлічыць кампаненты другога фундаментальнага тэнзарнага поля $h^2$ рыманавай структуры амаль здабытку ($P_2$, < , >), дзе тэнзарнае поле $P_2$ вызначаецца роўнасцямі (10). Яны наступныя:

$$h^2_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^h}=\frac{1}{2}(g(\nabla_XY,Z)-g(\tilde{\nabla}_XY,Z)).$$

$$h^2_{\overline{X}^h\overline{Y}^h\overline{Z}^v}=-\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X,Y)Z,U)-g(\tilde{R}(Z,X)Y,U)).$$

$$h^2_{\overline{X}^h\overline{Y}^v\overline{Z}^h}=\frac{1}{4}(g(\tilde{R}(X,Y)Z,U)-g(\tilde{R}(Z,X)Y,U)).$$

$$h^2_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^h} = -\frac{1}{4} g(\tilde{R}(Z, Y)X, U).$$

$$h^2_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{4} g(\tilde{R}(Z, Y)X, U).$$

$$h^2_{\bar{X}^v\bar{Y}^v\bar{Z}^h} = 0.$$

$$h^2_{\bar{X}^v\bar{Y}^h\bar{Z}^v} = 0.$$

$$h^2_{\bar{X}^h\bar{Y}^v\bar{Z}^v} = \frac{1}{2}(g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z)).$$

З атрыманых значэнняў тэнзарных палёў $h^J$, $h^1$, $h^2$ і (3) вынікае, што пабудаваная амаль гіперэрмітава структура другога роду $(J, P_1, P_2, \hat{g})$ на датычным распластанні $TM$ рыманавай мнагастайнасці $(M, g)$ цалкам вызначаецца парай $(g, \tilde{\nabla})$, дзе $\tilde{\nabla}$ — метрычная звязнасць. Змяняючы метрыку $g$ і звязнасць $\tilde{\nabla}$, атрымоўваем бясконцае мноства амаль гіперэрмітавых структур другога роду тыпу $(J, P_1, P_2)$ на $TM$.


*SUMMARY*

*An almost hyperHermitian structure $(J, P_1, P_2, g)$ of the second kind on a tangent bundle of the Riemannian manifold M has been considered in the paper.*


ЛІТАРАТУРА


1. Ермолицкий А.А. Римановы многообразия с геометрическими структурами. Мн., 1998.
2. Баганові С.А. Кананічная звязнасць і другое фендументальнае тэнзарнае поле амаль эрмітавай гіперкамплекснай мнагастайнасці // Весці БДПУ. 2002. №2. С. 194-198.
3. Багановіч С.А. Кананічная звязнасць і другое фендументальнае тэнзарнае поле амаль гіперэрмітавай структуры другога роду тыпу $(J, P_1, P_2)$ // Весці БДПУ. 2005. №2. Серыя 3. С. 13-16.
4. Богданович С.А., Ермолицкий А.А Каноническая связность и второе фундаментальное тензорное поле почти гиперэрмитовой структуры второго рода типа $(J_1, J_2, P)$ // Мн.: МГВРК. 2007. Часть 3. С. 155-156.
5. Bogdanovich S.A., Ermolitski A.A. On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles // Central Europ. J. Math. 2004. Vol. 2. Issue 5. P. 615-623.
6. K. Yano, M. Ako. Almost quaternion structures of the second kind and almost tangent structures // Kodai Math. Sem. Rep. 1973. Vol. 25. P. 63–91.
7. Dombrowski, P. On the Geometry of the Tangent Bundle // J. Reine und Angew. Math. – 1962. – № 210. – P. 73–88.
8. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М. 1971.

**УДК 514.76**

**Багдановіч С.А. Амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу ($J$, $P_1$, $P_2$) на датычным распластанні рыманавай мнагастайнасці // Весці БДПУ. 2010. № . Серыя 3. С.**

Пабудавана амаль гіперэрмітава структура другога роду тыпу ($J$, $P_1$, $P_2$) на датычным распластанні рыманавай мнагастайнасці і даказана існаванне бясконцага мноства такіх структур.

Бібліягр. – 8 назваў.